МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ

Е. А. Павлов

Классическая теорема Юнга утверждает, что, если $1/r + 1 = 1/p + 1/q$, то оператор свертки ограниченно действует из $L_p \times L_q$ в L_r. Хермандером [1] было доказано, что, если $p > r$, то не существует операторов, инвариантных относительно сдвига, отличных от нулевого и ограниченно действующих из L_p в L_r. В частности, если $p > r$, то нет ненулевых операторов свертки, ограниченно действующих из L_p в L_r. С. Г. Крейном и Е. М. Семеновым было показано (см. [2]), что если симметричное пространство E и измеримая функция φ таковы, что $\| \sigma_t \|_E = o(t^{1-\gamma_\varphi})$ при $t \to 0$ и $\| \sigma_t \|_E = o(t)$ при $t \to \infty$, то оператор свертки ограниченно действует из $E \times M(\varphi)$ в пространство F, где $\| x \|_F = \| x^{**}(t)\, t^{-1}\varphi(t) \|_E$. Естественно возникает задача: как должны быть связаны между собой симметричные пространства E_1 и E_2, чтобы существовал ненулевой оператор свертки, ограниченно действующий из E_1 в E_2? Постановка такой задачи является новой и для пространства L_p. В шкале пространств L_p решение этой задачи вытекает из теоремы Юнга. Действительно, если $p < r$, то $1 > 1/p - 1/r > 0$. Обозначим через $q > 1$ такое число, что $1/p - 1/r = 1 - 1/q$. Тогда из теоремы Юнга следует, что оператор свертки ограниченно действует из L_p в L_r с ядром $K \in L_q$.

В классе симметричных пространств эта задача была решена в работе автора [3]. Естественным продолжением является задача: как должны быть связаны между собой три симметричных пространства E_1, E_2, E_3, чтобы интегральный оператор свертки ограниченно действовал из $E_1 \times E_3$ в E_2?

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

Приведем необходимые определения.

Определение 1. Банахово пространство E измеримых на $[0, a]$ функций называется симметричным, если:

1) из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти при всех $t \in [0, a]$ и $y \in E$ вытекает $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости $x(t)$ и $y(t)$ следует $\|x\|_E = \|y\|_E$. Число a может быть конечным или бесконечным.

Определение 2. Пространства Лоренца и Марцинкевича определяются так:

$$\Lambda(\psi) = \left\{x(t) \,\middle|\, \|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^a x^*(t)\,\mathrm{d}\psi(t) < \infty\right\},$$

$$M(\varphi) = \left\{x(t) \,\middle|\, \sup_{0<\tau<a} \frac{1}{\varphi(\tau)} \int_0^\tau x^*(t)\,\mathrm{d}t < \infty\right\},$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — возрастающие вогнутые на $[0, a]$ функции.

Определение 3. Оператор растяжения σ_τ (подобного преобразования аргумента см., например, в [2]) определяется так:

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x\left(\dfrac{t}{\tau}\right), & \text{если } \tau > 1,\ 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 0, & \text{если } \tau < 1,\ \tau \cdot a \leqslant t \leqslant a. \end{cases}$$

Определение 4. Индексы Бойда (см., например, [2, 3]) α_E и β_E определяются так:

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to +0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau},$$

$$\beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \to E}}{\ln \tau}.$$

Операция ** определяется следующим равенством: $x^{**}(t) = \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t x^*(s)\,\mathrm{d}s$, где $x^*(t)$ — перестановка $|x(t)|$ на $[0, a]$ в убывающем порядке.

Оператор свертки с ядром $K(t)$ определяется так:

$$Tx(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^a K(t-s)\,x(s)\,\mathrm{d}s, & a \leqslant t, \\ \displaystyle\int_0^t K(t-s)\,x(s)\,\mathrm{d}s, & 0 \leqslant t \leqslant a. \end{cases}$$

Для решения указанной задачи нам понадобятся вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть симметричные пространства* E_1 *и* E_2 *таковы, что* $\| \sigma_{1/t} \|_{E_1} \in E_2$. *Тогда справедливо вложение* $E_1 \subset E_{2_{t,1}}$, *где* $\| x \|_{E_{2_{t,1}}} = \| x^{**} \|_{E_2}$. *В частности,* $E_1 \subset E_2$.

Доказательство. Получаем $\| x^{**}(t) \| \leqslant c_1 \| \sigma_{1/t} x^* \|_{E_1} \leqslant c_1 \| \sigma_{1/t} \|_{E_1} \| x \|_{E_1}$. Пользуясь монотонностью нормы в E_2, получаем $\| x^{**} \|_{E_2} \leqslant c_2 \| x \|_{E_1}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Утверждение леммы 1 является более сильным, чем теорема 5.6 из [1], так как вместо условия $\| \sigma_{1/t} \|_{E_1} \in \Lambda_{\varphi_{E_2}}$ требуется более слабое условие $\| \sigma_{1/t} \|_{E_1} \in E_2$ (это следует из вложения $\Lambda_{\varphi_{E_2}} \subset E_2$) и вместо вложения $E_1 \subset E_2$ получается более сильное вложение $E_1 \subset E_{2_{t,1}}$ (это следует из вложения $E_{t,1} \subset E$).

ЛЕММА 2. *Пусть* E_1, E_2 — *два симметричных пространства на* $[0, 1]$ *такие, что* $\beta_{E_1} < \alpha_{E_2}$. *Тогда имеет место вложение* $E_1 \subset E_{2_{t,1}}$.

Доказательство. Учитывая вложение $E_2 \subset \Lambda_{\varphi_{E_2}}$, имеем

$$\| \| \sigma_{1/t} \|_{E_1} \|_{E_2} \leqslant \int_0^1 \| \sigma_{1/t} \|_{E_1} d\varphi_{E_2} \leqslant \int_0^1 \| \sigma_{1/t} \|_{E_1} d \| \sigma_t \|_{E_2} < \infty.$$

Последний интеграл конечен в силу условия $\beta_{E_1} < \alpha E_2$ и свойств полумультипликативных функций [1]. Теперь достаточно воспользоваться леммой 1. Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* E_1, E_2, E_3 — *симметричные пространства на* $[0, 1]$ *такие, что*:

1) $\beta_{E_3} + \beta_{E_1} < 1 + \alpha_{E_2}$; 2) $\alpha_{E_1} + \beta_{E_3} > 1$. *Тогда интегральный оператор свертки ограниченно действует из* $E_1 \times E_3$ *в* E_2.

Доказательство. Из условия 1) теоремы следует, что найдется такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\varepsilon + \beta_{E_3} + \beta_{E_1} < 1 + \alpha_{E_2}; \quad \alpha_{E_1} + \beta_{E_3} + \varepsilon > 1. \quad (1)$$

Далее возьмем функцию φ такую, что $\beta_\varphi = \alpha_\varphi = \varepsilon + \beta_{E_3}$. Очевидно выполнение неравенств $\beta_{E_3} < \alpha_\varphi$; $\alpha_{E_1} + \alpha_\varphi > 1$. Из условия 2) теоремы 1 и теоремы С. Г. Крейна и Е. М. Семенова об операторе свертки (см. [2, теорема 6.16 с. 201]) следует, что оператор свертки T ограниченно действует из $E_1 \times M(\varphi)$ в $E_{1_{t,\varphi(t)/t}}$.

Несложно проверить выполнение неравенства $\| \sigma_t \|_{E_{t,\chi}} \leqslant \chi(t) \| \sigma_t \|_E$, из которого, использовать определение верхнего показателя растяжения для функции $\| \sigma_t \|_E$ и условие 1) теоремы 1, следует неравенство

$$\beta_{E_{1_{t,\varphi(t)/t}}} \leqslant \beta_\varphi - 1 + \beta_{E_1} < \alpha_{E_2}. \tag{2}$$

Из леммы 2 следует, что $E_{1_{t,\varphi(t)/t}} \subset E_2$. Итак, имеем, что оператор T ограниченно действует из $E_1 \times M(\varphi)$ в E_2. Учитывая неравенство $\beta_{E_3} < \alpha_\varphi$ и лемму 2, получаем $E_3 \subset \subset M(\varphi)$. Окончательно получаем, что T: $E_1 \times E_3 \to \to E_2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть симметричные пространства E_1, E_2, E_3 измеримых функций, определенных на* $[0, 1]$, *таковы, что*: 1) $\alpha_{E_3} + \beta_{E_1} = 1 + \alpha_{E_2}$; 2) $\alpha_{E_1} + \alpha_{E_3} > 1$. *Тогда найдется такая функция* φ, *что* $M(\varphi) \subset E_3$ *и оператор свертки ограниченно действует из* $E_1 \times M(\varphi)$ *в* E_2.

Доказательство. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha_{E_1} + \alpha_{E_3} - \varepsilon > 1$. Возьмем функцию $\varphi(t)$ (например, степенную) такую, что $\beta_\varphi = \alpha_\varphi = \alpha_{E_3} - \varepsilon$. Очевидно, что:

$$\beta_\varphi < \alpha_{E_3}; \quad \beta_\varphi + \beta_{E_1} < 1 + \alpha_{E_2}; \quad \alpha_{E_1} + \alpha_\varphi > 1.$$

Как и теореме 1, теперь из последнего неравенства следует, что T: $E_1 \times M(\varphi) \to E_2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\alpha_{E_2} < \beta_{E_1} = \alpha_{E_1}$. *Тогда существует ненулевой оператор свертки, ограниченно действующий из* E_1 *в* E_2.

Доказательство. Так как $\alpha_{E_1} = \beta_{E_1}$. Тогда $\alpha_{E_2} < \alpha_{E_1}$; обозначим $\alpha_{E_1} - \alpha_{E_2} = p$ и подберем симметричное пространство E_3 (например, L_q) таким, чтобы выполнялось равенство $\alpha_{E_1} - \alpha_{E_2} = 1 - \alpha_{E_3}$. Тогда будут справедливо равенство $\alpha_{E_3} + \beta_{E_1} = 1 + \alpha_{E_2}$ и неравенство $\alpha_{E_1} + \alpha_{E_3} = \alpha_{E_1} + 1 - \alpha_{E_1} + \alpha_{E_2} > 1$. Из теоремы 2 теперь следует, что T: $E_1 \times M(\varphi)$ в E_2, где $M(\varphi)$ таковы, что $\beta_\varphi = \alpha_\varphi = \alpha_{E_3} - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 3 для случая $\beta_{E_1} = \alpha_{E_1}$ является существенным усилением основного утверждения из [3] о существовании ненулевого оператора, инвариантного относительно сдвига и ограниченно действующего из E_1 в E_2.

Сформулируем и докажем теперь еще одну теорему об операторе свертки, которая содержит, как частный случай, теорему С. Г. Крейна и Е. М. Семенова [2] и дока-

зывается более просто — без использования теории интерполяции линейных операторов.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть симметричное пространство E и функция φ таковы, что $\alpha_E + \alpha_\varphi > 1$. Тогда интегральный оператор свертки ограниченно действует из $E_{t,1} \times \times M(\varphi)$ в пространство $E_{t,\varphi(t)/t}$*

$$E_{t,\varphi(t)/t}\, E_{\delta,\chi} = \{x(t) \mid \| x(t) \|_{E_{\delta,\chi}} = \\ = \| x^{**}(\delta(t))\, \chi(t) \|_E < \infty\}.$$

Доказательство. Имеет место неравенство (см. [4])

$$(x * y)^{**}(t) \leqslant t x^{**}(t)\, y^{**}(t) + \int_t^\infty x^*(s)\, y^*(s)\, \mathrm{d}s.$$

Делая замену переменной $s = t \cdot \tau$, получим

$$(x * y)^{**}(t)\, \varphi(t)/t \leqslant \\ \leqslant x^{**}(t)\, y^{**}(t)\, \varphi(t) + \int_1^\infty x^*(t\cdot\tau)\, y^*(t\cdot\tau)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}\tau \leqslant \\ \leqslant \varphi(t)\, x^{**}(t)\, y^{**}(t) + \int_1^\infty x^{**}(t\cdot\tau)\, \varphi(t)\, y^*(t\cdot\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqslant \\ \leqslant c_1 \| x \|_{M(\varphi)} \left(y^{**}(t) + \int_1^\infty M_\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) y^*(t\cdot\tau)\, \mathrm{d}\tau\right).$$

Пользуясь монотонностью нормы E, получим

$$\| x * y \|_{E_{t,\varphi(t)/t}} \leqslant c \| x \|_{M(\varphi)} (\| y^{**} \|_E + \| y \|_E) \leqslant \\ \leqslant c_1 \| x \|_{M(\varphi)} \| y \|_{E_{t,1}}.$$

Теорема доказана.

Следствие (теорема Крейна — Семенова). *Пусть симметричное пространство E и функция φ таковы, что: 1) $\| \sigma_t \|_E = o(t^{1-\alpha_\varphi})$ при $t \to 0$; 2) $\| \sigma_t \|_E = o(t)$ при $t \to \to \infty$. Тогда оператор свертки T: $E \times M(\varphi) \to E_{t,\varphi(t)/t}$ (мы обозначаем $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича с фундаментальной функцией φ, вместо обозначения M_{φ^*}, где $\varphi^*(t) = t/\varphi(t)$).*

Доказательство вытекает из теоремы 3 и того факта, что условие 1) эквивалентно неравенству $\alpha_\varphi + + \alpha_E > 1$ и условие 2) влечет $\| x \|_{E_{t,1}} \sim \| x \|_E$ [2, 3, 6]. Следствие доказано.

Ворошиловградский машиностроительный институт

Поступило 26.06.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хёрмандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.— М.: ИЛ, 1962.

[2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.

[3] Павлов Е. А. Об операторе свертки в симметричных пространствах.— Успехи мат. наук, 1976, т. 31, вып. 1 (187), с. 257—258.

[4] O'Neil R. Convolution operators and $L(p, g)$ spaces.— Duke Math J., 1967, v. 30, p. 129—142.

[5] Павлов Е. А. Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах.— Изв. вузов. Математика, 1982, № 2 (237), с. 36—40.

[6] Павлов Е. А. Некоторые свойства оператора Харди — Литтльвуда. — Математические заметки, 1979, т. 26, вып. 6, с. 909—912.