В. С. Серов, Сходимость спектральных разложений в обобщенных классах Бесова, *Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 6, 845–850

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Т. 26, № 6 (1979)

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ БЕСОВА

В. С. Серов

Пусть G — произвольная область в N-мерном пространстве и $A(x, D)$ — эллиптический дифференциальный оператор порядка m с коэффициентами из $C^\infty(G)$. Предположим, что $A(x, D)$ формально положителен и формально самосопряжен, т. е. для любых функций u и v из $C_0^\infty(G)$ выполняются соотношения

$$(Au, u) \geqslant c_0(u, u), \quad (Au, v) = (u, Av),$$

где скалярное произведение берется в $L_2(G)$, а константа $c_0 > 0$. Тогда по теореме Фридрихса у оператора A существует самосопряженное положительно-определенное расширение $\hat{A} \geqslant c_0 I$. Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы, соответствующее расширению $\hat{A}$. Согласно теореме Л. Гординга (см. [1]) спектральное разложение любой функции f из $L_2(G)$ имеет вид

$$(E_\lambda f)(x) = \int_G \Theta(x, y, \lambda) f(y)\,dy, \tag{1}$$

где $\Theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора $\hat{A}$.

В работе В. А. Ильина [2] изучался вопрос о разложимости функций, обладающих заданной особенностью, в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа. При этом доказана условная сходимость соответствующих рядов.

В работе Я. Петре [3] доказана абсолютная и равномерная на компакте сходимость спектральных разложений

(1) в классе функций, эквивалентных классу Бесова $B_{2,1}^{N/2}(G)$.

В работах автора [4], [5] показано, что спектральные разложения (1) для функций из обобщенных классов Бесова $\mathring{B}_{2,\theta}^{N/2,v}(G)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ сходятся в каждой точке области G и, более того, равномерно и абсолютно на каждом компакте из G, если слабоколеблющаяся функция $v(t)$ удовлетворяет условию

$$\left(\int_{c_0}^{\infty}(v^{\theta'}(t)/t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/\theta'} < \infty, \tag{2}$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

В этих же работах доказано, что в случае нарушения условия (2) существует функция из класса $B_{2,\theta}^{N/2,v}(G)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, с компактным носителем, у которой спектральные разложения (1) расходятся абсолютно в любой наперед заданной точке x_0 из области G. При этом фактически доказана просто расходимость спектральных разложений в точке x_0.

В данной работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть слабоколеблющаяся функция* $v(t)$ *непрерывно дифференцируема при* $t \geqslant 0$, *и кроме того* $v(t)$ *монотонно стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Если $1 < \theta \leqslant \infty$ *и нарушено условие* (2), *тогда для каждой точки* x_0 *из* G *существует функция* $f(x)$ *из класса* $B_{2,\theta}^{N/2,v}(G)$ *с компактным носителем, у которой спектральные разложения* (1) *сходятся в каждой точке области* G, *но расходятся абсолютно в точке* x_0.

Замечание. Следует отметить, что условию теоремы удовлетворяют слабоколеблющиеся функции $v(t)$, которые ведут себя при больших t как $(\ln t)^{-\beta_1}$, $(\ln t)^{-\beta_2}\cdot$ $\cdot(\ln\ln t)^{-\beta_3}$ и так далее, если положительные числа β_j выбраны таким образом, что нарушается условие (2).

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, которая определяется следующим соотношением:

$$\alpha(t) = \left(\int_{b}^{t} v^{\theta'}(s)/s\,\mathrm{d}s\right)^{-\gamma}, \tag{3}$$

где $c_0 > b > 0$, $1/\theta + 1/\theta' = 1$, $1 < \theta < \infty$, $1/\theta < \gamma < 1$. Далее, рассмотрим функцию $v_1(t) = \alpha(t)\,v^{\theta'}(t)$, причем при $\theta = \infty$ положим $\alpha(t) \equiv 1$. Легко показать (см. [5]), что, во-первых, $v_1(t)$ — слабоколеблющаяся функция и во-вторых, при нарушении условия (2) будет расходиться интеграл

$$\int_{c_0}^{\infty} v_1(t)/t\,\mathrm{d}t = +\infty. \tag{4}$$

Кроме того, из соотношения (3) и монотонности $v(t)$ следует, что $v_1(t)$ стремится монотонно к 0, при $t \to +\infty$.

Далее фиксируем произвольную точку x_0 из области G и рассмотрим функцию, спектральное представление которой имеет следующий вид:

$$f(x) = \int_{c_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda^{\beta/m})\,v_1(\lambda^{1/m})}{\lambda^{N/m}}\,\mathrm{d}\Theta(x, x_0, \lambda), \tag{5}$$

где $0 < \beta < 1$. Сделав замену переменных $\lambda^{1/m} = \mu$, получим

$$f(x) = \int_{c_0'}^{\infty} \frac{\sin(\mu^{\beta})\,v_1(\mu)}{\mu^{N}}\,\mathrm{d}\Theta^*(x, x_0, \mu), \tag{6}$$

где $\Theta^*(x, x_0, \mu) = \Theta(x, x_0, \mu^m)$.

Будем исследовать сходимость интеграла (4) в каждой точке x области G. Интегрируя по частям, его можно представить в виде суммы следующих четырех величин:

$$\left.\frac{\sin(\lambda^{\beta})\,v_1(\lambda)\,\Theta^*(x, x_0, \lambda)}{\lambda^{N}}\right|_{c_0'}^{\infty}, \tag{7}$$

$$\int_{c_0'}^{\infty} \frac{\sin(\lambda^{\beta})v_1'(\lambda)\,\Theta^*(x, x_0, \lambda)}{\lambda^{N}}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{8}$$

$$\int_{c_0'}^{\infty} \frac{\sin(\lambda^{\beta})\,v_1(\lambda)\,\Theta^*(x, x_0, \lambda)}{\lambda^{N+1}}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{9}$$

$$\int_{c_0'}^{\infty} \frac{\cos(\lambda^{\beta})\,v_1(\lambda)\,\Theta^*(x, x_0, \lambda)}{\lambda^{N+1-\beta}}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{10}$$

Для изучения сходимости величин (7) — (10) нам понадобятся следующие оценки спектральной функции (см. [6]):

$$\Theta(x, x_0, \lambda) = O(\lambda^{(N-1)/m}), \tag{11}$$

равномерно вне любой фиксированной окрестности точки x_0;

$$\Theta(x_0, x_0, \lambda) = A(x_0)\lambda^{N/m} + O(\lambda^{(N-1)/m}). \tag{12}$$

Кроме этого, нам понадобится следующее соотношение для производной слабоколеблющейся функции $v_1(t)$:

$$v_1'(t) = g(t)v_1(t)/t, \tag{13}$$

где $g(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ и знакоопределена при всех $t > 0$. Последнее следует из монотонности функции $v_1(t)$.

Учитывая оценки (11), (12) и условия на функцию $v_1(t)$, можно утверждать, что величина (7) стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$ не только в каждой точке области G, но и равномерно на любом компакте из G.

Далее, из оценок (11) — (13) и из того, что $0 < \beta < 1$, следует, что в каждой точке $x \neq x_0$ интегралы (8) — (10) сходятся абсолютно. Более того, сходимость раномерная вне любой фиксированной окрестности точки x_0. Тем самым установлено, что соотношение (5) определяет непрерывную в $G \setminus \{x_0\}$ функцию.

Теперь осталось исследовать сходимость интегралов (8) — (10) в точке $x = x_0$. Из оценки (12) следует, что нужно исследовать сходимость следующих интегралов:

$$\int_{c_0}^{\infty} \sin(\lambda^{\beta}) v_1'(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_{c_0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda^{\beta}) v_1(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^{1-\beta}}, \tag{14}$$

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda^{\beta}) v_1(\lambda)\,d\lambda}{\lambda}. \tag{15}$$

Учитывая, что $v_1(\lambda) > 0$ для всех $\lambda > 0$ и тот факт, что $\int_1^{\infty} \frac{\sin t\,dt}{t}$ сходится, мы можем утверждать, что интеграл (15) сходится.

Если второй интеграл в (14) взять по частям, то легко видеть, что для его сходимости достаточно изучить сходимость первого интеграла в (14). Учитывая соотношение (13), первый интеграл в (14) перепишется в виде

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda^{\beta}) g(\lambda) v_1(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda. \tag{16}$$

Так как $g(\lambda)$ знакоопределена и стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$, то сходимость интеграла (16) непосредственно следует из сходимости интеграла (15).

Таким обазом, доказано, что спектральные разложения функции, определяемой соотношением (5), сходятся в каждой точке области G.

Осталось доказать абсолютную расходимость спектральных разложений (1) функции (5) в точке x_0. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{v_1(\lambda^{1/m})}{\lambda^{N/m}} \, d\Theta(x, x_0, \lambda). \tag{17}$$

Из работы Ш. А. Алимова [7] и работы автора [8] следует, что эта функция принадлежит классу Никольского $H_2^{N/2, v_1}(G)$. Соотношение (3) позволяет утверждать (см. [2], [5]), что эта функция принадлежит и классу Бесова $B_{2,\theta}^{N/2, v}(G)$, $1 < \theta \leqslant \infty$. Следовательно, функция (5) также принадлежит классу $B_{2,\theta}^{N/2, v}(G)$. Так как для функции $v_1(t)$ выполняется соотношение (4), то из работы [4] следует, что спектральные разложения функции (17) расходятся абсолютно в точке x_0.

Так как $|\sin t| \geqslant (1 - \cos 2t)/2$, то верно следующее неравенство:

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{|\sin(\lambda^{\beta/m})| \, v_1(\lambda^{1/m})}{\lambda^{N/m}} \, d\Theta(x_0, x_0, \lambda) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \int_{c_0}^{\infty} \frac{v_1(\lambda^{1/m})}{\lambda^{N/m}} \, d\Theta(x_0, x_0, \lambda) -$$
$$- \frac{1}{2} \int_{c_0}^{\infty} \frac{\cos(2\lambda^{\beta/m}) \, v_1(\lambda^{1/m})}{\lambda^{N/m}} \, d\Theta(x_0, x_0, \lambda). \tag{18}$$

Как уже было отмечено, первый интеграл в правой части (18) расходится. Второй же интеграл в правой части (18) сходится, что доказывается таким же образом, как и для интеграла (5) при $x = x_0$. Из этих замечаний и неравенства (18) следует, что спектральные разложения (1) функции (5) расходятся абсолютно в точке x_0. Теорема доказана.

Автор благодарит Ш. А. Алимова за внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 23.II.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гординг Л., Разложения по собственным функциям, связанные с эллиптическими дифференциальными операторами, Математика, **1**, № 3 (1957), 107—116.

[2] Ильин В. А., О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям, Изв. АН СССР. Сер. матем., **22**, № 1 (1958), 49—80.

[3] Peetre J., Absolute convergence of eigen function expansion, Math. Ann., **169**, № 2 (1967), 307—314.

[4] Серов В. С., Абсолютная сходимость рядов Фурье в обобщенных классах Никольского, Дифф. уравнения, **14**, № 3 (1978), 499—503.

[5] Серов В. С., Абсолютная сходимость спектральных разложений в обобщенных классах Бесова, Дифф. уравнения, **15**, № 2 (1979), 293—302.

[6] Хёрмандер Л., О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разложениях, Математика, **12**, № 5 (1968).

[7] Алимов Ш. А., Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций, Дифф. уравнения, **8**, № 9 (1972), 1609—1626.

[8] Серов В. С., Обобщенные ядра дробного порядка, Дифф. уравнения, **12**, № 10 (1976), 1892—1902.