Доклады Академии наук СССР
1978. Том 243, № 3

УДК 517.51 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. МАЛОЗЕМОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДЕФЕКТА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 6 XII 1977)

1°. Пусть $a=x_0<x_1<\ldots x_m<x_{m+1}=b$ — фиксированные вещественные числа, f — непрерывная на $[a, b]$ функция. Обозначим через S семейство сплайнов s класса (r, m) дефекта k, $k\leqslant r$:

$$s(t)=\sum_{i=0}^{r} a_i t^i+\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k-1} b_{jl}(t-x_j)_+^{r-l}, \tag{1}$$

и рассмотрим линейную задачу аппроксимации:

$$\varphi(s)=\max_{t\in[a,b]}|s(t)-f(t)|\to\min_{s\in S}. \tag{2}$$

Задача (2) всегда разрешима. Будем предполагать, что $\min\{\varphi(s)\,|\,s\in S\}>0$.

Теорема 1. *Для того чтобы сплайн $s^*\in S$ наименее уклонялся от f на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы на некотором отрезке $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$ разность $s^*(t)-f(t)$ альтернировала $r+k\mu+1$ раз, т. е. чтобы в $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$ нашлись $r+k\mu+2$ точки $t_0<t_1<\ldots<t_{r+k\mu+1}$, в которых*

$$|s^*(t_i)-f(t_i)|=\varphi(s^*),\quad i=0, 1,\ldots, r+k\mu+1,$$
$$s^*(t_i)-f(t_i)=-(s^*(t_{i-1})-f(t_{i-1})),\quad i=1, 2,\ldots, r+k\mu+1.$$

Случай $k=1$ соответствует теореме Райса ([1], [2]). На справедливость аналога теоремы Райса при аппроксимации сплайнами произвольного дефекта указывалось в ([8]).

Мы дадим принципиально новое доказательство теоремы 1, опирающееся на общую теорию минимаксных задач и на результат по интерполяции сплайнами произвольного дефекта на неполной системе узлов (следствие 1 из леммы 2).

2°. Приведем вспомогательные предложения. Рассмотрим общую линейную задачу аппроксимации

$$\varphi(P):=\max_{t\in[a,b]}|P(t)-u_0(t)|\to\min_P,$$

где

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(t),$$

$u_0, u_1,\ldots, u_n$ — непрерывные на $[a, b]$ функции. Предположим, что $\min_P \varphi(P)>0$. Введем обозначения:

$$U=(u_1, u_2,\ldots, u_n),\quad R(P)=\{t\in[a, b]\,|\,|P(t)-u_0(t)|=\varphi(P)\}.$$

Некоторым усилением (в части необходимости) известной теоремы Е. Я. Ремеза ([3]) является

Предложение. *Для того чтобы полином $P^*(t)$ наименее уклонялся от $u_0(t)$ на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись точки $t_0, t_1, \ldots, t_p$ из $R(P^*)$ и положительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ такие, что векторы $\xi_i^* U(t_i)$, $i=0, 1, \ldots, p$, где $\xi_i^* = \operatorname{sign}(P^*(t_i) - u_0(t_i))$, аффинно независимы и*

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \xi_i^* U(t_i) = 0.$$

При этом любое собственное подмножество множества $\{U(t_i)\}_{i=0}^{p}$ состоит из линейно независимых векторов.

Обратимся к оценке количества нулей сплайнов s вида (1). Точку $\bar{t}$, в которой $s(\bar{t})=0$, назовем изолированным нулем сплайна s, если при любом $\delta>0$ количество нулей $s\neq 0$ как в $(\bar{t}-\delta, \bar{t})$, так и в $(\bar{t}, \bar{t}+\delta)$. Положим $A_\nu = s^{(\nu)}(\bar{t}-0)$, $B_\nu = s^{(\nu)}(\bar{t}+0)$ и найдем минимальное ν, при котором $|A_\nu|+|B_\nu|>0$. Следуя ([4]), будем считать $\bar{t}$ нулем кратности ν, если $A_\nu B_\nu>0$, и нулем кратности $\nu+1$ в противном случае.

Отрезок $[x_i, x_j]$, где $1\leqslant i<j\leqslant m$, назовем внутренним нуль-отрезком сплайна s, если $s\equiv 0$ в $[x_i, x_j]$, но $s\neq 0$ как в (x_{i-1}, x_i), так и в (x_j, x_{j+1}). Положим $A_\nu = s^{(\nu)}(x_i-0)$, $B_\nu = s^{(\nu)}(x_j+0)$ и найдем минимальное ν, при котором $|A_\nu|+|B_\nu|>0$. Будем считать, что нуль-отрезок $[x_i, x_j]$ имеет кратность ν, если $A_\nu B_\nu>0$, и имеет кратность $\nu+1$ в противном случае. Очевидно, что кратность внутреннего нуль-отрезка не меньше $r-k+1$.

Допустим, что $s\equiv 0$ в $[x_0, x_j]$, где $j=1, 2, \ldots, m$, но $s\neq 0$ в (x_j, x_{j+1}). Если ν — наименьшее натуральное число, при котором $s^{(\nu)}(t_j+0)\neq 0$, то $[x_0, x_j]$ считается граничным нуль-отрезком сплайна s кратности $\nu+1$. Аналогично определяется кратность граничного нуль-отрезка вида $[x_i, x_{m+1}]$, $i=1, 2, \ldots, m$. Заметим, что во всех случаях кратность граничного нуль-отрезка не меньше $r-k+2$.

Длиной нуль-отрезка $[x_i, x_j]$ назовем число $j-i$. Обозначим через $Z(s)$ число всех изолированных нулей и нуль-отрезков сплайна s с учетом их кратности. Справедлива

Лемма 1. *Если $s\neq 0$, то*

$$Z(s)\leqslant r+km-kd+\varepsilon,$$

где d — суммарная длина всех нуль-отрезков, а ε — количество граничных нуль-отрезков.

С помощью леммы 1 решается задача об интерполяции сплайнами вида (1). Пусть $n=r+km+1$ и $a\leqslant t_1<\ldots<t_n\leqslant b$. Обозначим через $V(x_i, x_j)$ количество точек $t_1, \ldots, t_n$, попадающих в $[x_i, x_j]$.

Лемма 2. *Если при всех $0\leqslant i<j\leqslant m+1$*

$$V(x_i, x_j)\leqslant r+1+k(j-i-1), \tag{3}$$

то однородная система $s(t_i)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, имеет только нулевое решение.

Следствие 1. *Для того чтобы интерполяционная задача $s(t_i)=y_i$, $i=1, 2, \ldots, q$, где $q\leqslant n$, была разрешима при любых y_i, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3).

Случай $k=1$, $q=n$ соответствует теореме Шенберга — Уитни ([5]).

Следствие 2. *Определители $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$, составленные из столбцов $U(t_1), \ldots, U(t_n)$, где*

$$U(t)= =(1, t, \ldots, t^r, (t-x_1)_+^r, \ldots, (t-x_1)_+^{r-k+1}, \ldots, (t-x_m)_+^r, \ldots, (t-x_m)_+^{r-k+1}),$$

имеют один знак, если $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant b$ и выполняется условие (3).

3^0. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Согласно предложению, существует представление нуля

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \xi_i^* U(t_i)=0, \tag{4}$$

в котором $\alpha_i>0$, $t_i \in R(s^*)$, векторы $\xi_i^* U(t_i)$ аффинно независимы и любое собственное подмножество множества $\{U(t_i)\}_{i=0}^{p}$ состоит из линейно независимых векторов. Обозначим через $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$ минимальный отрезок, содержащий все t_i, а через $V(x_i, x_j)$ — количество точек $t_0, \ldots, t_p$, попадающих в $[x_i, x_j]$. Поскольку у вектор-функции $U(t)$ на $[x_i, x_j]$ линейно независимыми являются лишь компоненты

$$1, t, \ldots, t^r, \ (t-x_{i+1})_+^r, \ldots, (t-x_{i+1})_+^{r-k+1}, \ldots, (t-x_{j-1})_+^r, \ldots, (t-x_{j-1})_+^{r-k+1}, \tag{5}$$

то

$$V(x_i, x_j) \leqslant r+1+k(j-i-1) \tag{6}$$

для любого собственного подотрезка $[x_i, x_j]$ отрезка $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$. Кроме того, $p \leqslant r+k\mu+1$.

Допустив, что $p<r+k\mu+1$, получим, учитывая (6) и следствие 1 из леммы 2, что интерполяционная задача $s(t_i)=\xi_i^*$, $i=0, 1, \ldots, p$, разрешима. Но это противоречит (4). Таким образом, необходимо $p=r+k\mu+1$ и

$$\sum_{i=0}^{r+k\mu+1} \alpha_i \xi_i^* U^*(t_i)=0, \tag{7}$$

где $U^*(t)$ — вектор-функция с компонентами (5) при $i=\nu$, $j=\nu+\mu+1$.

Будем считать, что точки t_i упорядочены по возрастанию. На основании следствия 2 из леммы 2 все определители Δ_i составленные из столбцов

$$U^*(t_0), \ldots, U^*(t_{i-1}), \quad U^*(t_{i+1}), \ldots, U^*(t_{r+k\mu+1}),$$

одного знака. Но тогда в силу (7) $\xi_i^*=-\xi_{i-1}^*$ $\quad \forall i \in [1, 2, \ldots, r+k\mu+1]$.

Необходимость доказана. Стандартное доказательство достаточности, опирающееся на лемму 1, мы опускаем.

4^0. Непосредственно из теоремы Г. Ш. Рубинштейна ([6]) следует

Теорема 2. *Размерность множества решений задачи* (2) *не превосходит km и существует функция f^*, непрерывная на $[a, b]$, для которой эта размерность равна km.*

5^0. В последних двух теоремах рассматривается вопрос о единственности решения задачи (2).

Теорема 3. *Пусть $s^* \in S$ — сплайн наилучшего приближения функции f на $[a, b]$ и ему соответствует представление нуля* (7).

Тогда для любого другого сплайна наилучшего приближения s будет

$$s(t)=s^*(t) \qquad \forall t \in [x_\nu, x_{\nu+\mu+1}].$$

Доказательство. На $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$ сплайн s^* допускает представление

$$s^*(t)=\sum_{i=0}^{r} a_i^* t^i + \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} \sum_{l=0}^{k-1} b_{jl}^* (t-x_j)_+^{r-l}$$

или

$$s^*(t)=(C^*, U^*(t)).$$

Возьмем любой другой сплайн наилучшего приближения s, который на $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]$ также может быть представлен в виде

$$s(t)=(C, U^*(t)).$$

Очевидно, что

$$\xi_i^*[(C, U^*(t_i))-f(t_i)]\leqslant\xi_i^*[(C^*, U^*(t_i))-f(t_i)],$$

откуда $\xi_i^*(C-C^*, U^*(t_i))\leqslant 0$ $\forall i=0, 1, \ldots, r+k\mu+1$. На основании (7) заключаем, что $(C-C^*, U^*(t_i))=0$ $\forall i$, а поскольку векторы $U^*(t_0)$, $U^*(t_1), \ldots, U^*(t_{r+k\mu})$ линейно независимы, то $C=C^*$. Теорема доказана.

В случае $k=1$ этот результат другим методом был получен Шумейкером [2].

Теорема 4 (о строгой единственности). *Пусть $s^*\in S$ — сплайн наилучшего приближения функции f на $[a, b]$ и $[x_\nu, x_{\nu+\mu+1}]=[a, b]$.*

Тогда существует константа $\eta>0$ такая, что для всех $s\in S$

$$\varphi(s)\geqslant\varphi(s^*)+\eta\|s-s^*\|_{C([a, b])}.$$

Доказательство основано на том, что в данном случае разность s^*-f обладает полным альтернансом [7].

В заключение авторы выражают благодарность М. Б. Коробковой за консультации.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. R. Rice,* SIAM J. Number. Anal., v. 4, № 4, 557 (1967). [2] *L. L. Schumaker,* J. Math. Mech., v. 18, № 4, 369 (1968). [3] *Е. Я. Ремез,* ДАН, т. 77, № 6, 965 (1951). [4] *Н. А. Лебедев, С. М. Лозинский,* Матем. заметки, т. 16, № 1, 57 (1974). [5] *I. J. Schoenberg, A. Whitney,* Trans. Am. Math. Soc., v. 74, № 2, 246 (1953). [6] *Г. Ш. Рубинштейн,* ДАН, т. 102, № 3, 451 (1955). [7] *В. Н. Малоземов, А. Б. Певный,* ДАН, т. 212, № 1, 37 (1973). [8] *L. L. Schumaker,* In: Theory and Applications of Spline Functions, N. Y.– London, 1969, p. 65.