П. М. Тишин, Критерий устойчивости частных индексов круговой матрицы-функции, *Матем. заметки*, 1988, том 44, выпуск 4, 536–545

https://www.mathnet.ru/mzm4243

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ КРУГОВОЙ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

П. М. Тишин

Пусть Γ — ляпуновский контур, разбивающий плоскость комплексного переменного z на внутреннюю область D_+, содержащую нулевую точку, и внешнюю D_-,— содержащую бесконечно удаленную точку. Канонической факторизацией [1], H-непрерывной и неособой на контуре Γ матрицы-функции $G(t)$, называется представление ее в виде

$$G(t) = \chi_+(t)\,\Lambda(t)\,\chi_-(t),$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n})$, а $\chi_\pm(t)$ — аналитические в $D_\pm$ матрицы-функции. Целые числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ (называемые *частными индексами матрицы-функции* $G(t)$) определяются однозначно.

В [2, 3] впервые были получены необходимые и достаточные условия устойчивости частных индексов произвольной матрицы-функции. Нахождению эффективно проверяемых условий, при которых частные индексы устойчивы, посвящены [4—8]. Особое внимание было уделено также нахождению условий равенства нулю частных индексов матриц, принадлежащих специальным классам. В частности, в [9] И. М. Спитковским и А. М. Николайчуком найден критерий равенства нулю частных индексов эрмитовых матриц 2-го порядка. Г. Пуассон [10] и Рабиндранатан [11] получили условия равенства нулю частных индексов унитарных матриц. Оба результата заключаются в том, что должны существовать некоторые мероморфные (аналитические) функции, удовлетворяющие специальным условиям.

В данной работе изучаются круговые матрицы-функции, т. е. матрицы, удовлетворяющие условию

$$G(t)\,\overline{G(t)} = I,$$

где I — единичная матрица.

В пункте 1 получен критерий равенства между собой частных индексов треугольной матрицы функции n-го порядка. С помощью этого результата в пункте 2 даются условия равенства нулю частных индексов круговой матрицы, при предположении, что некоторые функции (определяемые по коэффициентам этой матрицы) рациональны. Это позволяет затем сформулировать необходимые и достаточные условия равенства нулю частных индексов для произвольной круговой матрицы-функции n-го порядка.

1. Рассмотрим треугольную полиномиальную матрицу $\Delta(t)$, представимую в виде

$$\Delta(t)=\begin{pmatrix} t^{k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{2,1}(t) & t^{k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ Q_{n-1,1}(t) & Q_{n-1,2}(t) & \dots & t^{k_{n-1}} & 0 \\ Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) & \dots & Q_{n,n-1}(t) & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $k_i \geqslant k_{i+1} > 0$ $(i = \overline{1, n-2})$, а полиномы $Q_{ij}(t)$ представимы в виде

$$Q_{ij}(t) = \sum\nolimits_{l=k_j+1}^{k_i-1} g_{ij}^l t^l.$$

В дальнейшем будем рассматривать тот случай, когда $k = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n-1} k_i\right) n^{-1}$ — целое число. Матрице $\Delta(t)$ вида (1) можно поставить в соответствие постоянную матрицу A, определяемую по формуле

$$A = \left(\begin{array}{ccccccc} I_{k-1} & & & & & & \\ & A_{2,1} & A_{l,1} & A_{l+1,1} & & A_{n-1,1} & A_{n,1} \\ & I_{k-1} & & & & & \\ & \ddots & A_{l,2} & A_{l+1,2} & & A_{n-1,2} & A_{n,2} \\ & & I_{k-1} & & & & \\ & & & A_{l+1,l} & & A_{n-1,l} & A_{n,l} \\ 0 & & & I_{k_{l+1}-1} & 0 & A_{n-1,l+1} & A_{n,l+1} \\ & & & \ddots & & & \\ & & & I_{k_{n-1}-1} & 0 & & A_{n,n-1} \end{array}\right), \qquad (2)$$

где число l ищется из условия $k_l \geqslant k \geqslant k_{l+1}$, а коэффициенты матрицы A_{ij} размеров $\{k_j - 1 \times k - 1\}$ $(i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, i-1})$ и матриц A_{nj} $(j = \overline{1, n-1})$ размеров $\{k_j - 1 \times k\}$ определяются соответственно по формулам:

$$a_{i_1 j_1}^{ij} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma}} Q_{ij}(t)\, t^{-k_j + i_1 - j_1 - 1}\, \mathrm{d}t$$

$$\left(i_1 = \overline{1, k_j - 1},\quad j_1 = \overline{1, k-1}\right),$$

$$a_{i_1 j_1}^{nj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q_{nj}(t)\, t^{-k_j + i_1 - j_1}\, \mathrm{d}t$$

$$\left(i_1 = \overline{1, k_j - 1},\quad j_1 = \overline{1, k}\right).$$

Тогда оказывается справедливой следующая

ТЕОРЕМА 1. *Частные индексы произвольной треугольной матрицы n-го порядка вида* (1) *равны между собой тогда и только тогда, когда для постоянной матрицы A, определяемой по формуле* (2), *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i = \operatorname{rang} A + n - 1. \tag{3}$$

Необходимость. Для доказательства необходимости достаточно показать, что при выполнении условия (3), для матрицы $\Delta(t)$ справедливо следующее представление:

$$\Delta(t) = [P_+(t)]^{-1} \Lambda(t) P_-(t), \tag{4}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(t^k, \ldots, t^k)$, $P_+(t)$ — полиномиальная матрица с определителем, равным единице, а $P_-(t)$ — аналитическая в D_- матрица-функция. Представление (4) эквивалентно выполнению равенств

$$\begin{gathered} t^{-k}\left[t^{k_j} P_{ij}^+(t) + \sum_{m=j+1}^{n} Q_{mj}(t) P_{im}(t)\right] = P_{ij}^-(t), \\ t^{-k} P_{in}^+(t) = P_{in}^-(t) \qquad \left(i = \overline{1, n},\quad j = \overline{1, n-1}\right), \end{gathered} \tag{5}$$

где через $P_{ij}^{\pm}(t)$ обозначены элементы матриц $P_{\pm}(t)$.

Отсюда видно, что

$$\operatorname*{ord}_{z=\infty} P_{in}^+(z) z^{-k} = 0, \quad \operatorname*{ord}_{z=\infty} P_{ij}^+(z) z^{-k} > 0$$

$$\left(i = \overline{1, n},\quad j = \overline{1, n-1}\right).$$

Поэтому полиномы, удовлетворяющие условию (5), можно искать в следующем виде

$$P_{in}^{+}(t)=\sum\nolimits_{m=0}^{k} P_{in}^{m}t^{m}, \qquad P_{ij}^{+}(t)=\sum\nolimits_{m=0}^{k-1} P_{ij}^{m}t^{m}$$
$$\left(i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n-1}\right).$$

Подставляя эти выражения в (5), и приравнивая нулю коэффициенты при положительных степенях, стоящих слева рациональных функций, получим для определения $\{P_{ij}^{m}\}_{m=0}^{k}$ систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{6}$$

в которой матрица коэффициентов (размеров $\{nk - n + 1 \times nk - n + 1\}$ определяется формулой (2), b — линейная комбинация $\{P_{ij}^{0}\}_{i,\,j=1}^{n}$, а

$$x=(P_{i1}^{k-1}, \ldots, P_{i1}^{1}, P_{i2}^{k-1}, \ldots, P_{in}^{k}, \ldots, P_{in}^{1}).$$

В силу условия (3) матрица A неособая, а поэтому в случае, когда $b \neq 0$, система (6) имеет нетривиальное решение. Для доказательства нужно еще показать, что P_{im}^{0} $(i = \overline{1, n},\ m = \overline{1, n})$ можно выбрать таким образом, чтобы $\det P(t) = 1$.

В самом деле, при выполнении условий (3) для матрицы $P(t)$ справедливо представление

$$P(t)=P_{0}(t)\prod\nolimits_{i=1}^{l}\Delta_{i}(t),$$

где $\Delta_{2m}(t)$ — верхняя треугольная матрица, на диагонали которой стоят единицы, а $\Delta_{2m+1}(t)$ — нижняя треугольная полиномиальная матрица с аналогичными диагональными элементами. $P_0(t) = \{P_{ij}^{0}\}_{i,\,j=1}^{n}$, а l — некоторое целое число. Следовательно, $\det P(t) = \det P_0(t)$. Отсюда вытекает, что выбирая матрицу $P_0(t)$ так, чтобы $\det P_0 = 1$, получим, что $\det P(t) = 1$. Кроме того, при таком выборе матрицы $P_0(t)$ система (6) имеет n нетривиальных решений.

Достаточность. Докажем теперь, что если условие теоремы 1 не выполняется, то частные индексы треугольной матрицы $\Delta(t)$ не могут равняться между собой. В самом деле, пусть частные индексы матрицы $\Delta(t)$ устойчивы, тогда справедливо разложение (4), а значит, система (6) имеет нетривиальное решение. Поэтому, если показать, что при выполнении условия

$$\operatorname{rang} A < \sum_{i=1}^{n-1} k_i - n + 1, \tag{7}$$

система (6) не имеет нетривиального решения, то можно считать теорему 1 доказанной. Если положить $P_0(t) = I$, то $b \neq 0$, а следовательно, при выполнении условия (7) решение $x \neq 0$ не существует. А поскольку каноническая факторизация матрицы $\Delta(t)$ определяется с точностью до произвольной постоянной матрицы с определителем, отличным от нуля, то такое свойство справедливо и для любой матрицы $P_0(t)$, удовлетворяющей условию $\det P_0(t) = 1$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь круговую матрицу-функцию $G(t) = \{g_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, когда контур Γ является единичной окружностью.

Коэффициенты произвольной круговой матрицы $G(t)$ можно определить через конечный набор вспомогательных функций $\{g_{ki}^{(j)}(t)\}$, $g_{j,2n-j+1}^{(j-1)}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Причем эти функции можно найти по формулам

$$g_{ki}^{(j)}(t) = g_{ki}^{(j-1)}(t) - \frac{g_{k,\,2n-j+1}^{(j-1)}(t)}{g_{j,\,2n-j+1}^{(j-1)}(t)}\, g_{ij}^{(j-1)}(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$g_{ki}^{(0)}(t) = g_{ki}(t)$$

$$\left(j = \overline{1, n-1}, \quad i = \overline{1, 2n-j}, \quad k = \overline{j+1, n}\right).$$

Предположим сначала выполнение следующих условий:

а) $$g_{ij}^{(j-1)}(t) \quad \left(i = \overline{2, n-1}, \quad j = \overline{i+1, 2n-i}\right),$$
$$g_{1j}(t)\,[g_{1,\,2n}(t)]^{-1} \quad \left(j = \overline{2, 2n-1}\right)$$

— рациональные функции.

б) Существуют такие мероморфные в D_+ функции ψ_j^+, что выполняются условия

$$|g_{j,\,j}^{(j-1)}(t) - \psi_j^+(t)\, g_{j,\,2n-j+1}^{(j-1)}(t)| = 1 \quad \left(j = \overline{1, n}, \quad t \in \Gamma\right).$$

Тогда можно показать, что имеет место факторизация

$$G(t) = \chi_+(t)\, \mathscr{L}(t)\, \overline{[\chi_+(t)]}^{-1}, \tag{8}$$

где $\chi_+(t)$ — аналитическая, неособая в D_+ матрица-функция, а $\mathscr{L}(t)$ — треугольная круговая матрица-функция, коэффициенты которой ищутся эффективно.

Функции $l_{ij}(t)$ $(i=\overline{1,2n},\ j=\overline{i+1,2n})$ при этом находятся с помощью выражений

$$l_{j-1,j}(t)=i\,[\overline{h_{j-1}}]^{-1}[\overline{h_j}]^{-1}\rho_{j-1,j}(t),$$

$$l_{ij}(t)=$$
$$=[\overline{h_i}\overline{h_j}]^{-1}\left[\sum_{k=i+1}^{j-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-i-1}|h_k|^{-2}\rho_{ik}(t)\rho_{kj}(t)+i\rho_{ij}(t)\right],$$

где $l_{ii}=h_i[\bar h_i]^{-1}$, а $\rho_{ij}(t)$ — произвольные H-непрерывные действительнозначные функции на Г. Доказательство этого факта очевидно, но громоздко, поэтому мы его опускаем.

Определим теперь для данной круговой треугольной матрицы $\mathscr{L}(t)$ конечную последовательность аналитических в D_+ функций по следующему правилу:

$$\Phi_{ij}^{+}(t)=P_+\left\{\sum_{k=i+1}^{j-1}\frac{t^{-k_i}}{\overline{h_i(t)}\,\overline{h_k(t)}}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-i-1}\cdot\right.\right.$$
$$\cdot\left.\sum_{m=i+1}^{k-1}\frac{\rho_{im}(t)\rho_{mk}(t)}{|h_m(t)|^2}+i\rho_{ik}(t)\right]\frac{\overline{\chi_k^{+}(t)}}{\chi_j^{+}(t)}+$$
$$\left.+\frac{t^{-k_i}\,\overline{\chi_j^{+}(t)}}{\overline{h_j(t)}\,\overline{h_i(t)}\,\chi_i^{+}(t)}\left[\sum_{k=i+1}^{j-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-i-1}\frac{\rho_{ik}(t)\rho_{kj}(t)}{|h_k|^2}+i\rho_{ij}(t)\right]\right\},$$

где

$$\Phi_{j-1,j}^{+}(t)=P_+\{it^{-k_{j-1}}\rho_{j-1,j}(t)\,|\chi_j^{+}(t)|^2\},$$
$$k_j=\operatorname{ind}_\Gamma\{h_j/\overline{h_j}\},$$
$$\chi_j^{+}(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}(P_++\mathbf{C}P_-)\ln\left(t^{-k_j}\frac{h_j}{\overline{h_j}}\right)\right\}.$$

Пусть $k_1\leqslant k_2\leqslant\ldots\leqslant k_{2n}$. Найдем числа g_{ij}^{l} по формулам

$$g_{ij}^{l}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\tau^{k_i}\Phi_{ij}^{+}(\tau)+\sum_{m=i+1}^{j-1}R_{im}(\tau)\Phi_{mj}^{+}(\tau)\tau^{k_m}\right]\frac{d\tau}{\tau^{l}},\tag{9}$$

где $R_{ij}=Q_{ij}-\sum_{m=i+1}^{j-1}t^{k_m}R_{im}\Phi_{mj}^{+}$, $\quad Q_{ij}=\sum_{l=k_i+1}^{k_j-1}g_{ij}^{l}t^{l}$, а числа γ_i — по формуле

$$\gamma_i=k_i-k_{2n}.$$

Тогда определяя матрицу A соотношением (2), получим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Пусть дана круговая матрица $G(t)$, удовлетворяющая условиям* а) *и* б) *и* $\operatorname{ind}_\Gamma \{\det G(t)\} = 0$. *Тогда для устойчивости частных индексов матрицы-функции $G(t)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \gamma_i = \operatorname{rang} A + 2n - 1. \qquad (10)$$

Доказательство основано на формулах, полученных во второй части [12].

Сформулируем теперь критерий равенства нулю частных индексов произвольной круговой матрицы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть дана произвольная круговая матрица $G(t)$, в которой функции $g_{ij}^{(j-1)}(t)$ принадлежат классу $h_\alpha(\Gamma)$*[1]) *и* $\operatorname{ind}_\Gamma\{\det G(t)\} = 0$. *Тогда для того, чтобы частные индексы матрицы-функции $G(t)$ равнялись нулю, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:*

1) *существуют такие рациональные функции $R_{ij}(t)$, что*

$$\| g_{ij}^{(j-1)}(t) - R_{ij}(t) \|_{H_\alpha} < \delta(\Gamma, n) \| \chi_R^+ \|_{H_\alpha}^{-1} \| \chi_R^- \|_{H_\alpha}^{-1} A^{-1};$$

2) *ранг ρ постоянной матрицы, которая соответствует круговой матрице $G_R(t) = [X_R^+(t)]^{-1} [X_R^-(t)]^{-1}$, полученной из круговой матрицы $G(t)$ заменой функций $g_{ij}^{(j-1)}(t)$ на $R_{ij}(t)$, равен $\rho = \sum_{i=1}^{2n-1} \gamma_i - 2n + 1$.*

Необходимость. Покажем, что при равенстве нулю частных индексов круговой матрицы $G(t)$, существуют рациональные функции $R_{ij}(t)$, удовлетворяющие условиям 1) и 2). В самом деле, если частные индексы матрицы $G(t)$ устойчивы, то существует такое $\delta(\Gamma, n)$, что для всех матриц, удовлетворяющих условию $\| G(t) - B(t) \| < \delta(\Gamma, n)$, частные индексы матрицы $B(t)$ также равны нулю. Выберем теперь $\varepsilon > 0$ следующим образом $A\varepsilon < \delta(\Gamma, n)$.

Тогда при выполнении условия

$$\| g_{ij}^{(j-1)}(t) - R_{ij}(t) \|_{H_\alpha} < \varepsilon, \qquad (11)$$

норма матрицы $G(t) - G_R(t)$ меньше εA. Этого можно до-

[1]) Класс таких функций изучался, в частности, в [13].

биться, так как функции $g_{ij}^{(j-1)}(t)$ аппроксимируются рациональными с любой степенью точности по норме пространства гельдеровских функций. А значит, частные индексы матрицы равны нулю, т. е. в силу результатов леммы 1 выполняется условие 2).

Возьмем теперь последовательность рациональных функций $\{R_{ij}^n\}$, сходящихся по норме пространства H_α к $g_{ij}^{(j-1)}(t)$. Тогда, начиная с некоторого номера, для всех членов последовательности выполняется условие (11), и кроме того частные индексы матриц $G_{R^n} = [X_{R^n}^+]^{-1}[X_{R^n}^-]^{-1}$ равны нулю. Следовательно, существуют пределы факторизационных множителей, и они соответственно равны X^+ и X^-, где $G = [X^+]^{-1}[X^-]^{-1}$ [14]. Это значит, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое N, что при $n > N$:

$$\|X_{R^n}^{\pm} - X^{\pm}\|_{H_\alpha} < \varepsilon_1,$$

$$\|[X_{R^n}^{\pm}]^{-1} - [X^{\pm}]^{-1}\|_{H_\alpha} < \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\|X^{\pm}\|_{H_\alpha} - \varepsilon_1 < \|X_{R^n}^{\pm}\|_{H_\alpha} < \|X^{\pm}\|_{H_\alpha} + \varepsilon_1,$$

$$[\|X_{R^n}^+\|_{H_\alpha}\|X_{R^n}^-\|_{H_\alpha}]^{-1} > [\|X^+\|_{H_\alpha} + \varepsilon_1]^{-1}[\|X^-\|_{H_\alpha} + \varepsilon_1]^{-1}.$$

Если теперь $\varepsilon > 0$, выбрать дополнительно так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \varepsilon < \frac{\delta(\Gamma, n)}{A\|X^+\|_{H_\alpha}\|X^-\|_{H_\alpha}},$$

а ε_1 искать из условия

$$0 < \varepsilon_1 < \sqrt{\frac{(\|X^+\|_{H_\alpha} + \|X^-\|_{H_\alpha})^2}{4} + \frac{\delta(\Gamma, n)}{\varepsilon A} - \|X^+\|_{H_\alpha}\|X^-\|_{H_\alpha}} - \frac{1}{2}(\|X^+\|_{H_\alpha} + \|X^-\|_{H_\alpha}), \qquad (12)$$

то кроме условия 2) выполняется также и условие 1). Следовательно, если выбрать $\varepsilon > 0$ из условия

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta(\Gamma, n)}{A\|X^+\|_{H_\alpha}\|X^-\|_{H_\alpha}}, \frac{\delta(\Gamma, n)}{A}\right\},$$

а ε_1 выбрать из условия (12), то для всех функций последовательности $\{R_{ij}^n(t)\}$, удовлетворяющих условию

$$\| g_{ij}^{(j-1)}(t) - R_{ij}^n(t) \|_{H_\alpha} < \min(\varepsilon, \varepsilon_1),$$

выполняется условие теоремы.

Достаточность. Пусть теперь выполняются условия 1) и 2), покажем, что при этом частные индексы круговой матрицы $G(t)$ равны нулю. В самом деле, если выполняется условие 2), то частные индексы матрицы $G_R = [X_R^+]^{-1}[X_R^-]^{-1}$ равны нулю.

Рассмотрим матрицу $M = X_R^+ G X_R^-$. Тогда

$$\| I - M \|_{H_\alpha} = \| I - X_R^+ G X_R^- \|_{H_\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \| X_R^+ \|_{H_\alpha} \| X_R^- \|_{H_\alpha} \| G_R - G \|_{H_\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant A \| X_R^+ \|_{H_\alpha} \| X_R^- \|_{H_\alpha} \max_{i,j} \| g_{ij}^{(j-1)}(t) - R_{ij}(t) \|_{H_\alpha} < \delta(\Gamma, n).$$

Таким образом, частные индексы матрицы-функции $M(t)$ равны нулю, откуда следует, что и частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю. Теорема 2 доказана.

Поступило
03.03.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.
[2] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций // ДАН СССР. 1985. Т. 119. № 5. С. 854—857.
[3] Боярский Б. В. Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора // Сообщ. АН ГССР. 1958. Т. 21, вып. 4. С. 391—398.
[4] Спитковский И. М. Устойчивость частных индексов краевой задачи Римана со строго невырожденной матрицей // ДАН СССР. 1974. Т. 218, № 1. С. 46—49.
[5] Спитковский И. М. Некоторые оценки для частных индексов измеримых матриц-функций // Мат. сб. 1980. Т. 111, вып. 2. С. 227—248.
[6] Спитковский И. М. О факторизации матриц-функций, хаусдорфово множество которых расположено внутри угла // Сообщ. АН ГССР. 1977. Т. 86, вып. 3. С. 561—564.
[7] Крупник Н. Я., Няга В. И. О сингулярных интегральных операторах в случае негладкого контура // Математические исследования. 1975. Т. 10, вып. 1. С. 144—164.
[8] Крупник Н. Я. О сингулярных интегральных операторах с матричными коэффициентами // Спектральные свойства операторов. Кишинев: Штиница, 1977. С. 93—100.

[9] Спитковский И. М., Николайчук А. М. Факторизация эрмитовых матриц-функций и ее приложения к граничным задачам // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, № 6. С. 767—779.
[10] Pousson H. R. Systems of Toeplitz operators on H^2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133, № 2. P. 527—536.
[11] Rabindranathan M. On the inversion of Toeplitz operators // J. Math. and. Mech. 1969. V. 19, № 3. P. 195—206.
[12] Николайчук А. М. Некоторые оценки для частных индексов краевой задачи Римана // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 6. С. 793—798.
[13] Krotov V. G. Note on the convergence of Fourier series in the spaces Λ_w^p // Acta Scien. Math. 1979. V. 41, № 3. P. 335—338.
[14] Шубин М. А. Факторизация зависящих от параметра матриц-функций в нормированных кольцах и связанные с ней вопросы теории нетеровых операторов // Мат. сб. 1967. Т. 73, вып. 4. С. 610—629.