НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАММА-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*

М. О. Воронцов[1], *А. А. Кудрявцев*[2], *О. В. Шестаков*[3]

Аннотация: В настоящее время большое внимание исследователей уделяется обобщениям известных математических объектов с целью получения адекватных моделей, описывающих реальные явления. Большую роль в прикладной теории вероятностей и математической статистике играет гамма-класс распределений, зарекомендовавший себя удобным и эффективным инструментом при моделировании многих реальных процессов. Гамма-класс довольно широк и включает распределения, обладающие такими полезными свойствами, как, например, безграничная делимость и устойчивость, что позволяет использовать распределения из этого класса в качестве асимптотических аппроксимаций в различных предельных теоремах. Одной из важнейших задач прикладной статистики является получение оценок параметров модельного распределения из имеющихся реальных данных. В работе рассматривается гамма-экспоненциальное распределение, представляющее собой обобщение распределений из гамма-класса. Приводятся оценки и асимптотические доверительные интервалы для некоторых параметров этого распределения. Обсуждается вопрос компьютерного моделирования реализаций выборок из гамма-экспоненциального распределения и численного оценивания параметров по выборке. Результаты работы могут найти широкое применение при изучении вероятностных моделей, основанных на непрерывных распределениях с неограниченным неотрицательным носителем.

Ключевые слова: компьютерное моделирование; оценивание параметров; гамма-экспоненциальное распределение; смешанные распределения; обобщенное гамма-распределение

DOI: 10.14357/08696527210302

---

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 20–07–00655); исследования проводились в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, m.vtsov@mail.ru

[2]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, nubigena@mail.ru

[3]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, oshestakov@cs.msu.su

1 Введение

Проблема оценивания неизвестных параметров играет традиционно важную роль в задачах прикладной математической статистики. При этом с целью повышения согласованности математических моделей и анализируемых реальных процессов исследователи рассматривают все более сложные математические абстракции. Применительно к моделям, описывающим реальные явления при помощи непрерывных распределений, имеющих неограниченные неотрицательные носители, традиционно используются частные случаи обобщенного гамма-распределения и обобщенного бета-распределения второго рода. В работе рассматривается задача оценивания параметров предложенного в [1] распределения, тесно связанного с перечисленными популярными распределениями.

Определение 1. Будем говорить, что случайная величина ζ имеет гамма-экспоненциальное распределение $\mathrm{GE}\,(r,\nu,s,t,\delta)$ с параметрами изгиба $0 \le r < 1$, формы $\nu \neq 0$, концентрации $s,t > 0$ и масштаба $\delta > 0$, если ее плотность при $x > 0$ задается соотношением

$$g_E(x) = \frac{|\nu| x^{t\nu-1}}{\delta^{t\nu}\Gamma(s)\Gamma(t)}\, \mathsf{Ge}_{r,\,tr+s}\left(-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\nu}\right), \tag{1}$$

где $E = (r,\nu,s,t,\delta)$; $\mathsf{Ge}_{\alpha,\,\beta}(x)$ — гамма-экспоненциальная функция [2]:

$$\mathsf{Ge}_{\alpha,\,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\Gamma(\alpha k+\beta), \;\; x \in \mathbb{R}\,, \;\; 0 \le \alpha < 1\,, \;\; \beta > 0\,. \tag{2}$$

Функция (2) обобщает на случай $\beta \neq 1$ преобразование, введенное Э. Леруа [3] для исследования производящих функций специального вида. Кроме того, функцию (2) можно рассматривать (при некоторых допущениях) как частный случай функции Сривастава–Томовски [4], обобщающей функцию Миттаг-Леффлера [5].

В работе было показано, что распределение (1) адекватно описывает байесовские модели баланса [6]. Это прежде всего вызвано тем, что распределение с плотностью (1) может быть представлено [1] как масштабная смесь двух случайных величин, имеющих обобщенное гамма-распределение [1].

В свою очередь, обобщенное гамма-распределение $\mathrm{GG}\,(v,q,\theta)$ с плотностью

$$f(x) = \frac{|v| x^{vq-1} e^{-(x/\theta)^v}}{\theta^{vq}\Gamma(q)}\,, \;\; v \neq 0\,, \;\; q > 0\,, \;\; \theta > 0\,, \;\; x > 0\,, \tag{3}$$

предложенное в 1925 г. итальянским экономистом Л. Аморозо для изучения экономической теории динамического равновесия [7], активно применяемое в гидрологии начиная с 1940-х гг. С. Н. Крицким и М. Ф. Менкелем [8, 9], но зачастую ассоциирующееся с именем Е. Стэйси, рассмотревшего в 1962 г. частный случай распределения Аморозо [10], доказало свою состоятельность во многих прикладных задачах, использующих для моделирования непрерывные распределения с неограниченным неотрицательным носителем. Еще во второй половине XIX в. распределение Рэлея использовалось для описания результирующей амплитуды в задаче суммирования колебаний со случайными фазами, а распределение Максвелла–Больцмана — для статистического описания поведения параметров частиц идеального газа. Класс распределений (3) достаточно широк и включает кроме перечисленных экспоненциальное распределение; χ^2-распределение; распределение Эрланга; гамма-распределение; полунормальное распределение, или распределение максимума процесса броуновского движения; χ-распределение; m-распределение Накагами; распределение Вильсона–Хильферти; распределение Вейбулла–Гнеденко и многие другие, включая масштабированные и обратные аналоги перечисленных.

Использование обобщенного гамма-распределения (3) и его частных видов и смесей для описания различных моделей наряду с решением проблемы оценивания его параметров имеет богатую историю и до сих пор актуально. Например, в [11–14] предлагается использовать распределения из гамма-класса в задачах обработки радиолокационных сигналов и изображений, для исследования прочности материалов и надежности оборудования, для оценки концентрации вредных газов в промышленных зонах, а также изучения периода ремиссии онкологических больных. Можно привести ряд других примеров. Гамма-экспоненциальное распределение, рассматриваемое в статье, обобщает распределение Аморозо. Поэтому можно утверждать, что результаты статьи будут востребованы при изучении различных моделей, описывающих реальные процессы с помощью распределений с неотрицательным неограниченным носителем.

В работе [1] было показано, что гамма-экспоненциальное распределение обладает следующими свойствами.

Лемма 1. 1. *Пусть независимые случайные величины* λ *и* μ *имеют соответственно распределения* $\mathrm{GG}\,(v,q,\theta)$ *и* $\mathrm{GG}\,(u,p,\alpha)$, $uv>0$. *Тогда распределение* λ *совпадает с* $\mathrm{GE}\,(0,v,\cdot,q,\theta)$*; распределение* λ/μ *при* $|u|>|v|$ *совпадает с* $\mathrm{GE}\,(v/u,v,p,q,\theta/\alpha)$*; распределение* λ/μ *при* $|v|>|u|$ *совпадает с* $\mathrm{GE}\,(u/v,-u,q,p,\theta/\alpha)$.

2. *При* $0<r<1$ *плотность* $g_E(x)$, $E=(r,\nu,s,t,\delta)$, *совпадает с плотностью отношения независимых случайных величин, имеющих обобщенные гамма-распределения* $\mathrm{GG}\,(\nu,t,\delta)$ *и* $\mathrm{GG}\,(\nu/r,s,1)$.

Возможность представления гамма-экспоненциального распределения как частного случайных величин, имеющих обобщенное гамма-распределение, позволяет применять его в широком круге прикладных задач. Так, в демографии уровень младенческой смертности определяется как отношение числа умерших в возрасте до года к числу родившихся за некоторый период времени [15], а индекс разводимости — как отношение коэффициента суммарной разводимости к коэффициенту суммарной брачности [16]; в физике коэффициент трансформации — это отношение выходного напряжения к входному, а универсальная функция Кирхгофа — отношение излучательной способности тела к поглощательной [17]; в теории массового обслуживания отношение интенсивности входящего потока к интенсивности обслуживания определяет коэффициент загрузки системы [18]; при моделировании чрезвычайных ситуаций пожароопасность объекта определяется отношением угрозы возникновения пожара к фактору пожарозащиты [19]; в теории надежности ожидаемое время безотказной работы представимо в виде отношения среднего времени безотказной работы к среднему времени восстановления [20]. Ряд примеров можно продолжить. Каждую из таких характеристик можно рассматривать как индекс баланса системы [6]. Применение рандомизационного байесовского подхода к описанным моделям дает возможность изучать характеристики индекса баланса как масштабной смеси вероятностных законов.

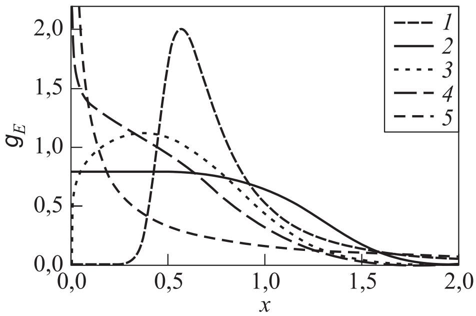

Рис. 1 Плотности гамма-экспоненциального распределения при различных значениях параметров: *1* — $E = (0{,}7; -6; 1{,}5; 0{,}4; 0{,}5)$; *2* — $E = (0{,}2; 5; 2; 0{,}2; 1{,}4)$; *3* — $E = (0{,}4; 3; 2; 0{,}4; 1)$; *4* — $E = (0{,}4; 2{,}7; 2; 0{,}33; 1)$; *5* — $E = (0{,}7; 0{,}4; 1{,}5; 2; 0{,}2)$

Помимо перечисленных свойств пятипараметрическое гамма-экспоненциальное распределение может применяться для моделирования широкого круга реальных явлений ввиду большого разнообразия его возможных плотностей (рис. 1).

На практике исследователь имеет дело с наблюдаемыми величинами, отражающими проявление анализируемого реального процесса, в отношении которых делаются некоторые модельные предположения о виде их распределения. В случае моделирования реального процесса при помощи гамма-экспоненциального распределения неизбежно возникает вопрос оценивания неизвестных параметров по реальным данным. Ввиду представления плотности $g_E(x)$ в терминах специальной гамма-экспоненциальной функции (2) метод максимального правдоподобия представляется затруднительным. То же можно сказать и о прямом методе моментов. По этой причине в работах [21, 22] было предложено оценивать параметры гамма-экспоненциального распределения при помощи модифицированного метода, основанного на логарифмических моментах.

В статье обсуждаются вычислительные аспекты построения реализаций выборок из гамма-экспоненциального распределения и нюансы численного оценивания неизвестных параметров.

2 Оценки параметров гамма-экспоненциального распределения

Приведем известные оценки параметров гамма-экспоненциального распределения. Для этого введем в рассмотрение дигамма-функцию $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ и функции

$$R(x) = \sqrt{\frac{\nu^2 x - \psi'(t)}{\psi'(s)}}; \tag{4}$$

$$D_r(x, y) = \exp\left\{x - \frac{\psi(t)}{\nu} + \frac{\psi(s)}{\nu}\sqrt{\frac{\nu^2 y - \psi'(t)}{\psi'(s)}}\right\};$$

$$V(x) = \sqrt[3]{\frac{\psi''(t) - r^3\psi''(s)}{x}}; \tag{5}$$

$$D_\nu(x, y) = \exp\left\{x - (\psi(t) - r\psi(s))\sqrt[3]{\frac{y}{\psi''(t) - r^3\psi''(s)}}\right\}.$$

Введем обозначение для выборочных логарифмических моментов случайной величины ζ:

$$L_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln^k X_i\,,$$

где $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения ζ.

В работе [21] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 2. *При фиксированных параметрах ν, t и s распределения* $\mathrm{GE}\,(r, \nu, s, t, \delta)$ *оценки*

$$\hat{r}(X) = R\left(L_2(X) - L_1^2(X)\right); \tag{6}$$

$$\hat{\delta}_r(X) = D_r\left(L_1(X), L_2(X) - L_1^2(X)\right) \tag{7}$$

параметров r и δ обладают свойством сильной состоятельности.

Лемма 3. *При фиксированных параметрах r, t и s распределения* $\mathrm{GE}\,(r, \nu, s, t, \delta)$ *оценки*

$$\hat{\nu}(X) = V\left(L_3(X) - 3L_1(X)L_2(X) + 2L_1^3(X)\right); \tag{8}$$

$$\hat{\delta}_\nu(X) = D_\nu\left(L_1(X), L_3(X) - 3L_1(X)L_2(X) + 2L_1^3(X)\right) \tag{9}$$

параметров ν и δ обладают свойством сильной состоятельности.

Основываясь на приведенных оценках и их асимптотической нормальности [22], можно построить асимптотические доверительные интервалы для оценок (6)–(9) [22]. Для этого понадобятся следующие обозначения производных функций (4) и (5):

$$R_1(x) \equiv \frac{dR}{dx}(x) = \frac{\nu^2}{2\psi'(s)}\sqrt{\frac{\psi'(s)}{\nu^2 x - \psi'(t)}}\,; \tag{10}$$

$$V_1(x) \equiv \frac{dV}{dx}(x) = -\frac{\psi''(t) - r^3\psi''(s)}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(\psi''(t) - r^3\psi''(s))^2}}\,. \tag{11}$$

В дальнейших рассуждениях понадобятся некоторые моментные характеристики гамма-экспоненциального распределения (1), получаемые путем дифференцирования характеристической функции логарифма случайной величины ζ, имеющей гамма-экспоненциальное распределение (подробнее см. [21, 22]). При фиксированных параметрах t и s получаем:

$$\sigma_1^2(r,\nu) \equiv \mathsf{D}\ln\zeta = \frac{\psi'(t) + r^2\psi'(s)}{\nu^2};$$

$$\begin{aligned}\sigma_2^2(r,\nu,\delta) \equiv \mathsf{D}\ln^2\zeta = {}& \frac{4(\psi'(t) + r^2\psi'(s))[\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]^2}{\nu^4} + \\ &+ \frac{4(\psi''(t) - r^3\psi''(s))[\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]}{\nu^4} + \\ &+ \frac{2(\psi'(t) + r^2\psi'(s))^2}{\nu^4} + \frac{\psi'''(t) + r^4\psi'''(s)}{\nu^4};\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3^2(r,\nu,\delta) \equiv \mathsf{D}\ln^3\zeta = {}& \frac{9\left(\psi'(t) + r^2\psi'(s)\right)[\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]^4}{\nu^6} + \\ &+ \frac{18\left[\psi''(t) - r^3\psi''(s)\right][\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]^3}{\nu^6} + \\ &+ \frac{36\left[\psi'(t) + r^2\psi'(s)\right]^2[\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]^2}{\nu^6} + \\ &+ \frac{15\left[\psi'''(t) + r^4\psi'''(s)\right][\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]^2}{\nu^6} + \\ &+ \frac{34\left[\psi''(t) - r^3\psi''(s)\right]\left[\psi'(t) + r^2\psi'(s)\right][\nu\ln\delta + \psi(t) - r\psi(s)]}{\nu^6} +\end{aligned}$$

$$+\frac{6\left[\psi^{(4)}(t)-r^5\psi^{(4)}(s)\right][\nu\ln\delta+\psi(t)-r\psi(s)]}{\nu^6}+$$
$$+\frac{15\left[\psi'(t)+r^2\psi'(s)\right]^3}{\nu^6}+\frac{9\left[\psi''(t)-r^3\psi''(s)\right]^2}{\nu^6}+$$
$$+\frac{15\left[\psi'''(t)+r^4\psi'''(s)\right]\left[\psi'(t)+r^2\psi'(s)\right]}{\nu^6}+\frac{\left[\psi^{(5)}(t)+r^6\psi^{(5)}(s)\right]}{\nu^6}. \quad (13)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$\sigma_{12}(r,\nu)=\frac{\psi''(t)-r^3\psi''(s)}{\nu^3};$$
$$s_{12}(r,\nu,\delta)=\frac{\psi'''(t)+r^4\psi'''(s)}{\nu^4};$$
$$s_1^2(r,\nu,\delta)=\delta^2\sigma_1^2(r,\nu)+\frac{\nu\delta^2\psi(s)\sigma_{12}(r,\nu)}{r\psi'(s)}+\frac{\nu^2\delta^2\psi^2(s)\sigma_2^2(r,\nu,\delta)}{4r^2(\psi'(s))^2}; \quad (14)$$
$$s_2^2(r,\nu,\delta)=\delta^2\sigma_1^2(r,\nu)-\frac{2\nu^2\delta^2(\psi(t)-r\psi(s))s_{12}(r,\nu,\delta)}{3(\psi''(t)-r^3\psi''(s))}+$$
$$+\frac{\nu^4\delta^2(\psi(t)-r\psi(s))^2\sigma_3^2(r,\nu,\delta)}{9(\psi''(t)-r^3\psi''(s))^2}. \quad (15)$$

В работе [22] было показано, что доверительные интервалы для неизвестных параметров r, ν и δ имеют следующий вид. Через u_γ будем обозначать квантиль порядка $(1+\gamma)/2$ стандартного нормального распределения.

Лемма 4. *Асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия γ, основанный на оценке* (6) *неизвестного параметра r, имеет вид*:

$$(S_r(X),T_r(X))=\left(\hat r(X)-\frac{u_\gamma}{\sqrt n}A_r(X),\hat r(X)+\frac{u_\gamma}{\sqrt n}A_r(X)\right),$$

где

$$A_r(X)=\sqrt{\left(R_1(L_2(X)-L_1^2(X))\right)^2\sigma_2^2(\hat r(X),\nu,\hat\delta_r(X))},$$

функции R_1 и σ_2^2 задаются соотношениями (10) *и* (12), *а статистики $\hat r(X)$ и $\hat\delta_r(X)$ определены в* (6) *и* (7).

Лемма 5. *Асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия γ, основанный на оценке* (7) *неизвестного параметра δ, имеет вид*:

$$(S_{\delta_r}(X),T_{\delta_r}(X))=\left(\hat\delta_r(X)-\frac{u_\gamma}{\sqrt n}A_{\delta_r}(X),\hat\delta_r(X)+\frac{u_\gamma}{\sqrt n}A_{\delta_r}(X)\right),$$

где

$$A_{\delta_r}(X) = \sqrt{s_1^2(\hat{r}(X), \nu, \hat{\delta}_r(X))}\,,$$

функция s_1^2 *задается соотношением* (14), *а статистики* $\hat{r}(X)$ *и* $\hat{\delta}_r(X)$ *определены в* (6) *и* (7).

Лемма 6. *Асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия* γ, *основанный на оценке* (8) *неизвестного параметра* ν, *имеет вид*:

$$(S_\nu(X), T_\nu(X)) = \left(\hat{\nu}(X) - \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}} A_\nu(X), \hat{\nu}(X) + \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}} A_\nu(X)\right),$$

где

$$A_\nu(X) = \sqrt{\left(V_1(L_3(X) - 3L_1(X)L_2(X) + 2L_1^3(X))\right)^2 \sigma_3^2(r, \hat{\nu}(X), \hat{\delta}_\nu(X))}\,,$$

функции V_1 *и* σ_3^2 *задаются соотношениями* (11) *и* (13), *а статистики* $\hat{\nu}(X)$ *и* $\hat{\delta}_\nu(X)$ *определены в* (8) *и* (9).

Лемма 7. *Асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия* γ, *основанный на оценке* (9) *неизвестного параметра* δ, *имеет вид*:

$$(S_{\delta_\nu}(X), T_{\delta_\nu}(X)) = \left(\hat{\delta}_\nu(X) - \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}} A_{\delta_\nu}(X), \hat{\delta}_\nu(X) + \frac{u_\gamma}{\sqrt{n}} A_{\delta_\nu}(X)\right),$$

где

$$A_{\delta_\nu}(X) = \sqrt{s_2^2(r, \hat{\nu}(X), \hat{\delta}_\nu(X))}\,,$$

функция s_2^2 *задается соотношением* (15), *а статистики* $\hat{\nu}(X)$ *и* $\hat{\delta}_\nu(X)$ *определены в* (8) *и* (9).

3 Алгоритм построения реализаций выборок из гамма-экспоненциального распределения

Используя лемму 1 и хорошо известное равенство для случайной величины λ, имеющей обобщенное гамма-распределение GG (ν, t, δ),

$$\lambda \overset{d}{=} \delta \xi^{1/\nu}\,,$$

где случайная величина ξ имеет гамма-распределение GG $(1, t, 1)$, легко получить аналогичное представление для гамма-экспоненциального распределения.

Лемма 8. *Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие соответственно гамма-распределения* $\mathrm{GG}\,(1,t,1)$ *и* $\mathrm{GG}\,(1,s,1)$, *а случайная величина ζ имеет гамма-экспоненциальное распределение* $\mathrm{GE}\,(r,\nu,s,t,\delta)$. *Тогда*

$$\zeta \stackrel{d}{=} \delta(\xi\eta^{-r})^{1/\nu}\,.$$

Основываясь на лемме 8, можно предложить следующий алгоритм построения выборки $Z_1,\ldots,Z_n$ из гамма-экспоненциального распределения $\mathrm{GE}\,(r,\nu,s,t,\delta)$. На первом этапе (например, с помощью метода выборки с отклонением [23]) строятся независимые выборки $X_1,\ldots,X_n$ и $Y_1,\ldots,Y_n$ соответственно из гамма-распределений $\mathrm{GG}\,(1,t,1)$ и $\mathrm{GG}\,(1,s,1)$. На втором этапе применяется лемма 8 и строятся компоненты

$$Z_k = \delta\left(X_k Y_k^{-r}\right)^{1/\nu}\,.$$

4 Вычисление оценок параметров изгиба, формы и масштаба

При помощи описанного в предыдущем разделе алгоритма реализации выборок и лемм 2 и 3 можно построить гистограммы по выборке из модельного гамма-экспоненциального распределения с известными параметрами и оценить по реализованной выборке пары параметров изгиба–масштаба и формы–масштаба в предположении, что они неизвестны. Гистограммы на рис. 2–4 соответствуют выборке $X=(X_1,\ldots,X_n)$ объема $n=10\,000$ из распределения с параметрами $E=(r,\nu,s,t,\delta)$.

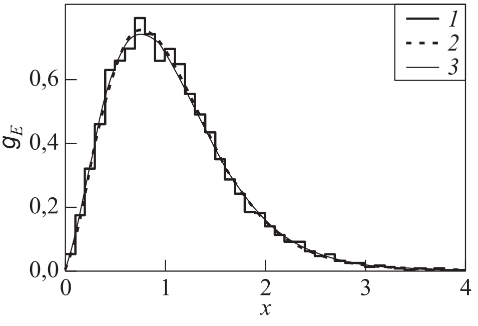

Рис. 2 Иллюстрация вычисления оценок параметров формы и масштаба: *1* — гистограмма; *2* — истинная плотность с $E = (0{,}4; \mathbf{1{,}7}, 1{,}8; 1{,}4; \mathbf{1})$; *3* — оцененная плотность с $E = (0{,}4; \mathbf{1{,}663}; 1{,}8; 1{,}4; \mathbf{0{,}998})$

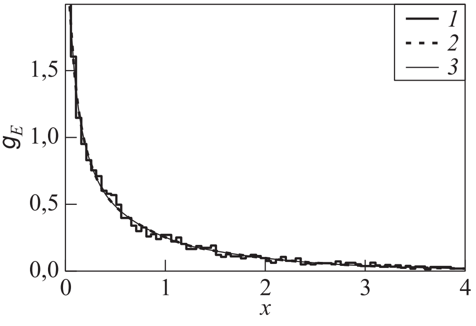

Рис. 3 Иллюстрация вычисления оценок параметров формы и масштаба: *1* — гистограмма; *2* — истинная плотность с $E = (0{,}3; \mathbf{0{,}8}, 3; 0{,}8; \mathbf{1{,}5})$; *3* — оцененная плотность с $E = (0{,}3; \mathbf{0{,}790}; 3; 0{,}8; \mathbf{1{,}486})$

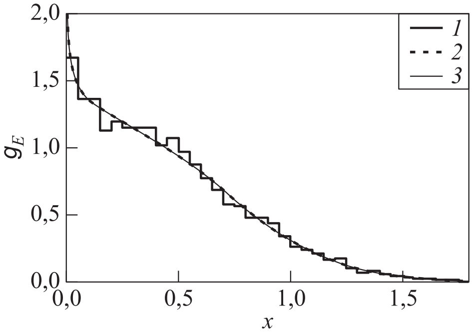

Рис. 4 Иллюстрация вычисления оценок параметров изгиба и масштаба: *1* — гистограмма; *2* — истинная плотность с $E = (\mathbf{0{,}4}; 2{,}7, 2; 0{,}33; \mathbf{1})$; *3* — оцененная плотность с $E = (\mathbf{0{,}458}; 2{,}7; 2; 0{,}33; \mathbf{1{,}012})$

В табл. 1–6 приведены значения оценок из лемм 2 и 3 и асимптотические доверительные интервалы из лемм 4–7; уровень доверия γ равен 95%, объем выборки равен n.

В табл. 7–9 приведено число выборок (из $N = 1000$ выборок) из модельного распределения с различным набором параметров, при оценке которых асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия 95% покрыл истинное значение параметра.

Таблица 1 Оценки параметров r и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}7; 0{,}5; 5{,}2; 3{,}7; 1)$

n	$\hat{r}(X)$	$S_r(X)$	$T_r(X)$	$\hat{\delta}_r(X)$	$S_{\delta_r}(X)$	$T_{\delta_r}(X)$
10^2	0,5832	0,1227	1,0437	0,6637	−0,2579	1,5854
10^3	0,6979	0,5673	0,8285	1,0239	0,6178	1,4300
10^4	0,7367	0,6964	0,7769	1,1130	0,9766	1,2495
10^5	0,6904	0,6772	0,7035	0,9704	0,9317	1,0091

Таблица 2 Оценки параметров ν и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}7; 0{,}5; 5{,}2; 3{,}7; 1)$

n	$\hat{\nu}(X)$	$S_\nu(X)$	$T_\nu(X)$	$\hat{\delta}_\nu(X)$	$S_{\delta_\nu}(X)$	$T_{\delta_\nu}(X)$
10^2	0,4413	−0,0029	0,8857	0,9323	0,6030	1,2615
10^3	0,5164	0,3530	0,6798	1,0359	0,9382	1,1336
10^4	0,5024	0,4521	0,5528	0,9941	0,9634	1,0247
10^5	0,5029	0,4869	0,5188	1,0006	0,9909	1,0103

Таблица 3 Оценки параметров r и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}3; 2{,}3; 1{,}2; 1{,}7; 3{,}5)$

n	$\hat{r}(X)$	$S_r(X)$	$T_r(X)$	$\hat{\delta}_r(X)$	$S_{\delta_r}(X)$	$T_{\delta_r}(X)$
10^2	0,1776	−2,2194	2,5747	3,7180	2,5285	4,9075
10^3	0,2080	−0,4260	0,8422	3,5452	3,2394	3,8509
10^4	0,2905	0,1406	0,4403	3,5084	3,4337	3,5830
10^5	0,3074	0,2621	0,3526	3,4981	3,4755	3,5208

Таблица 4 Оценки параметров ν и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}3; 2{,}3; 1{,}2; 1{,}7; 3{,}5)$

n	$\hat{\nu}(X)$	$S_\nu(X)$	$T_\nu(X)$	$\hat{\delta}_\nu(X)$	$S_{\delta_\nu}(X)$	$T_{\delta_\nu}(X)$
10^2	2,6075	−8,3730	13,5882	3,4872	2,3907	4,5838
10^3	2,2301	−0,0267	4,4871	3,4345	3,1850	3,6840
10^4	2,2634	1,5055	3,0214	3,4936	3,4075	3,5797
10^5	2,2827	2,0376	2,5278	3,4942	3,4665	3,5219

Таблица 5 Оценки параметров r и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}7; -4; 2{,}6; 0{,}4; 0{,}5)$

n	$\hat{r}(X)$	$S_r(X)$	$T_r(X)$	$\hat{\delta}_r(X)$	$S_{\delta_r}(X)$	$T_{\delta_r}(X)$
10^2	0,4900	−8,4680	9,4481	0,5635	−0,3439	1,4710
10^3	0,8747	−0,6446	2,3941	0,4889	0,3604	0,6175
10^4	0,8298	0,3268	1,3328	0,4895	0,4468	0,5322
10^5	0,7949	0,6291	0,9607	0,4923	0,4781	0,5065

Таблица 6 Оценки параметров ν и δ с соответствующими доверительными интервалами, построенные по выборке из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}7; -4; 2{,}6; 0{,}4; 0{,}5)$

n	$\hat{\nu}(X)$	$S_\nu(X)$	$T_\nu(X)$	$\hat{\delta}_\nu(X)$	$S_{\delta_\nu}(X)$	$T_{\delta_\nu}(X)$
10^2	−4,6608	−7,5225	−1,7991	0,6044	0,3666	0,8421
10^3	−4,0980	−4,8447	−3,3512	0,5147	0,4472	0,5822
10^4	−3,9794	−4,2072	−3,7516	0,4995	0,4784	0,5207
10^5	−3,9611	−4,0327	−3,8894	0,4974	0,4907	0,5041

Таблица 7 Число выборок (из $N = 1000$ выборок) из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}3; 2{,}3; 1{,}2; 1{,}7; 3{,}5)$

n	r	δ_r	ν	δ_ν
10^2	1000	991	1000	940
10^3	1000	999	1000	996
10^4	1000	999	1000	999
10^5	1000	1000	1000	1000

Таблица 8 Число выборок (из $N = 1000$ выборок) из модельного распределения с различным набором параметров $E = (0{,}7; 0{,}5; 5{,}2; 3{,}7; 1)$

n	r	δ_r	ν	δ_ν
10^2	957	920	871	839
10^3	957	944	971	945
10^4	935	940	995	976
10^5	949	946	997	965

Таблица 9 Число выборок (из $N = 1000$ выборок) из модельного распределения с набором параметров $E = (0{,}7; -4; 2{,}6; 0{,}4; 0{,}5)$

n	r	δ_r	ν	δ_ν
10^2	725	910	987	981
10^3	772	832	985	981
10^4	901	906	978	986
10^5	967	969	982	985

5 Связь гамма-экспоненциального распределения с обобщенным бета-распределением второго рода

Ранее (например, в работе [24]) отмечалась связь отношения двух независимых случайных величин, имеющих обобщенные гамма-распределения с одинаковыми параметрами формы, с обобщенным бета-распределением второго рода GB2(ν, δ, t, s) [25] с плотностью

$$f_\beta(x) = \frac{|\nu|\,(x/\delta)^{t\nu-1}\,\left(1 + (x/\delta)^{\nu}\right)^{-t-s}}{\delta\,B(s,t)}, \quad x > 0\,, \tag{16}$$

частные случаи которого представляют собой распределение Бурра, или распределение Сингх–Маддала, распределение Дагума, распределение Ломакса, F-распределение Фишера–Снедекора и др. Представление гамма-экспоненциального распределения как масштабной смеси обобщенных гамма-распределений, таким образом, приводит к закономерному вопросу о его асимптотике при $r \to 1$ и связи с обобщенным бета-распределением второго рода.

По аналогии со свойством 19 из [26] можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 9. *Для* $x \le 0,\ t > 0,\ s > 0$ *справедливо равенство*:

$$\lim_{r\to 1} \mathsf{Ge}_{r,\,tr+s}(x) = \frac{\Gamma(t+s)}{(1-x)^{t+s}}\,.$$

Обозначим функцию гамма-экспоненциального распределения с плотностью $g_E(x)$, определенной в (1), через $G_E(x)$, где $E = (r, \nu, s, t, \delta)$. Обозначим функцию обобщенного бета-распределения второго рода с плотностью (16) через $F_\beta(x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При* $r \to 1$ *гамма-экспоненциальное распределение слабо сходится к обобщенному бета-распределению второго рода*:

$$\mathrm{GE}\,(r, \nu, s, t, \delta) \Longrightarrow \mathrm{GB2}\,(\nu, \delta, t, s)\,.$$

Доказательство. Покажем, что $g_E(x) \longrightarrow f_\beta(x)$ для всех действительных x при $r \to 1$. Для $x \le 0$ утверждение очевидно; при $x > 0$, используя лемму 9, имеем:

$$\lim_{r\to 1} g_E(x) = \frac{|\nu| x^{t\nu-1}}{\delta^{t\nu}\Gamma(s)\Gamma(t)} \lim_{r\to 1} \mathsf{Ge}_{r,\,tr+s}(-(x/\delta)^\nu) = \frac{|\nu|\,(x/\delta)^{t\nu-1}}{\delta(1+(x/\delta)^\nu)^{t+s}}\,\frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\,.$$

Используя этот факт и теорему Шеффе [27], получаем (относительно меры Лебега l):

$$\lim_{r\to 1} \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \int\limits_A g_E\, dl - \int\limits_A f\, dl \right| = 0\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to 1} \sup_x |G_E(x) - F_\beta(x)| = 0\,,$$

что доказывает утверждение теоремы.

6 Заключение

Традиционно частные случаи обобщенного гамма-распределения и обобщенного бета-распределения второго рода активно применяются при моделировании всевозможных реальных процессов. Тесная связь гамма-экспоненциального распределения с перечисленными популярными распределениями дает возможность утверждать, что приведенные в статье результаты могут найти широкое применение в исследованиях, использующих для моделирования распределения с неограниченными неотрицательными носителями.

Литература

1. *Кудрявцев А. А.* О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 78–82.
2. *Кудрявцев А. А., Титова А. И.* Гамма-экспоненциальная функция в байесовских моделях массового обслуживания // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 104–108.
3. *Le Roy É.* Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor // Ann. Fac. Sci. Toulouse 2 ser., 1900. Vol. 2. No. 3. P. 317–384.
4. *Srivastava H. M., Tomovski Ž.* Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Appl. Math. Comput., 2009. Vol. 211. P. 198–210.
5. *Gorenlo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler functions, related topics and applications. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. 443 p.
6. *Кудрявцев А. А.* Байесовские модели баланса // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 18–27.
7. *Amoroso L.* Ricerche intorno alla curva dei redditi // Ann. Mat. Pur. Appl., 1925. Vol. 21. P. 123–159.
8. *Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.* О приемах исследования случайных колебаний речного стока // Труды НИУ ГУГМС. Сер. IV, 1946. Вып. 29. С. 3–32.
9. *Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.* Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // Известия АН СССР. Отд. техн. наук, 1948. № 6. С. 15–21.
10. *Stacy E. W.* A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Stat., 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
11. *Gao G., Ouyang K., Luo Y., Liang S., Zhou S.* Scheme of parameter estimation for generalized gamma distribution and its application to ship detection in SAR images // IEEE T. Geosci. Remote, 2017. Vol. 55. No. 3. P. 1812–1832.
12. *Zhou Y., Zhu H.* Image segmentation using a trimmed likelihood estimator in the asymmetric mixture model based on generalized gamma and Gaussian distributions // Math. Probl. Eng., 2018. Vol. 2018. Art. 3468967. 17 p. doi: 10.1155/2018/3468967.
13. *Iriarte Y. A., Varela H., Gómez H. J., Gómez H. W.* A gamma-type distribution with applications // Symmetry, 2020. Vol. 12. Iss. 5. Art. 870. 15 p. doi: 10.3390/sym12050870.
14. *Rivera P. A., Barranco-Chamorro I., Gallardo D. I., Gómez H. W.* Scale mixture of Rayleigh distribution // Mathematics, 2020. Vol. 8. Iss. 10. Art. 1842. 22 p. doi: 10.3390/math8101842.
15. *Борисов В. А.* Демография. — М.: NOTABENE, 2001. 272 с.
16. *Волгин Н. А., Рыбаковский Л. Л., Калмыкова Н. М., Архангельский В. Н., Иванова Е. И., Захарова О. Д., Иванова А. Е., Денисенко М. Б., Тихомиров Н. П., Тихомирова Т. М.* Демография / Под ред. Н. А. Волгина, Л. Л. Рыбаковского. — М.: Логос, 2005. 280 с.
17. *Кузнецов С. И., Рогозин К. И.* Справочник по физике. — Томск: ТПУ, 2012. 224 с.

18. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.
19. *Шаптала В. Г., Радоуцкий В. Ю., Шаптала В. В.* Основы моделирования чрезвычайных ситуаций. — Белгород: БГТУ, 2010. 166 с.
20. *Здоровцов И. А., Королев В. Ю.* Основы теории надежности волоконно-оптических линий передачи железнодорожного транспорта. — М.: МАКС Пресс, 2004. 308 с.
21. *Кудрявцев А. А., Шестаков О. В.* Метод логарифмических моментов для оценивания параметров гамма-экспоненциального распределения // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 49–54.
22. *Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V.* Asymptotically normal estimators for the parameters of the gamma-exponential distribution // Mathematics, 2021. Vol. 9. Iss. 3. Art. 273. 13 p. doi: 10.3390/math9030273.
23. *Devroye L.* Non-uniform random variate generation. — New York, NY, USA: Springer-Verlag. 1986. 843 p.
24. *Кудрявцев А. А.* Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 27–33.
25. *McDonald J. B.* Some generalized functions for the size distribution of income // Econometrica, 1984. Vol. 52. No. 3. P. 647–665.
26. *Воронцов М. О., Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я.* Аналитические свойства и аспекты вычисления гамма-экспоненциальной функции // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 106–116.
27. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер / Пер. с англ. — М.: Наука, 1977. 352 с. (*Billingsley P.* Convergence of probability measures. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1977. 277 p.)

Поступила в редакцию 19.06.21

SOME PROBABILITY-STATISTICAL PROPERTIES OF THE GAMMA-EXPONENTIAL DISTRIBUTION

***M. O. Vorontsov*[1], *A. A. Kudryavtsev*[1], *and O. V. Shestakov*[1,2]**

[1]Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

[2]Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Currently, much attention of researchers is paid to generalizations of well-known mathematical objects in order to obtain adequate models describing real phenomena. An important role in the applied theory of probability and mathematical statistics is played by the gamma class of distributions, which has proven to be a convenient and effective tool for modeling a lot of real processes.

The gamma class is quite wide and includes distributions that have such useful properties as, for example, infinite divisibility and stability, which makes it possible to use distributions from this class as asymptotic approximations in various limit theorems. One of the most important tasks of applied statistics is to obtain estimates of the parameters of the model distribution from the available real data. The paper considers the gamma-exponential distribution which is a generalization of the distributions from the gamma class. Estimates and asymptotic confidence intervals are given for some parameters of this distribution. The problems of computer modeling of sample realizations from the gamma-exponential distribution and the numerical estimation of parameters for the sample are discussed. The results of the work can be widely used in the study of probabilistic models based on continuous distributions with an unbounded nonnegative support.

Keywords: computer modeling; parameter estimation; gamma-exponential distribution; mixed distributions; generalized gamma distribution

DOI: 10.14357/08696527210302

Acknowledgments

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 20-07-00655). The research was conducted in accordance with the program of Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

References

1. Kudryavtsev, A. A. 2019. O predstavlenii gamma-eksponentsial'nogo i obobshchennogo otritsatel'nogo binomial'nogo raspredeleniy [On the representation of gamma-exponential and generalized negative binomial distributions]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):78–82.
2. Kudryavtsev, A. A., and A. I. Titova. 2017. Gamma-eksponentsial'naya funktsiya v bayesovskikh modelyakh massovogo obsluzhivaniya [Gamma-exponential function in Bayesian queuing models]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(4):104–108.
3. Le Roy, É. 1900. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. *Ann. Fac. Sci. Toulouse 2 ser.* 2(3):317–384.
4. Srivastava, H. M., and Ž. Tomovski. 2009. Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Appl. Math. Comput.* 211:198–210.
5. Gorenlo, R., A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin. 2014. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. 443 p.
6. Kudryavtsev, A. A. 2018. Bayesovskie modeli balansa [Bayesian balance models]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(3):18–27.
7. Amoroso, L. 1925. Ricerche intorno alla curva dei redditi. *Ann. Mat. Pur. Appl.* 21:123–159.

8. Kritsky, S. N., and M. F. Menkel. 1946. O priemakh issledovaniya sluchaynykh kolebaniy rechnogo stoka [Methods of investigation of random fluctuations of river flow]. *Trudy NIU GUGMS Ser. IV* [GUGMS Research Institutions Proceedings, Ser. IV] 29:3–32.
9. Kritsky, S. N., and M. F. Menkel. 1948. Vybor krivykh raspredeleniya veroyatnostey dlya raschetov rechnogo stoka [Selection of probability distribution curves for river flow calculations]. *Izvestiya AN SSSR. Otd. tekhn. nauk* [Herald of the Russian Academy of Sciences. Technical Sciences] 6:15–21.
10. Stacy, E. W. 1962. A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Stat.* 33:1187–1192.
11. Gao, G., K. Ouyang, Y. Luo, S. Liang, and S. Zhou. 2017. Scheme of parameter estimation for generalized gamma distribution and its application to ship detection in SAR images. *IEEE T. Geosci. Remote* 55(3):1812–1832.
12. Zhou, Y., and H. Zhu. 2018. Image segmentation using a trimmed likelihood estimator in the asymmetric mixture model based on generalized gamma and Gaussian distributions. *Math. Probl. Eng.* 2018:3468967. 17 p. doi: 10.1155/2018/3468967.
13. Iriarte, Y. A., H. Varela, H. J. Gómez, and H. W. Gómez. 2020. A gamma-type distribution with applications. *Symmetry* 12(5):870. 15 p. doi: 10.3390/sym12050870.
14. Rivera, P. A., I. Barranco-Chamorro, D. I. Gallardo, and H. W. Gómez. 2020. Scale mixture of Rayleigh distribution. *Mathematics* 8(10):1842. 22 p. doi: 10.3390/math8101842.
15. Borisov, V. A. 2001. *Demografiya* [Demography]. Moscow: NOTABENE. 272 p.
16. Volgin, N. A., L. L. Rybakovskiy, N. M. Kalmykova, V. N. Arkhangel'skiy, E. I. Ivanova, O. D. Zakharova, A. E. Ivanova, M. B. Denisenko, N. P. Tikhomirov, and T. M. Tikhomirova. 2005. *Demografiya* [Demography]. Eds. N. A. Volgin and L. L. Rybakovskiy. Moscow: Logos. 280 p.
17. Kuznetsov, S. I., and K. I. Rogozin. 2012. *Spravochnik po fizike* [Handbook of physics]. Tomsk: TPU. 224 p.
18. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 1995. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: RUDN. 529 p.
19. Shaptala, V. G., V. Yu. Radoutskiy, and V. V. Shaptala. 2010. *Osnovy modelirovaniya chrezvychaynykh situatsiy* [Basics of modeling of emergency situations]. Belgorod: BGTU. 166 p.
20. Zdorovtsov, I. A., and V. Yu. Korolev. 2004. *Osnovy teorii nadezhnosti volokonno-opticheskikh liniy peredachi zheleznodorozhnogo transporta* [Fundamentals of reliability theory of fiber optic transmission lines for railway transport]. Moscow: MAKS Press. 308 p.
21. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2020. Metod logarifmicheskikh momentov dlya otsenivaniya parametrov gamma-eksponentsial'nogo raspredeleniya [Method of logarithmic moments for estimating the gamma-exponential distribution parameters]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):49–54.
22. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2021. Asymptotically normal estimators for the parameters of the gamma-exponential distribution. *Mathematics* 9(3):273. 13 p. doi: 10.3390/math9030273.
23. Devroye, L. 1986. *Non-uniform random variate generation*. New York, NY: Springer-Verlag. 843 p.

24. Kudryavtsev, A. A. 2019. Apriornoe obobshchennoe gamma-raspredelenie v bayesovskikh modelyakh balansa [*A priori* generalized gamma distribution in Bayesian balance models]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(3):27–33.
25. McDonald, J. B. 1984. Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica* 52(3):647–665.
26. Vorontsov, M. O., A. A. Kudryavtsev, and S. Ya. Shorgin. 2021. Analiticheskie svoystva i aspekty vychisleniya gamma-eksponentsial'noy funktsii [Analytical properties and aspects of computation of the gamma-exponential function]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(2):106–116.
27. Billingsley, P. 1977. *Convergence of probability measures*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc. 277 p.

Received June 19, 2021

Contributors

Vorontsov Mikhail O. (b. 1996) — student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; m.vtsov@mail.ru

Kudryavtsev Alexey A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; nubigena@mail.ru

Shestakov Oleg V. (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su