И. Н. Шнурников, Мощность отделяемого множества вершин многомерного куба, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, номер 2, 11–17

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–01–00302а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. *Herriot I.G.* Norlung summability of double Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1942. **52**, N 1. 72–94.
3. *Ильин В.А.* Условия локализации прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье в классах С.М. Никольского // Матем. заметки. 1970. **8**, № 5. 595–606.
4. *Крутицкая Н.Ч.* Локализация при ограниченном суммировании методами Чезаро, Рисса и Абеля кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1972. **12**, № 4. 355–364.
5. *Крутицкая Н.Ч.* Окончательные условия локализации прямоугольных чезаровских средних и средних Абеля при ограниченном суммировании кратного тригонометрического ряда Фурье в классах Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. **37**, № 3. 593–602.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
7. *Жижиашвили Л.В.* Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1983.
8. *Дъяченко А.М.* Об одном свойстве средних Чезаро двойных рядов Фурье // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимней школы, посвященной памяти академика П.Л. Ульянова. 28 января – 4 февраля 2008 г. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008.

Поступила в редакцию
08.10.2008

УДК 514.177.2 + 514.114

МОЩНОСТЬ ОТДЕЛЯЕМОГО МНОЖЕСТВА ВЕРШИН МНОГОМЕРНОГО КУБА

И. Н. Шнурников [1]

Рассмотрим n-мерный куб и вписанную в него сферу. Гипотеза А. Бен-Тала, А. С. Немировского, К. Роса утверждает, что любая касательная гиперплоскость к сфере строго отделяет от центра сферы не более чем 2^{n-2} вершин куба. В работе доказана эта гипотеза для $n \leqslant 6$. Построена серия примеров гиперплоскостей, строго отделяющих ровно 2^{n-2} вершин n-мерного куба для любого n. Доказано, что гиперплоскости, ортогональные радиус-векторам вершин куба, строго отделяют менее чем 2^{n-2} вершин куба при $n \geqslant 3$.

Ключевые слова: пороговые функции, отделяемые множества вершин куба.

An n-dimensinal cube and a sphere inscribed into it are considered. The conjecture of A. Ben-Tal, A. Nemirovskii, C. Roos states that each tangent hyperplane to the sphere strictly separates not more than 2^{n-2} cube vertices. In this paper this conjecture is proved for $n \leqslant 6$. New examples of hyperplanes separating exactly 2^{n-2} cube vertices are constructed for any n. It is proved that hyperplanes orthogonal to radius vectors of cube vertices separate less than 2^{n-2} cube vertices for $n \geqslant 3$.

Key words: threshold functions, separated vertices of cube.

Введение. Рассмотрим n-мерный куб и вписанную в него $n-1$-мерную сферу ω. Будем говорить, что касательная гиперплоскость α к сфере ω *отделяет* вершину куба A, если вершина A и центр сферы ω находятся строго по разные стороны от гиперплоскости α.

Гипотеза (А. Бен-Тал, А.С. Немировский, К. Рос [1, гипотеза А.2]). *Любая касательная гиперплоскость к вписанной сфере отделяет не более чем 2^{n-2} вершин n-мерного куба.*

[1] *Шнурников Игорь Николаевич* — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: shnurnikov@yandex.ru.

Пример 1. Пусть $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1) \in \mathbf{R}^n$ — координаты вершин n-мерного куба, тогда вписанная сфера задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Гиперплоскость $y_1 + y_2 = \sqrt{2}$ касается вписанной сферы в точке $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0)$. Касательная гиперплоскость отделяет 2^{n-2} вершин куба, в точности те, у которых первые две координаты равны $+1$.

В работе [1] доказано (лемма А.1), что любая касательная гиперплоскость к вписанной сфере отделяет не более чем $\frac{1}{3}2^n$ вершин n-мерного куба. Оценка $\frac{1}{3}2^n$ является достаточной для получения содержательных результатов в следующей задаче.

Методология робастной (robust) оптимизации, развитая в [2], сводит NP-трудные задачи нахождения минимума семейства линейных функций на выпуклых множествах при неявных ограничениях к разрешимым задачам, увеличивая количество неявных ограничений. Например, рассматривается задача поиска

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \{c^T x : \ Ax - b \in L^N, \ \forall (A, b, c) \in U_\rho\}, \tag{1}$$

где L^N — это N-мерный конус: $L^N = \{z \in \mathbf{R}^N : \ z_N \geqslant \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{N-1}^2}\}$, а матрица $A \in \mathbf{R}^{N \times n}$ и векторы $b \in \mathbf{R}^N, c \in \mathbf{R}^n$ берутся из множества параметров

$$U_\rho = \left\{ (A, b, c) = (A^0, b^0, c^0) + \rho \sum_{l=1}^{L} y_l (A^l, b^l, c^l) : \ y^T Q_k y \leqslant 1, k = 1, \ldots, K \right\}$$

для фиксированного набора неотрицательно-определенных матриц $Q_k \in \mathbf{R}^{L \times L}$, вектора $y = (y_1, \ldots, y_L) \in \mathbf{R}^L$, лежащего в пересечении K эллипсоидов, и вещественного числа $\rho \in \mathbf{R}$.

Задача (1) для $\rho = 1$ NP-трудна (см. [2]), но она аппроксимируется (см. [1]) задачей (1) для $\rho' > 1$, которая уже вычислима. Согласно [1], уровень аппроксимации ρ' ограничивается сверху величиной

$$\sqrt{2 \ln \left(\frac{2}{1 - 2r} \left(\sum_{k=1}^{K} \operatorname{Rank}(Q_k) \right) \right)}.$$

Константа r — это максимальное отношение количества вершин n-мерного куба, отделяемых касательными гиперплоскостями к вписанной сфере, к количеству всех вершин куба, т.е. любая касательная гиперплоскость отделяет не более чем $r 2^n$ вершин куба.

Основная часть. Обозначим координаты вершин n-мерного куба через $(a_1, \ldots, a_n)$, где $|a_i| = 1, i = 1, \ldots, n$, а координаты точки касания гиперплоскости и вписанной сферы — через $(x_1, \ldots, x_n)$. Радиус вписанной сферы равен 1, поэтому $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Уравнение касательной гиперплоскости имеет вид

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = 1,$$

где переменными являются $y_1, \ldots, y_n$. Касательная гиперплоскость отделяет вершину куба с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n > 1.$$

Пример 2. Для натурального числа $k \leqslant \frac{n}{2}$ рассмотрим гиперплоскость

$$\frac{3k-2}{3k-1} y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3k-1} y_2 + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{3k-1} y_{2k} = 1.$$

Точка касания гиперплоскости и сферы имеет координаты

$$\left(\frac{3k-2}{3k-1}, \ \frac{\sqrt{3}}{3k-1}, \ldots, \ \frac{\sqrt{3}}{3k-1}, \ 0, \ldots, \ 0 \right).$$

Вершина куба с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$ отделена гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $a_1 = 1$ и среди чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{2k}$ есть не менее k единиц. Достаточное условие следует из неравенств

$$\frac{\sqrt{3}}{3k-1} a_2 + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{3k-1} a_{2k} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3k-1} \qquad \text{и} \qquad \frac{3k-2}{3k-1} + \frac{\sqrt{3}}{3k-1} > 1.$$

Необходимое условие следует из неравенств

$$\frac{\sqrt{3}}{3k-1}a_2+\ldots+\frac{\sqrt{3}}{3k-1}a_{2k}\leqslant\frac{\sqrt{3}(2k-1)}{3k-1}\leqslant 1+\frac{3k-2}{3k-1},$$

т.е. у отделенной вершины первая координата $a_1=1$ и среди чисел $a_2,\ldots,a_{2k}$ более половины положительных. Всего эта гиперплоскость отделяет 2^{n-2} вершин куба.

Теорема 1. *Для n-мерного куба при $n\leqslant 6$ любая касательная гиперплоскость к вписанной сфере отделяет не более чем 2^{n-2} вершин куба.*

То есть для всяких $n\leqslant 6$ чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ со свойством $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$ количество $N(x)$ наборов из n чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, таких, что каждое из них равно $+1$ или -1 и верно неравенство $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n>1$, не превосходит 2^{n-2}.

Доказательство. При $n\leqslant 5$ добавим фиктивные числа $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_6=0$ и сведем теорему 1 к случаю $n=6$. При замене знаков у чисел x_i количество $N(x)$ наборов из шести чисел $a_1,\ldots,a_6$, таких, что каждое из них равно $+1$ или -1 и верно неравенство $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5+a_6x_6>1$, не изменится. Поэтому считаем $x_1,\ldots,x_6\geqslant 0$.

Фиксируем и упорядочим числа $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant x_5\geqslant x_6\geqslant 0$. Назовем набор из шести чисел $a_1,\ldots,a_6$ *искомым,* если каждое из них равно $+1$ или -1 и справедливо $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5+a_6x_6>1$. Рассмотрим три случая.

Случай (*а*). Пусть верно неравенство

$$-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\leqslant 1.$$

Для всякого искомого набора $a_1,\ldots,a_6$ имеем $a_1=1$. Справедливо неравенство $x_1+\sum_{i=2}^{6}(-a_i)x_i<1$, так как иначе получим противоречие:

$$2\geqslant 2x_1=(a_1+1)x_1=\left(\sum_{i=1}^{6}a_ix_i\right)+\left(x_1+\sum_{i=2}^{6}(-a_i)x_i\right)>1+1=2.$$

Поэтому число искомых наборов $N(x)$ не превосходит половины от количества всевозможных наборов из пяти чисел $a_2,\ldots,a_6$, каждое из которых равно $+1$ или -1, т.е. $N(x)\leqslant 16$. Случай *а* разобран.

Теперь, исходя из неравенства $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1$, получим следующие неравенства (используемые в оставшихся случаях). Применив неравенство Коши–Буняковского к числам x_1,x_2,x_3,x_4, будем иметь

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{4}}\leqslant\frac{1}{2},$$

поэтому верны неравенства

$$x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 2\quad\text{и}\quad x_2+x_4\leqslant 1.$$

Предположив, что выполняется неравенство $x_1+x_2-x_3+x_4-x_5-x_6\geqslant 1$, и сложив его с исходным (для случаев *б* и *в*) неравенством $-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1$, придем к противоречию с неравенством $x_2+x_4\leqslant 1$, откуда получаем, что $x_1+x_2-x_3+x_4-x_5-x_6<1$ и что существует не более одного искомого набора, содержащего не менее трех -1. Это (гипотетически возможный) набор $a_1=a_2=a_3=1, a_4=a_5=a_6=-1$. Отметим, что искомых наборов не более чем с одной -1 ровно семь (так как всего наборов из шести чисел не более чем с одной -1 ровно семь), и для оценки числа искомых наборов $N(x)$ осталось рассмотреть искомые наборы с двумя -1.

Случай (*б*). Верны неравенства

$$-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1\quad\text{и}\quad -x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6\leqslant 1.$$

Предположив дополнительно, что выполняется неравенство $x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6>1$, и огрубив предположение до $x_1+x_6>1$, перемножим два следующих неравенства: $x_6>1-x_1$ и $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6>1+x_1$. В результате получим строгое неравенство

$$1-x_1^2=x_2^2+\ldots+x_6^2\geqslant x_6(x_2+\ldots+x_6)>1-x_1^2.$$

Противоречие привело к системе неравенств

$$-x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6\leqslant 1\quad\text{и}\quad x_1-x_2+x_3-x_4+x_5+x_6\leqslant 1,$$

откуда получим, что искомых наборов с двумя -1 не более восьми. Перечислим все (гипотетически возможные) искомые наборы с двумя -1 (неуказанные координаты вершин куба равны $+1$):

$$a_2 = a_5 = -1, \quad a_2 = a_6 = -1, \quad a_3 = a_4 = -1, \quad a_3 = a_5 = -1,$$
$$a_3 = a_6 = -1, \quad a_4 = a_5 = -1, \quad a_4 = a_6 = -1, \quad a_5 = a_6 = -1.$$

Сложив оценки количеств искомых наборов, содержащих не более одной, ровно две и хотя бы три -1, получим $N(x) \leqslant 7 + 8 + 1 = 16$.

Случай (*в*). Верны неравенства

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1 \quad \text{и} \quad -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 > 1.$$

Предположив дополнительно, что выполнено неравенство $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \geqslant 1$, и сложив его с исходным в случае *в* неравенством $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 > 1$, получим противоречие с неравенством $x_2 + x_4 \leqslant 1$. Поэтому искомых наборов с двумя -1 не более 6. Перечислим все (гипотетически возможные) искомые наборы с двумя -1 (неуказанные координаты вершин куба равны $+1$):

$$a_1 = a_6 = -1, \quad a_2 = a_6 = -1, \quad a_3 = a_6 = -1,$$
$$a_4 = a_5 = -1, \quad a_4 = a_6 = -1, \quad a_5 = a_6 = -1.$$

Сложив оценки количеств искомых наборов, содержащих не более одной, ровно две и хотя бы три -1, получим $N(x) \leqslant 7 + 6 + 1 = 14$. $\square$

Замечание. Гиперплоскость $\frac{1}{\sqrt{n}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y_2 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}y_n = 1$, касающаяся сферы в точке с координатами $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$, отделяет ровно $\sum_{i<\frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i$ вершин куба. Пусть k координат отделяемой вершины куба положительны и $n-k$ отрицательны, тогда $k - (n-k) > \sqrt{n}$, т.е. $n - k < \frac{n-\sqrt{n}}{2}$. Осталось заметить, что существует C_n^{n-k} вершин куба ровно с $n-k$ отрицательными координатами.

Теорема 2. *Для* $n \geqslant 3$ *гиперплоскость* $\frac{1}{\sqrt{n}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y_2 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}y_n = 1$ *отделяет менее чем* 2^{n-2} *вершин* n*-мерного куба.*

То есть (используя замечание) для всех натуральных чисел $n \geqslant 3$ верно неравенство

$$\sum_{0 \leqslant i < \frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i < 2^{n-2}.$$

План доказательства. Для $3 \leqslant n \leqslant 15$ вычислим обе части неравенства явно. Для $n \geqslant 16$ перепишем неравенство через сумму "центральных" C_n^k, оценим последние по формуле Стирлинга, а их сумму — через $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Доказательство. *Шаг 1.* Составим таблицу для обеих частей неравенства и числа $\lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil$ — количества участвующих в суммировании C_n^i для $3 \leqslant n \leqslant 15$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil$	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6
$\sum C_n^i$	1	1	6	7	29	37	46	176	232	794	1093	3473	4944
2^{n-2}	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Через $\lceil x \rceil$ и $\lfloor x \rfloor$ обозначим верхнюю и нижнюю целые части числа x соответственно. Для $n \geqslant 16$, пользуясь соотношениями $C_n^i = C_n^{n-i}$ и $n - \lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil = \lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{2} \rfloor$, перепишем требуемое неравенство:

$$\sum_{i=\lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{2} \rfloor} C_n^i > 2^{n-1}.$$

Шаг 2. Оценим C_n^i снизу с помощью формулы Стирлинга $n! = (\frac{n}{e})^n \cdot (\sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{\theta_n}{12n}})$, где $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, и функции энтропии $H(x) = -x \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n^i \cdot n^{n-i}}{i^i \cdot (n-i)^{n-i}} \left(\sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi i\; 2\pi(n-i)}} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n} - \frac{\theta_i}{12i} - \frac{\theta_{n-i}}{12(n-i)}} \right) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{nH(\frac{i}{n})}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{4i(n-i)}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{4i(n-i)}}\right).$$

Введем величину $t=\frac{i}{n}-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{4i(n-i)}{n}=\frac{4\left(\frac{n}{2}+nt\right)\left(\frac{n}{2}-nt\right)}{n}=n(1-4t^2)\quad\text{и}\quad C_n^i\geqslant 2^{nH(t+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{3n(1-4t^2)}}}{\sqrt{n(1-4t^2)}}.$$

Определим функцию

$$f(t):=2^{nH(t+\frac{1}{2})-n}\cdot\frac{e^{2nt^2-\frac{1}{3n(1-4t^2)}}}{\sqrt{1-4t^2}}\tag{2}$$

на отрезке $|t|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$, который получился из неравенства $|i-\frac{n}{2}|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{2}$. Преобразуем первый сомножитель в (2):

$$2^{nH(t+\frac{1}{2})-n}=2^{n(-(\frac{1}{2}+t)\log_2(1+2t)-(\frac{1}{2}-t)\log_2(1-2t))}=e^{-\frac{n}{2}\ln(1-4t^2)-nt\ln(\frac{1+2t}{1-2t})}.$$

Определим функцию

$$h(t):=\ln(f(t))=2nt^2-\frac{1}{3n(1-4t^2)}-nt\ \ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right)-\frac{n+1}{2}\ln(1-4t^2)\quad\text{при}\quad |t|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Функция $h(t)$ четная, и $h(0)=-\frac{1}{3n}$. Покажем, что $h'(t)\geqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Продифференцируем выражение, определяющее функцию $h(t)$, сгруппируем слагаемые и разложим вторую группу слагаемых в ряд по степеням $2t$:

$$h'(t)=\left(\frac{2t}{1-4t^2}-\frac{8t}{3n(1-4t^2)^2}\right)+\left(\frac{2t}{1-4t^2}+4nt-n\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right)\right)=$$

$$=\frac{2t}{1-4t^2}\left(1-\frac{4}{3n(1-4t^2)}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^{2k+1}-2n\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(2t)^{2l+1}}{2l+1}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{2t}{1-4t^2}\frac{41}{45}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2t)^{2k+1}\left(1-\frac{2n(2t)^2}{2k+3}\right)\right)\geqslant 0.$$

Неравенства верны, так как $n\geqslant 16,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{8}$ и $n(2t)^2\leqslant 1$.

Из четности функции $h(t)$ и неотрицательности функции $h'(t)$ для $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$ получим неравенства

$$h(t)\geqslant h(0)=-\frac{1}{3n}\quad\text{и}\quad f(t)\geqslant f(0)=e^{-\frac{1}{3n}}\quad\text{для}\quad |t|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Отсюда следует оценка C_n^i снизу:

$$C_n^i\geqslant f(t)2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,e^{-2nt^2}\geqslant 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,e^{-2nt^2-\frac{1}{3n}}\quad\text{при}\quad n|t|=|i-\frac{n}{2}|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Шаг 3. Из формулы $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)''=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ получим выпуклость вверх функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ при $|x|<1$. Для любого отрезка $[a,b]$, где $-1\leqslant a<b\leqslant 1$, верно неравенство

$$\int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\leqslant(b-a)e^{-\frac{(a+b)^2}{8}},$$

поскольку криволинейная трапеция $\left\{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}\right\}$ в силу выпуклости содержится в трапеции, отсекаемой касательной к графику $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ в точке $\left(\frac{a+b}{2}, e^{-\frac{(a+b)^2}{8}}\right)$ от полуполосы $\{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y\}$. Аналогично (при $b < 2$ трапеция, отсекаемая касательной, не вырождается в ломаную) получим неравенство

$$\int_a^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leqslant (b-a)e^{-\frac{(a+b)^2}{8}}$$

для любых чисел $-1 \leqslant a < \frac{a+b}{2} < 1 < b < 2$.

Обозначим множество целых чисел отрезка $\left(\lceil\frac{n-\sqrt{n}}{2}\rceil, \lfloor\frac{n+\sqrt{n}}{2}\rfloor\right)$ через I_n, а число $2\sqrt{n}(\frac{i}{n} - \frac{1}{2})$ — через x_i для каждого индекса $i \in I_n$. Тогда из оценки C_n^i снизу в шаге 2 получим неравенство

$$\sum_{i\in I_n} C_n^i \geqslant 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{1}{3n}} \sum_{i \in I_n} e^{-\frac{x_i^2}{2}}.$$

Оценим $e^{-\frac{x_i^2}{2}}$ снизу:

$$e^{-\frac{x_i^2}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2} \int\limits_{\max\{x_i - \frac{1}{\sqrt{n}}, -1\}}^{\min\{x_i + \frac{1}{\sqrt{n}}, 1\}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Заметим, что

$$\max_{i\in I_n}\{x_i\} > 1 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad \min_{i \in I_n}\{x_i\} < -1 + \frac{2}{\sqrt{n}},$$

и оценим снизу сумму интегралом:

$$\sum_{i\in I_n} C_n^i \geqslant 2^n \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{3n}} \int\limits_{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Шаг 4. Используя неравенства $e^{-x} \geqslant 1 - x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\pi < \frac{22}{7}$ и $n \geqslant 16$, получим

$$e^{-\frac{1}{3n}} \geqslant 1 - \frac{1}{3n} \geqslant \frac{44}{45}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{11}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geqslant \int\limits_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{87}{64}.$$

Поэтому

$$\sum_{i \in I_n} C_n^i > 2^{n-1} \sqrt{\frac{77}{81}} \frac{87}{80} > 2^{n-1}. \qquad \square$$

Комментарий 1. В пределе $n \to \infty$ сумма биномиальных коэффициентов, деленная на 2^n, стремится к нормальному (гауссовскому) распределению, следовательно,

$$2^{-n} \sum_{0 \leqslant i < \frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_n^i \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,158 < 0,25, \qquad n \to \infty.$$

Комментарий 2. В книге А. Н. Ширяева [3, гл. 3, § 11, задача 2] сформулирована следующая задача. Пусть a_k — независимые, одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием, фиксированной дисперсией и конечным третьим моментом, т.е. $Ea_k = 0, Da_k = \sigma^2, E|a_k|^3 < \infty$. Тогда верна оценка отклонения вероятности P от интеграла гауссовского распределения:

$$\left| P\Big(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\Big) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| \leqslant \frac{cE|a_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}(1+|x|)^3}.$$

Доказав эту задачу с достаточно малой константой c и применив ее с $x = -1$, можно получить еще одно доказательство теоремы 2.

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Ведущие научные школы РФ”, грант НШ–660.2008.1; программы развития научного потенциала высшей школы, проект РНП 2.1.1.3704; РФФИ, грант № 07–01–00648а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ben-Tal A., Nemirovski A., Roos C.* Robust solutions to uncertain quadratic and conic-quadratic problems // SIAM J. Optim. 2002. **13**. 535–560.
2. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Robust convex optimization // Math. Oper. Res. 1998. **23**, N 4. 769–805.
3. *Ширяев А.Н.* Вероятность-1. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

Поступила в редакцию
24.04.2009