В. Г. Романов, В. Г. Яхно, Об одной линеаризованной постановке задачи определения гиперболического оператора,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 3, 391–400

https://www.mathnet.ru/mzm6432

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В. Г. Романов, В. Г. Яхно

Рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка с $n+1$ пространственной переменной. Исследована одна линеаризированная постановка задачи определения всех коэффициентов, входящих в это уравнение, по некоторым функционалам от его решения. В иной постановке задача определения всех коэффициентов, зависящих только от одной пространственной переменной, входящих в рассматриваемое уравнение, исследовалась ранее А. С. Благовещенским [1]. В [1] было показано, что единственным образом можно определить только некоторые линейные комбинации искомых коэффициентов. В этом смысле постановка задачи настоящей работы эффективнее, так как доказана теорема единственности линеаризированной постановки задачи определения всех коэффициентов, входящих в рассматриваемое уравнение. Настоящая работа продолжает исследования [2], [3].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$[D_t^2 - P(x, z, D)]\, u = f(x - x^0, z, t) \tag{1}$$

с данными Коши

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x - x^0, z), \quad D_t u\,|_{t=0} = \psi(x - x^0, z). \tag{2}$$

Здесь $x \in R^n$, $z \in \mathbf{R}$, $t > 0$, $x^0 \in \mathbf{R}^n$ — параметр; $\varphi(x, z)$, $\psi(x, z)$, $f(x, z, t)$ — заданные вектор-функции размерности 3; $P(x, z, D)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор, представимый в виде

$$P(x, z, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x, z) D^\alpha, \quad D^\alpha = D_x^{\alpha'} D_z^{\alpha_{n+1}},$$

$$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}_+,$$

$$\alpha = (\alpha', \alpha_{n+1}), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1},$$

$$D_x^{\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_z^{\alpha_{n+1}} = \frac{\partial^{\alpha_{n+1}}}{\partial z^{n+1}}.$$

Задача 0. Определить оператор $P(x, z, D)$ для $(x, z) \in \mathbf{R}^{n+1}$, входящий в уравнение (1), если вектор-функции $u(x, z, x^0, t)$, $D_z u(x, z, x^0, t)$ (u — вектор-функция размерности 3, являющаяся решением задачи Коши (1), (2)) известны на многообразии

$$\mathfrak{M} = \{x, z, x^0, t \mid x, x^0 \in \mathbf{R}^n, t > 0, z = z^0\},$$

z^0 — заданная постоянная, $z^0 \in \mathbf{R}$.

В данной работе будет рассмотрена некоторая линеаризованная постановка сформулированной выше задачи 0. Относительно метода линеаризации (см., например, [4, стр. 89—92]).

Пусть $P(x, z, D) = P_0(z, D) + P_1(x, z, D)$, где $P_0(z, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \overset{0}{a}_\alpha(z) D^\alpha$ — заданный равномерно эллиптический оператор, а коэффициенты $\overset{1}{a}_\alpha(x, z)$, $|\alpha| \leqslant 2$ оператора $P_1(x, z, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \overset{1}{a}_\alpha(x, z) D^\alpha$ — неизвестные функции. Обозначим через $u_1(x, z, x^0, t)$ — решение следующей задачи Коши:

$$[D_t^2 - P_0(z, D)]\, u_1 = P_1(x, z, D)\, u_0, \tag{3}$$

$$u_1 |_{t=0} = 0, \quad D_t u_1 |_{t=0} = 0, \tag{4}$$

где $u_0(x - x^0, z, t)$ — решение уравнения

$$[D_t^2 - P_0(z, D)]\, u_0 = f(x - x^0, z, t) \tag{5}$$

с данными Коши

$$u_0 |_{t=0} = \varphi(x - x^0, z), \quad D_t u_0 |_{t=0} = \psi(x - x^0, z). \tag{6}$$

Задача 1. Определить оператор $P_1(x, z, D)$ для $(x, z) \in R^{n+1}$, входящий в уравнение (3), если $u_1(x, z, x^0, t)$, $D_z u_1(x, z, x^0, t)$ (u_1, $D_z u_1$ — вектор-функции размерности 3) известны на многообразии $\mathfrak{M}$, т. е.

$$D_z^{(s-1)} u_1 |_{\mathfrak{M}} = f_s(x, x^0, t), \quad s = 1, 2, \tag{7}$$

где f_1, f_2 — заданные вектор-функции.

В дальнейшем будем предполагать, что

а) функции $a_\alpha^1(x, z)$, $|\alpha| \leqslant 2$, — финитны по x, и $a_\alpha^1 \in C^2(\mathbf{R}^{n+1})$, а функции $a_\alpha^0 \in C^4(\mathbf{R})$, $|\alpha| \leqslant 2$;

б) вектор-функции $\varphi(x, z)$, $\psi(x, z)$, $f(x, z, t)$ ($t > 0$ — фиксированно) — финитны по x, z и $\varphi \in C^5(\mathbf{R}^{n+1})$, $\psi \in C^4(R^{n+1})$, $f \in C^4(\mathbf{R}^{n+1} \times [0, \infty))$.

Обозначим через $\Phi(\mu, z)$ матрицу порядка 3×3, строками которой являются вектор-функции $D_z^2 \widetilde{\varphi}(\mu, z)$, $D_z \widetilde{\varphi}(\mu, z)$, где $\widetilde{\varphi}(\mu, z)$ — преобразование Фурье вектор-функции $\varphi(x, z)$ по переменным x, а через Z сегмент $[z^0 - T_1, z^0 + T_2]$, где T_1, T_2 — конечные положительные числа, удовлетворяющие равенству

$$\int_{z^0 - T_1}^{z^0} \frac{d\xi}{\sqrt{a_2(\xi)}} = \int_{z^0}^{z^0 + T_2} \frac{d\xi}{\sqrt{a_2(\xi)}}. \tag{8}$$

Здесь $a_2(\xi) = a_\alpha^0(\xi) |_{\alpha = (0, 0, \ldots, 2)}$, $a_2(\xi) > 0$ (вследствие равномерной эллиптичности оператора $P_0(\xi, D)$). Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА. *Пусть* $Z \subseteq \operatorname{supp} \det \Phi(0, z)$. *Тогда, если существует оператор* $P_1(x, z, D)$, *являющийся решением задачи* 1, *в классе операторов, коэффициенты которых удовлетворяют условию* а), *то для* $(x, z) \in \mathbf{R}^n \times Z$ *он единственный в этом классе.*

Доказательство теоремы проведем в два этапа. На первом из них покажем, что исследование проблемы единственности задачи 1 можно свести к исследованию аналогичной проблемы для другой задачи (задачи 2, см. далее). На втором этапе будет показано, что решение последней задачи единственно.

Замечание 1. Из а), б) и [5, теорема 1, стр. 211] следует, что обобщенное решение $u_0(x - x^0, z, t)$ задачи Коши (5), (6) существует, единственно и вместе с частными производными $D_t^s D^\alpha u_0$, $|\alpha| \leqslant 4 - s$, $s = 0, 1, 2$, при фиксирванном $t > 0$, как вектор-функции переменных $x - x^0$, z, принадлежат пространству $L_2(\mathbf{R}^{n+1})$.

Напомним известное свойство (см., например, [6, гл. VI, § 7])

Свойство 1. Финитность начальных данных задач Коши и правой части f для гиперболических уравнений второго порядка влечет финитность решения по пространственным переменным для любого фиксированного момента времени. Используя свойство 1, получаем что $D_t^s D^\alpha u_0(x - x^0, z, t)$, $|\alpha| \leqslant 4 - s$, $s = 0, 1, 2$, финитны по $x - x^0$, z ($t > 0$ — фиксировано). Поэтому из а) и выше сказанного следует, что

$$D^\alpha [P_1(x, z, D) u_0(x - x^0, z, t)], \quad |\alpha| \leqslant 2,$$

$$D_t^s [P_1(x, z, D) u_0(x - x^0, z, t)], \quad s = 0, 1, 2,$$

— финитные вектор-функции по переменным x, x^0, z пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$ ($t > 0$ — фиксированно). Учитывая этот факт находим, что для любого заданного оператора $P_1(x, z, D)$, коэффициенты которого удовлетворяют условию а) из [5, теорема 1, стр. 211] и свойства 1 следует существование такого единственного обобщенного решения задачи (3), (4) $u_1(x, z, x^0, t)$, которое вместе с частными производными $D^\alpha u_1$, $|\alpha| \leqslant 2$, $D_t^s u_1$, $s = 1, 2$, как вектор-функции переменных x, z, x^0 ($t > 0$ — фиксированно) принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R}^{2n+1})$

Полученные в замечании 1 свойства вектор-функций $u_1(x, z, x^0, t)$, $u_0(x - x^0, z, t)$ являются достаточными для обоснования законности применения к правым и левым частям равенств (3), (4), (7) преобразования Фурье по переменным x, x^0.

Обозначим через $v(\lambda, z, \lambda^0, t)$, ($\lambda, \lambda^0 \in \mathbf{R}^n$) образ преобразования Фурье функции $u_1(x, z, x^0, t)$ по переменным x, x^0, а через $w(\lambda^0, z, t)$ — образ Фурье $u_0(x - x^0, z, t)$ по переменной $x - x^0$.

В этих обозначениях имеют место равенства, справедливость которых доказывается непосредственным вычислением

$$\int P_0(z, D) u_1(x, z, x^0, t) \exp(i \langle x, \lambda \rangle) \cdot \\ \cdot \exp(i \langle x^0, \lambda^0 \rangle) \, dx \, dx^0 = \sum_{k=0}^{2} a_k(z, \lambda) D_z^k v, \tag{9}$$

$$\int P_1(x, z, D) u_0(x - x^0, z, t) \exp(i \langle x, \lambda \rangle) \cdot \\ \cdot \exp(i \langle x^0, \lambda^0 \rangle) \, dx \, dx^0 = q(\lambda^0, \lambda + \lambda^0, z) W(-\lambda^0, z, t), \tag{10}$$

где

$$a_k(z,\lambda)=\sum\nolimits_{|\alpha'|\leqslant 2-k}(-i\lambda)^{\alpha'}\,a^0_\alpha(z)\,|_{\alpha=(\alpha',k)},\quad k=0,1,2, \tag{11}$$

$$q(\lambda^0,\lambda+\lambda^0,z)=(q_2,q_1,q_0), \tag{12}$$

$$q_k(\lambda^0,\lambda+\lambda^0,z)=\sum\nolimits_{|\alpha'|=2-k}(-i\lambda^0)^{\alpha'}\int a^1_\alpha(x,z)\,|_{\alpha=(\alpha',k)}\cdot \cdot\exp(i\langle x,\lambda+\lambda^0\rangle)\,dx,$$

$k=0,1,2$, $\alpha'=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha'|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, $(\lambda)^{\alpha'}=\lambda_1^{\alpha_1}\cdot\lambda_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n^{\alpha_n}$, $i^2=-1$, $\langle\lambda,x\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, $W(\lambda^0,z,t)$ — матрица порядка 3×3, строками которой являются вектор-функции

$$D_z^2w(\lambda^0,z,t),\ D_zw(\lambda^0,z,t),\ w(\lambda^0,z,t).$$

Применяя к обеим частям равенств (3), (4), (7) преобразование Фурье по переменным x, x^0 и учитывая (9), (10), получим

$$D_t^2v=\sum\nolimits_{k=0}^{2}a_k(z,\lambda)\,D_z^kv+q(\mu-\lambda,\mu,z)\,W(-\mu+\lambda,z,t), \tag{13}$$

$$D_t^s(\lambda,z,\mu-\lambda,t)\,|_{t=0}=0,\quad s=0,1, \tag{14}$$

$$D_z^{(s-1)}v(\lambda,z^0,\mu-\lambda,t)=\int f_s(x,x^0,t)\ \exp(i\langle\lambda,x\rangle)\cdot \cdot\exp(i\langle\mu-\lambda,x^0\rangle)\,dx\,dx^0=F_s(\lambda,\mu-\lambda,t),\quad s=1,2, \tag{15}$$

$\lambda,\mu\in\mathbf{R}^n$, z^0 — ранее фиксированная точка (см. (7)).

З а м е ч а н и е 2. Из свойства а), б), равенств (11) и замечания 1 следует, что

в) $a_1(z,\lambda)$, $a_0(z,\lambda)$ непрерывны по z, λ при $z\in Z$, $\lambda\in\mathbf{R}^n$;

г) $a_2(z,\lambda)=a_2(z)$ непрерывно дифференцируема по z (здесь функция $a_2(z)$ та же, что и в формуле (8));

д) $W(\mu,z,t)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно по совокупности аргументов.

Из непрерывности $\Phi(\mu,z)$ в $\Pi_\varepsilon=\{\mu,z\mid z\in Z, |\mu|\leqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$ (непрерывность $\Phi(\mu,z)$ в Π_ε следует из б)) и условия (см. формулировку теоремы) $\det\Phi(0,z)\neq 0$, $z\in Z$, вытекает существование такого $\varepsilon_0>0$, что в Π_{ε_0} выполняется неравенство $\det\Phi(\mu,z)\neq 0$.

Поэтому из равенства

$$\det W(\mu, z, 0) = \det \Phi(\mu, z), \quad \mu \in \mathbf{R}^n, \quad z \in Z,$$

вытекает неравенство

$$\det W(\mu, z, 0) \neq 0, \quad (\mu, z) \in \Pi_{\varepsilon_0}. \tag{16}$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Определить вектор-функцию

$$q(\mu - \lambda, \mu, z) \equiv \tilde{q}(\mu, \lambda, z) \in C(Q),$$

входящую в равенство (13), по заданным вектор-функциям $F_S(\lambda, \mu - \lambda, t)$, $s=1, 2$, равенства (15) (в равенстве (15) $v(\lambda, z^0, \mu - \lambda, t)$ — решение задачи Коши (13), (14) при $z = z^0$),

$$Q = [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] \times [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2] \times Z.$$

ЛЕММА. *Если выполнены условия* в), г), д) *и неравенство* (16), *то решение задачи* 2 *единственно в* $C(Q)$.

Пусть лемма имеет место. Покажем, что решение задачи 1 единственно. Для этого достаточно показать, что из равенств

$$D_z^s u_1(x, z, x^0, t)|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad s = 0, 1, \tag{7'}$$

вытекают равенства

$$a_\alpha^1(x, z) \equiv 0, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad (x, z) \in \mathbf{R}^n \times Z, \tag{17}$$

а из равенств (7), (7′), (15) — равенства

$$F_S(\lambda, \mu - \lambda, t) = 0, \quad s = 1, 2. \tag{18}$$

Поэтому в силу леммы имеем

$$q(\mu - \lambda, \mu, z) \equiv 0, \quad \text{при} \quad (\mu, \lambda, z) \in Q. \tag{19}$$

Из формулы (12) вытекают формулы

$$D_\lambda^\beta q_k(\mu - \lambda, \mu, z)|_{\lambda=\mu} =$$

$$= (i)^{|\beta|}\beta! \int a_\alpha^1(x, z)|_{\alpha=(\beta, k)} \cdot \exp(i\langle x, \mu\rangle \, \mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \quad \beta_j \in \mathbf{Z}_+ \quad |\beta| \leqslant 2 - k,$$
$$k = 0, 1, 2.$$

Из равенств (12), (19), (20) следуют при $|\lambda| \leqslant \varepsilon_1$, $|\mu| \leqslant \varepsilon_1$, $z \in Z$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2)$ равенства

$$D_\lambda^\beta q_k(\mu - \lambda, \mu, z)|_{\lambda=\mu} = 0, \quad |\beta| \leqslant 2 - k, \quad k = 0, 1, 2. \tag{21}$$

Учитывая аналитичность функций $D_\lambda^\beta q_k(\mu-\lambda, \mu, z)|_{\lambda=\mu}$, $|\beta| \leqslant 2-k$, $k=0, 1, 2$, по переменной μ, которая следует из равенств (20), финитности $a_\alpha^1(x, z)$, $|\alpha| \leqslant 2$, и теоремы Пэли — Винера [7, стр. 34] получим, что равенства (21) верны для $\mu \in \mathbf{R}^n$, $z \in Z$. Поэтому левые части равенства (20) равны тождественно нулю при $z \in Z$, $\mu \in \mathbf{R}^n$, а это возможно только в случае выполнения равенств (17).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать лемму. Делая замену переменной z на переменную

$$y=\int_{z^0}^{z} \frac{d\xi}{\sqrt{a_2(\xi)}}, \quad \left(\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\sqrt{a_2(z)}}>0 \text{ (см. (8))}\right) \qquad (22)$$

и вводя новую функцию $H(y, \lambda, \mu-\lambda, t)$ по формуле

$$H(y, \lambda, \mu-\lambda, t)=\frac{v(\lambda, z(y), \mu-\lambda, t)}{S(y, \lambda)},$$

где

$$S(y, \lambda)=\sqrt[4]{\frac{a_2(z(y))}{a_2(z^0)}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^y -\frac{a_1(z(\xi), \lambda)}{\sqrt{a_2(z(\xi))}}\, d\xi\right\}, \qquad (23)$$

равенства (13), (14), (15) преобразуем к виду

$$[D_t^2-D_y^2-b(y, \lambda)]H=q(\mu-\lambda, \mu, z(y))\cdot\tilde{W}(\mu, \lambda, y, t), \qquad (24)$$

$$D_t^s H(y, \lambda, \mu-\lambda, t)|_{t=0}=0, \quad s=0, 1, \qquad (25)$$

$$H(0, \lambda, \mu-\lambda, t)=F_1(\lambda, \mu-\lambda, t),$$
$$D_y H(0, \lambda, \mu-\lambda, t)=F_2(\lambda, \mu-\lambda, t) a_2(z^0), \qquad (26)$$

где

$$b(y, \lambda)=S^{-1}D_y^2 S+ S^{-1}(y, \lambda)\left[\frac{a_1(z(y), \lambda)}{\sqrt{a_2(z(y))}}-D_z(\sqrt{a_2(z(y))})\right]D_y S+a_0(z(y), \lambda), \qquad (27)$$

$$\tilde{W}(\mu, \lambda, y, t)=W(-\mu+\lambda, z(y), t)S^{-1}(y, \lambda). \qquad (28)$$

Для завершения доказательства леммы, достаточно убедиться в том, что из равенств

$$H(0, \lambda, \mu-\lambda, t)=0, \quad D_y H(0, \lambda, \mu-\lambda, t)=0 \qquad (26')$$

($H(y, \lambda, \mu-\lambda, t)$ — решение задачи Коши (24), (25)) вытекает для функции $q(\mu-\lambda, \mu, z(y))$, входящей в уравнение (24), равенство

$$q(\mu-\lambda,\ \mu,\ z(y))\equiv 0 \tag{29}$$

при $y\in[-Y,\ Y]$, $|\lambda|\leqslant\varepsilon_0/2$, $|\mu|\leqslant\varepsilon_0/2$, где

$$Y=\int_{z^0}^{z^0+T_2}\frac{d\xi}{\sqrt{a_2(\xi)}}.$$

Проверка аналогичного утверждения содержится в [8, стр. 62—65]. Однако для полноты доказательства мы проверим наше утверждение. Для этого решение задачи Коши (24) — (25) запишем в виде

$$H(y,\lambda,\mu-\lambda,t)=\int_{\tau\geqslant 0}G(y,\xi,t-\tau,\lambda)\,q(\mu-\lambda,\mu,z(\xi))\cdot \cdot\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{30}$$

Здесь $G(y,\ \xi,\ t-\tau,\ \lambda)$ — фундаментальное решение оператора $[D_t^2-D_y^2-b(y,\ \lambda)]$.

Замечание 3. Задача построения $G(y,\ \xi,\ t-\tau,\ \lambda)$ эквивалентна задаче решения следующего интегрального уравнения (см., например, [8, стр. 63])

$$G(y,\xi,t-\tau,\lambda)=\frac{1}{2}\,\theta(t-\tau-|\xi-y|)+ +\frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t}\int_0^{t-|\zeta-y|}b(\zeta,\lambda)\,G(\zeta,\xi,\varkappa-\tau,\lambda)\,d\zeta\,d\varkappa.$$

Отсюда ясно, что для непрерывной функции $b(y,\ \lambda)$ (непрерывность $b(y,\ \lambda)$ следует из формул (23), (27) и условий в), г)) функция $G(y,\ \xi,\ t-\tau,\ \lambda)$ отлична от нуля только в области $t-\tau\geqslant|y-\xi|$ и внутри ее обладает непрерывными частными производными D_yG, D_tG, D_yD_tG, D_t^2G, и, кроме того,

$$G(y,\ \xi,\ |\xi-y|,\ \lambda)=1/2.$$

Полагая $y=0$ в формуле (30) и в формуле для D_yH, которая получится, если к (30) применить оператор D_y, и учитывая равенство (26′), замечание 3, получим тождества

$$\int_{-t}^{t}\int_0^{t-|\xi|}G(0,\xi,t-\tau,\lambda)\,q(\mu-\lambda,\mu,z(\xi))\cdot \cdot\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\equiv 0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-t}^{t} q(\mu-\lambda,\mu,z(\xi))\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,t-|\xi|)\operatorname{sgn}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_{-t}^{t}\int_{0}^{t-|\xi|} D_yG(0,\xi,t-\tau,\lambda)\,q(\mu-\lambda,\mu,z(\xi))\cdot$$

$$\cdot\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\equiv 0. \qquad (32)$$

Применим к равенству (31) оператор D_t^2, а к (32) — оператор D_t, затем сложим (вычтем) левые и правые части полученных равенств и учитывая неравенство

$$\det\ \widetilde{W}(\mu,\lambda,y,0)\neq 0, \qquad (33)$$

при $|\mu|\leqslant\varepsilon_0/2$, $|\lambda|\leqslant\varepsilon_0/2$, $y\in[-Y,Y]$ (см. (16), (28)) получим для функций $p_i(t)\equiv q(\mu-\lambda,\ \mu,\ z(t))-(-1)^i q(\mu-\lambda,\mu,z(-t))$, $i=1, 2$, интегральные соотношения:

$$p_i(t)+\int_{-t}^{t}[p_1(\xi)+p_2(\xi)]\,K_i(\mu,\lambda,\xi,t)\,d\xi=0,\quad i=1,2. \qquad (34)$$

Здесь ядра K_i, $i=1, 2$, определяются посредством формул

$$K_i(\mu,\lambda,\xi,t)=\frac{1}{2}\cdot D_t\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,t-|\xi|)\cdot$$
$$\cdot\{(1+\operatorname{sgn}(\xi))[\widetilde{W}(\mu,\lambda,t,0)]^{-1}-$$
$$-(-1)^i(1-\operatorname{sgn}(\xi))[\widetilde{W}(\mu,\lambda,-t,0)]^{-1}\}+$$
$$+[D_t+D_z]\,G(0,\xi,|\xi|,\lambda)\,\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,t-|\xi|)\cdot$$
$$\cdot[\widetilde{W}(\mu,\lambda,t,0)]^{-1}-(-1)^i[D_t-D_z]\cdot$$
$$\cdot G(0,\xi,|\xi|,\lambda)\,\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,t-|\xi|)[\widetilde{W}(\mu,\lambda,-t,0)]^{-1}+$$
$$+\int_{0}^{t-|\xi|}\{[D_t^2+D_tD_z]\,G(0,\xi,t-\tau,\lambda)\,\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,\tau)\cdot$$
$$\cdot[\widetilde{W}(\mu,\lambda,t,0)]^{-1}-(-1)^i[D_t^2-D_tD_z]\,G(0,\xi,t-\tau,\lambda)\cdot$$
$$\cdot(\widetilde{W}(\mu,\lambda,\xi,\tau)\,[\widetilde{W}(\mu,\lambda,-t,0)]^{-1}\}\,d\tau,\quad i=1,2.$$

Из неравенства (33), условий в), г), д) и замечания 3 следует, что ядра K_i $(\mu,\ \lambda,\ \xi,\ t)$ непрерывны по μ, λ, t (кусочно непрерывны по ξ) на множестве

$$\{\mu,\lambda,\xi,t\mid\ |\mu|\leqslant\varepsilon_0/2,\ |\lambda|\leqslant\varepsilon_0/2,\ -t\leqslant\xi\leqslant t,\ \xi\neq 0,\ -Y\leqslant t\leqslant Y\}.$$

Поэтому из системы уравнений Вольтерра (34) следует равенство (29) и тем самым лемма, а вместе с ней и теорема, доказана.

Вычислительный центр
СО АН СССР

Поступило
20.X.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Благовещенский А. С., Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка, В сб. Математические вопросы теории распространения волн, т. 2, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 15 (1969), 85—90.

[2] Яхно В. Г., Теорема единственности одной обратной задачи для гиперболического уравнения, Дифф. уравнения, 13, № 3 (1977), 544—551.

[3] Бухгейм А. Л., Яхно В. Г., О двух задачах для дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, 229, № 4 (1976), 785—786.

[4] Романов В. Г., Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, «Наука», 1972.

[5] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, «Наука», 1962.

[6] Курант Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.

[7] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.

[8] Романов В. Г., Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Спецкурс лекций, Новосибирск, Изд-во НГУ, 1973.