СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXX, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1989

УДК 517.15

С. С. ГОНЧАРОВ, А. В. МОЛОКОВ, Н. С. РОМАНОВСКИЙ

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОЙ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Вопросы алгоритмической размерности алгебраических систем привлекали внимание многих авторов (см. [1—11]). Основной задачей этого направления исследований является проблема алгебраической характеризации систем различных алгоритмических размерностей. В связи с этим интересен вопрос о возможной алгоритмической размерности систем в стандартных классах. С. С. Гончаровым в [1] впервые были найдены примеры неавтоустойчивых алгебраических систем конечных алгоритмических размерностей, а в [3] построена 2-ступенно разрешимая неавтоустойчивая группа конечной алгоритмической размерности и показано, что абелева группа может быть либо автоустойчивой, либо бесконечной алгоритмической размерности. Вопрос о возможной алгоритмической размерности нильпотентных групп оставался открытым.

В настоящей работе показывается, что существуют 2-ступенно нильпотентные группы любой алгоритмической размерности. Соответствующая конструкция сначала была предложена С. С. Гончаровым, а затем на ее основе Н. С. Романовский и А. В. Молоков независимо построили примеры 2-ступенно нильпотентных групп без кручения и периодических периода 4 или p (p — простое, $p>2$), которые имеют заданную алгоритмическую размерность. Эти примеры излагаются ниже.

Основные определения, которые мы будем использовать, можно найти в книгах: по теории групп — [12, 13], по теории конструктивных моделей — [14] и по теории рекурсивных функций — [15].

§ 1. Предварительные сведения о 2-ступенно нильпотентных группах

1.1. Напомним, что если G — нильпотентная группа, то совокупность элементов, порождающих G по модулю коммутанта G', является системой порождающих всей группы G.

Пусть F — свободная 2-ступенно нильпотентная группа с базой $\{x_i \mid i \in I\}$, где I — упорядоченное множество. Отметим, что F' является свободной абелевой группой с базой $\{[x_i, x_j] \mid i<j,\ i,\ j \in I\}$. Обозначим через $\mathscr{K}$ класс групп вида F/R, где $R \subseteq F'$. Этот класс состоит в точности из таких 2-ступенно нильпотентных групп, у которых фактор-группа по коммутанту — свободная абелева группа. Пусть $G \in \mathscr{K}$ и H — подгруппа из G, определим число $r_G(H)$ равным рангу абелевой группы HG'/G'.

Пусть A, B — 2-ступенно нильпотентные группы. Обозначим через $A \circ B$ 2-ступенно нильпотентное произведение этих групп, т. е. группу, заданную в многообразии 2-ступенно нильпотентных групп при помощи объединения систем образующих элементов и определяющих соотношений групп A и B. Группы A, B каноническим образом вкладываются в качестве подгрупп в $A \circ B$. Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть* A, $B \in \mathscr{K}$, $G = A \circ B$, $\{a_i \mid i \in I\}$ — *база* A *по модулю* A', $\{b_j \mid j \in J\}$ — *база* B *по модулю* B'. *Тогда* $\{a_i, b_j \mid i \in I, j \in J\}$ — *база* G *по модулю* G' *и имеется разложение* $G' = A' \times B' \times C$, *где* C — *свободная абелева группа с базой* $\{[a_i, b_j] \mid i \in I, j \in J\}$.

1.2. Пусть $k \geqslant 1$ и A — свободная абелева группа ранга k с некоторой фиксированной базой $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Пусть $B \in \mathscr{K}$ и в B имеется подгруппа C, являющаяся свободной 2-ступенно нильпотентной группой с базой $\{c_j \mid j \in J\}$. Предположим, последнее множество дополняется элементами b_i $(i \in I)$ до базы B по модулю B'. Рассмотрим группу $G = B \circ A/[a_1, C]$ и обозначим ее также через $\langle B, (C, A)\rangle$. Очевидно, что B и A вкладываются в G в качестве подгрупп. По лемме 1 можно утверждать, что G' разлагается в прямое произведение подгруппы B' и свободной абелевой группы D с базой $\{[b_i, a_l], [c_j, a_m] \mid i \in I, j \in J, 1 \leqslant l \leqslant k, 2 \leqslant m \leqslant k\}$. Отметим, что централизатор элемента a_1 в G равен CAG'.

Лемма 2. *Если* H — *абелева подгруппа из* G *и* $r_G(H) \geqslant 3$, *то* H *либо содержится в* BG', *либо в* AG'.

Доказательство. Предположим противное, и пусть H — соответствующий контрпример. Без ограничения общности можно предполагать, что $H \supseteq G'$. Отметим, что каждый элемент группы G по модулю коммутанта G' однозначно представи́м в виде канонического произведения $a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k} \cdot b \cdot c$, где b — некоторое упорядоченное произведение степеней элементов b_i, c — упорядоченное произведение степеней элементов c_j. Выберем в H канонический элемент h_1 такой, что $h_1 = a_1^{\alpha_1} \ldots a_p^{\alpha_p} \cdot b \cdot c$, где p максимально с условием $\alpha_p \neq 0$ и число α_p минимально по абсолютной величине среди возможных. Тогда можно предполагать, что H по модулю G' порождается каноническими элементами $h_1, h_2, \ldots$, причем в разложениях $h_2, h_3, \ldots$ не участвуют элементы a_l, $l \geqslant p$. Пусть $h_2 = a_1^{\alpha_1'} \ldots a_s^{\alpha_s'} \cdot b' \cdot c'$, $s < p$.

Предположим сначала, что $p > 1$. Тогда если $b' \neq 1$ или $c' \neq 1$, то $[h_1, h_2] = u \cdot v$, где $u \in B'$, $v \in D$, и можно утверждать, что элемент v отличен от 1, так как в его записи по базе группы D будет участвовать коммутатор вида $[b_i, a_p]$ или $[c_j, a_p]$. Это противоречит коммутативности H. Следовательно, $h_2, h_3, \ldots \in A$. Так как $r_G(H) \geqslant 3$, то по крайней мере один из элементов $h_2, h_3, \ldots$ зависит от некоторого a_l, где $l > 1$. Пусть это будет h_2, т. е. $s > 1$, $\alpha_s' \neq 0$. Поскольку $h_1 \notin AG'$, то либо $b \neq 1$, либо $c \neq 1$. В этом случае снова можно показать, что $[h_1, h_2] \neq 1$. Опять приходим к противоречию с коммутативностью H.

Пусть $p = 1$, т. е. $h_1 = \alpha_1^{\alpha_1} \cdot b \cdot c$, $\alpha_1 \neq 0$, а элементы $h_2, h_3, \ldots$ лежат в B. Если $h_2 = b' \cdot c'$ и $b' \neq 1$, то в разложении коммутатора $[h_1, h_2]$ встречается множитель вида $[a_1, b_i]^\alpha$ и потому $[h_1, h_2] \neq 1$. Значит, можно утверждать, что $h_2, h_3, \ldots \in C$. Но тогда $r_G(H \cap C) \geqslant 2$. Откуда ввиду того, что C — свободная 2-ступенно нильпотентная группа, следует, что $H \cap C$ — неабелева группа. Полученное противоречие доказывает лемму.

1.3. Пусть $B \in \mathscr{K}$ и $C_1, \ldots, C_s$ — подгруппы из B, являющиеся свободными 2-ступенно нильпотентными группами, а объединение их баз дополняется до базы B по модулю B'. Рассмотрим различные натуральные числа $k_1, \ldots, k_{2s}$ $(k_i \geqslant 3)$, а также для каждого i свободную абелеву группу A_i с фиксированной базой $\{a_{1,i}, \ldots, a_{k_i,i}\}$. Образуем группу $G = \langle B, (C_1, A_1), (C_1, A_2), \ldots, (C_s, A_{2s-1}), (C_s, A_{2s})\rangle$.

Лемма 3. *Предположим, что в* B *нет максимальных абелевых подгрупп, которые по модулю* B' *имеют ранг, равный какому-либо из чисел* k_i. *Тогда*

1) *подгруппа* $C_i G'$ *состоит в точности из тех элементов, которые централизуют* $a_{1,2i-1}$ *и* $a_{1,2i}$,

2) *если* φ — *автоморфизм группы* G, *то* $a_{1,i}\varphi \equiv a_{1,i}^{\pm 1} \bmod G'$,

3) *подгруппы* A_iG', C_iG' *характеристичны в* G.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как централизатор элемента $a_{1,2i-1}$ в G равен $C_iA_{2i-1}G'$, а централизатор элемента $a_{1,2i}$ равен $C_iA_{2i}G'$.

Согласно лемме 2 в G существует единственная максимальная абелева подгруппа, которая по модулю G' имеет ранг k_i, это A_iG'. Значит, A_iG' — характеристическая подгруппа. Циклическая подгруппа, порожденная элементом $a_{1,i}$, помноженная на G', характеризуется как совокупность элементов из A_iG', централизаторы которых больше множества A_iG'. Очевидно, что эта совокупность должна быть автоморфно допустимой. Отсюда $a_{1,i}\varphi \equiv a_{1,i}^{\pm 1} \bmod G'$. Тогда из п. 1 получается, что всякая подгруппа C_iG' является характеристической. Лемма доказана.

1.4. Следующие два утверждения легко проверяются.

Лемма 4. *Рассмотрим группу* G, *заданную в многообразии* 2-*ступенно нильпотентных групп с помощью образующих элементов* a, b, x_n $(n \in N)$ *и определяющих соотношений* $[a, x_n] = [b, x_{n+1}]$ $(n \in N)$. *Тогда если* $x \in \text{гр}(x_n \mid n \in N)$ *и* $[a, x_n] = [b, x]$, *то* $x \equiv x_{n+1} \bmod G'$.

Лемма 5. *Пусть группа* G *задана в многообразии* 2-*ступенно нильпотентных групп с помощью образующих элементов* c, d, y_n, u_n $(n \in N)$ *и определяющих соотношений* $[y_n, u_n] = 1$, $[y_n, c] = [y_{n+1}, c]$, $[u_n, d] = [u_{n+1}, d]$ $(n \in N)$. *Тогда если* $y \in \text{гр}(y_n | n \in N)$, $u \in \text{гр}(u_n | n \in N)$, $y \neq 1$, $u \neq 1$ *и* $[y, u] = 1$, *то для некоторого* n *имеем* $y \in \text{гр}(y_n)$, $u \in \text{гр}(u_n)$; *если, кроме того,* $[y, c] = [y_0, c]$, $[u, d] = [u_0, d]$, *то* $y \equiv y_n$, $u \equiv u_n \bmod G'$.

1.5. Пусть $\mathscr{K}_2$ обозначает класс 2-ступенно нильпотентных групп, у которых фактор-группа по коммутанту имеет период 2 (в таких группах коммутант также имеет период 2), $\mathscr{K}_p$ — класс 2-ступенно нильпотентных групп периода p (p простое, $p > 2$). Тогда в этих классах найдутся аналоги конструкций и утверждений, которые мы в предыдущих пунктах рассматривали для класса $\mathscr{K}$.

§ 2. Основная теорема

Предложение. *Для любого бесконечного вычислимого семейства* S *рекурсивно перечислимых множеств существует* 2-*ступенно нильпотентная группа* G *такая, что имеется алгоритм построения по любой однозначной вычислимой нумерации* γ *семейства* S *конструктивизации* ν_γ *группы* G, *при этом* ν_γ *неавтоэквивалентна* $\nu_{\gamma'}$ *тогда и только тогда, когда* γ *и* γ' — *неэквивалентные нумерации и для любой конструктивизации* ν *группы* G *существует нумерация* γ *такая, что* ν *и* ν_γ *автоэквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим семейство S рекурсивно перечислимых множеств и вычислимую однозначную нумерацию γ семейства S^*, где $S^* = \{s^* | s \in S\}$ и $s^* = \{c(n, k) | n \in s, k \in N\}$. Определим строго вычислимое семейство конечных множеств $\{\gamma^t(n) | n, t \in N\}$ такое, что $\bigcup_{t \geqslant 0} \gamma^t(n) = \gamma(n)$, $\gamma^0(n) = \varnothing$ и $|\gamma^{t+1}(n) \setminus \gamma^t(n)| \leqslant 1$ для любых n, $t \in N$.

Замечание. Если γ — однозначная вычислимая нумерация S, то $\gamma^*(n) \rightleftharpoons \{c(k, l) | k \in \gamma(n)\}$ — однозначная вычислимая нумерация S^*; если γ — однозначная вычислимая нумерация S^*, то $\gamma^0(n) = \{k | \gamma(n) \in c(k, 0)\}$ — однозначная вычислимая нумерация S.

В силу замечания имеем однозначное соответствие между однозначными вычислимыми нумерациями семейств S и S^*, а $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$, если и только если $\overset{*}{\gamma_1} \leqslant \overset{*}{\gamma_2}$. Отсюда S и S^* обладают одним и тем же числом неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций. Поэтому в дальнейшем мы будем работать с семейством S и его вычислимой однозначной нумерацией γ, предполагая, что для S выполнено свойство: если $c(n, l) \in s$ из S, то для любого натурального числа m элемент $c(n, m)$

также лежит в s. Без ограничения общности мы можем считать, что любое натуральное число лежит в одном из элементов S. Если это не так, то можно добавить к семейству S множество N, и $S \cup \{N\}$ будет обладать теми же свойствами.

Пусть $A \subseteq N^3$ такое, что

$$A = \{c^3(n, t, k) \mid \gamma^{t+1}(n) \setminus \gamma^t(n) = \{k\},\ n, t, k \in N\}.$$

Это множество рекурсивно перечислимо, не пусто и бесконечно. Поэтому существует рекурсивная функция f_γ: $N \to N$ такая, что f_γ отображает N взаимно однозначно на $c^3(A)$, где c^3: $N \to N$ — взаимно однозначная нумерация всех троек натуральных чисел [15].

Построим теперь искомую группу $G = G_\gamma$. Пусть группа B задана в многообразии 2-ступенно нильпотентных групп с помощью образующих элементов a, b, c, d, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n $(n \in N)$ и определяющих соотношений

$$[x_n, a] = [x_{n+1}, b],\quad [y_n, u_n] = 1,\quad [z_n, v_n] = 1,\quad [y_n, c] = [y_{n+1}, c],$$
$$[z_n, d] = [z_{n+1}, d],\quad [u_n, d] = [u_{n+1}, d],\quad [v_n, c] = [v_{n+1}, c],$$

здесь $n \in N$, $[x_k, y_s] = 1$ и $[y_s, z_n] = 1$, если для некоторого t имеем $f_\gamma(s) = c^3(n, t, k)$.

Лемма 6. *Если H — абелева подгруппа из B, то $r_B(H) \leqslant 2$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется такое число q, что в группе B_q, которая задана образующими элементами a, b, c, d, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n $(1 \leqslant n \leqslant q)$ и определяющими соотношениями

$$[x_n, a] = 1,\quad [x_n, b] = 1,\quad [x_n, y_1] = 1, \ldots, [x_n, y_q] = 1,$$
$$[y_n, u_1] = 1, \ldots, [y_n, u_q],\quad [y_n, z_1] = 1, \ldots, [y_n, z_q] = 1,$$
$$[z_n, v_1] = 1, \ldots, [z_n, v_q] = 1,\quad [y_n, c] = 1,\quad [v_n, c] = 1,$$
$$[z_n, d] = 1,\quad [u_n, d] = 1,$$

где $1 \leqslant n \leqslant q$, существует абелева подгруппа E такая, что $r_{B_q}(E) \geqslant 3$. Группу B_q можно получить последовательной процедурой, исходя из свободной 2-ступенно нильпотентной группы с базой $\{x_1, \ldots, x_q\}$, добавляя на каждом шаге по одному образующему элементу и одной системе определяющих соотношений в том порядке, как эти соотношения у нас выписаны. Это дает возможность применить лемму 2, с помощью которой получается, что абелевой подгруппы E с условием $r_{B_q}(E) \geqslant 3$ не должно существовать. Лемма доказана.

Рассмотрим в B следующие подгруппы, являющиеся свободными 2-ступенно нильпотентными группами: $A = \text{гр}(a)$, $B = \text{гр}(b)$, $C = \text{гр}(c)$, $D = \text{гр}(d)$, $X_0 = \text{гр}(x_0)$, $X = \text{гр}(x_n | n \in N)$, $Y = \text{гр}(y_n | n \in N)$, $Z = \text{гр}(z_n | n \in N)$, $U = \text{гр}(u_n | n \in N)$, $V = \text{гр}(v_n | n \in N)$. Сопоставим этим группам соответственно пары натуральных чисел (k_1, k_2), $\ldots$, (k_{19}, k_{20}), где $k_i \geqslant 3$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$. Возьмем для каждого k_i свободную абелеву группу A_i с фиксированной базой $\{a_{1,i}, \ldots, a_{k_i,i}\}$ и при помощи конструкции, описанной в п. 1.2 и 1.3, определим группу

$$G_\gamma = \langle B, (A, A_1), (A, A_2), \ldots, (V, A_{19}), (V, A_{20})\rangle.$$

Конструктивизацию построенной группы зададим следующим образом. Группа G_γ у нас фактически описывается с помощью множества образующих элементов $M = \{a, b, c, d, x_n, y_n, z_n, u_n, v_n, a_{i_j} \mid n \in N,\ 1 \leqslant i \leqslant k_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 20\}$ и некоторой системы определяющих соотношений. Рассмотрим ее каноническое представление в виде фактор-группы F/R_γ, где F — свободная 2-ступенно нильпотентная группа с базой M. Пусть ν — гёделевская нумерация элементов группы F. Определим конструктивизацию ν_γ группы G_γ, полагая $\nu_\gamma(n) \rightleftharpoons \nu(n) R_\gamma$.

Лемма 7. *Если* γ_1 *и* γ_2 — *две однозначные вычислимые нумерации семейства* S, *то группы* G_{γ_1} *и* G_{γ_2} *изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим взаимно однозначное отображение h множества N на N такое, что $\gamma_1(n)=\gamma_2(h(n))$. Для любой пары (l, n) с условием $l\in\gamma_1(n)$ существует тройка (n, t, l) такая, что $l\in\in\gamma_1^{t+1}(n)\setminus\gamma_1^t(n)$. Так как $l\in\gamma_1(n)=\gamma_2(h(n))$, то найдется тройка $(h(n), t', l)$, для которой $l\in\gamma_2^{t'+1}(h(n))\setminus\gamma_2^{t'}(h(n))$. Определим функцию ψ, полагая $\psi(s)=s'$, если из равенства $f_{\gamma_1}(s)=c^3(n, t, l)$ следует $f_{\gamma_2}(s')= =c^3(h(n), t', l)$. Эта функция является взаимно однозначным отображением N на N. Искомый изоморфизм $G_{\gamma_1}\to G_{\gamma_2}$ задается на порождающих элементах следующим образом:

$$a\to a,\quad b\to b,\quad c\to c,\quad d\to d,\quad x_n\to x_n,\quad y_n\to y_{\psi(n)},$$
$$z_n\to z_{h(n)},\quad u_n\to u_{\psi(n)},\ v_n\to v_{h(n)},\quad a_{i_j}\to a_{i_j}$$
$$(n\in N,\quad 1\leqslant i\leqslant k_j,\quad 1\leqslant j\leqslant 20).$$

Лемма доказана.

Отметим, что при доказательстве леммы изоморфизм $G_{\gamma_1}\to G_{\gamma_2}$ строится эффективно относительно отображения h. Поэтому выполняется

Лемма 8. *Если* γ_1 *и* γ_2 — *эквивалентные однозначные вычислимые нумерации семейства* S, *то* ν_{γ_1} *и* ν_{γ_2} *автоэквивалентны.*

Лемма 9. *Для любой вычислимой нумерации* γ *семейства* S *нумерованная группа* (G, ν_γ) *конструктивна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что отношение равенства разрешимо на номерах элементов группы G. Это эквивалентно разрешимости проблемы равенства единице элементов $\nu_\gamma(n)$. Последнее имеет место, так как для любой подгруппы H, порожденной конечным подмножеством множества данных образующих M группы G, может быть эффективно построена конечная система определяющих соотношений, а в конечно-порожденных нильпотентных группах, как известно, проблема равенства разрешима. Лемма доказана.

Для любой группы G (в том числе и для нашей), представимой в виде F/R, где F — свободная 2-ступенно нильпотентная группа с базой M и $R\subseteq F'$, верна

Лемма 10. *Любое отображение* $M\to G$, *тождественное по модулю* G', *продолжается до автоморфизма группы* G.

Лемма 11. *Если* ν — *конструктивизация группы* G, *то существуют рекурсивные функции* σ_x, σ_y, σ_z, σ_u, σ_v *и перестановки* p, q *множества* N *такие, что*

$$\nu(\sigma_x(n))\equiv x_n,\ \nu(\sigma_y(n))\equiv y_{p(n)},\ \nu(\sigma_z(n))\equiv z_{q(n)},$$
$$\nu(\sigma_u(n))\equiv u_{p(n)},\ \nu(\sigma_v(n))\equiv v_{q(n)}\bmod G'.$$

Доказательство. Пусть $\overline{m}$ обозначает ν-номер элемента m из M. Тогда полагаем $\sigma_x(0)=\overline{x}_0$, $\sigma_x(n+1)=\mu l([\nu(l), a_{1,11}]=1\,\&\,[\nu(l), a_{1,12}]=1\,\&\,[\nu(l), b]=[\nu(\sigma_x(n)), a])$.

Двуместную функцию $(\sigma_y, \sigma_u)(n)=(\sigma_y(n), \sigma_u(n))$ определим так: $(\sigma_y, \sigma_u)(0)=(\overline{y}_0, \overline{u}_0)$, $(\sigma_y, \sigma_u)(n+1)=(\mu l, \mu r)([\nu(l), a_{1,13}]=1\,\&\,[\nu(l), a_{1,14}]=1\,\&\,[\nu(r), a_{1,17}]=1\,\&\,[\nu(r), a_{1,18}]=1\,\&\,[\nu(l), c]=[y_0, c]\,\&\,[\nu(r), d]=[u_0, d]\,\&\,\underset{k\leqslant n}{\&}[\nu(l), \nu(\sigma_y(k))]\neq 1)$. Аналогично определяется двуместная функция (σ_z, σ_v). Тот факт, что построенные функции будут удовлетворять необходимым условиям, следует из лемм 3—5. Лемма доказана.

Отметим, что подгруппа, порожденная в группе G элементами x_n, y_n, z_n $(n\in N)$, в терминах данных порождающих задается определяющими соотношениями: $[x_k, y_s]=1$ и $[y_s, z_n]=1$, если для некоторого t имеем $f_\gamma(s)=c^3(n, t, k)$. Отсюда следует

Лемма 12. *Для данных k и n существует s такое, что $[x_k, y_s] = 1$ и $[y_s, z_n] = 1$, в том и только том случае, если $k \in \gamma(n)$.*

Лемма 13. *Если ν — конструктивизация группы G_γ, то существует однозначная вычислимая нумерация γ' семейства S такая, что ν и $\nu_{\gamma'}$ автоэквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим функции σ_x, σ_y, σ_z, σ_u, σ_v и перестановки p, q, построенные в лемме 11. Определим семейство рекурсивно перечислимых множеств S' и его вычислимую нумерацию γ', полагая

$$\gamma'(n) = \{k \mid \exists s([\nu(\sigma_x(k)), \nu(\sigma_y(s))] = 1 \,\&\, [\nu(\sigma_y(s)), \nu(\sigma_z(n))] = 1)\},$$
$$S' = \{\gamma'(n) \mid n \in N\}.$$

Напомним, что $\nu(\sigma_x(k)) \equiv x_k$, $\nu(\sigma_y(s)) \equiv y_{p(s)}$, $\nu(\sigma_z(n)) \equiv z_{q(n)} \bmod G'$. Поэтому $\gamma'(n) = \{k \mid \exists s([x_k, y_{p(s)}] = 1 \,\&\, [y_{p(s)}, z_{q(n)}] = 1)\}$. Так как p и q — перестановки множества N, то из леммы 12 непосредственно получаем, что $\gamma'(n) = \gamma(q(n))$. Но тогда $S' = S$ и γ' — вычислимая нумерация семейства S. Определим по γ' конструктивизацию $\nu_{\gamma'}$ группы $G_{\gamma'}$.

Рассмотрим следующее отображение $M \to G_{\gamma'}$:

$$x_n \to \nu(\sigma_x(n)), \quad y_n \to \nu(\sigma_y(n)), \quad z_n \to \nu(\sigma_z(n)),$$
$$u_n \to \nu(\sigma_u(n)), \quad v_n \to \nu(\sigma_v(n)) \qquad (n \in N),$$
$$m \to m \text{ для остальных элементов } m \in M.$$

Очевидно, что это отображение определяет изоморфизм ψ: $G_\gamma \to C_{\gamma'}$. Из рекурсивности функций σ_x, σ_y, σ_z, σ_u, σ_v следует, что существует рекурсивная функция ξ такая, что $\psi(\nu_{\gamma'}(n)) = \nu(\xi(n))$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть конструктивные группы $(G_{\gamma_1}, \nu_{\gamma_1})$ и $(G_{\gamma_2}, \nu_{\gamma_2})$ рекурсивно изоморфны. Тогда γ_1 и γ_2 — эквивалентные нумерации.*

Доказательство. Пусть ψ — рекурсивный изоморфизм первой группы во вторую и ξ — рекурсивная функция такие, что $\psi\nu_{\gamma_1} = \nu_{\gamma_2}\xi$. По лемме 3 подгруппы A, B, C, D, X_0, X, Y, Z, U, V характеристичны в G. Отсюда $\psi(m) \equiv m^{\pm 1} \bmod G'$, где $m \in \{a, b, c, d, x_0\}$. Предположим по индукции, что $\psi(x_n) \equiv x_n^{\pm 1} \bmod G'$. Тогда из соотношений группы G имеем $[x_n, a] \equiv [\psi(x_{n+1})^{\pm 1}, b]$. Ввиду леммы 4 получаем $\psi(x_{n+1}) \equiv x_{n+1}^{\pm 1} \bmod G'$.

Так как $\psi(z_n) \in ZG'$, $\psi(v_n) \in VG'$ и $[\psi(z_n), \psi(v_n)] = 1$, то в силу леммы 5 $\psi(z_n) \equiv z_{q(n)}^{\pm 1}$, $\psi(v_n) \equiv v_{q(n)}^{\pm 1} \bmod G'$ для некоторой перестановки q множества N. Из рекурсивности изоморфизма ψ следует рекурсивность перестановки q. Поскольку $\gamma_2(n) = \gamma_1(q(n))$, то γ_1 и γ_2 — эквивалентные нумерации. Лемма доказана.

Замечание. Если в определение группы G добавить соотношения $m^p = 1$, где p — простое число и $m \in M$, то получим группу из класса $\mathscr{K}_p$ (см. п. 1.5), для которой также имеют место основные леммы 7—9, 13, 14.

Теорема. *Для любого n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$ в классах $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_p$ существуют группы алгоритмической размерности n.*

Действительно, рассмотрим семейство рекурсивно перечислимых множеств S_n, имеющее точно n неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций. Такие семейства построены в [1, 2]. По этому семейству в соответствующем классе построим группу G, которая будет искомой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С.* Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 251, № 2.— С. 271—274.
2. *Гончаров С. С.* Однозначные вычислимые нумерации // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 507—551.
3. *Гончаров С. С.* Группы с конечным числом конструктивизаций // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 256, № 2.— С. 269—272.

4. *Гончаров С. С.* Предельно эквивалентные конструктивизации // Математическая логика и теория алгоритмов: Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1982.— Т. 2.
5. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 146, № 5.— С. 1009—1012.
6. *Lin C.* Recursively presented Abelian groups: effective p-group theory. I // J. Symbolic Logic.— 1981.— V. 46, N 3.— P. 617—624.
7. *La Roche.* Recursively presented Boolean algebras // NAMS.— 1978.— V. 24, N 46.— P. 552.
8. *Manaster A., Remmel J. B.* Recursively categorical decidable dense two dimensional partial orderings // Aspects of effective algebra: Proc. of a Conference at Menash University, Australia, 1—4 August.— 1979.
9. *Remmel G. B.* Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras // J. Symbolic Logic.— 1981.— V. 46, N 3.— P. 572—594.
10. *Remmel J. B.* Recursively categorical linear orderings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 83, N 2.— P. 387—391.
11. *Smith R. L.* Iwo theorems on autostability in p-groups // Lect. Notes in Math.— Berlin etc.: Springer-Verl., 1981.— V. 859.— P. 302—311.
12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М.: Наука, 1977.
13. *Нейман Х.* Многообразия групп.— М.: Мир, 1969.
14. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели.— М.: Наука, 1980.
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1969.

г. Новосибирск

Статья поступила
15 октября 1986 г.