УДК 517.984
MSC2000 47G20

© Г.И. Синько*

Об обобщенных резольвентах одного интегро-дифференциального оператора второго порядка на полуоси

В работе рассматривается симметрический интегро-дифференциальный оператор второго порядка на полуоси. Исходя из общей формулы обобщенных резольвент А.В. Штрауса, описано при помощи краевых условий квазисамосопряженное расширение симметрического интегро-дифференциального оператора, построена формула всех обобщенных резольвент этого оператора в пространстве $L^2(0,+\infty)$. Доказано, что всякая обобщенная резольвента R_λ при любом невещественном λ является интегральным оператором.

Ключевые слова: *интегро-дифференциальный оператор, обобщенная резольвента.*

1. Пусть $a[y]$ — интегро-дифференциальное (и.-д.) выражение вида

$$a[y] = l[y] + k[y], \tag{1}$$

где $l[y] = -y'' + q(x)y$ — самосопряженное дифференциальное выражение с вещественным и суммируемым коэффициентом $q(x)$ таким, что для любого $b > 0$ $\int_0^b |q(x)|dx < +\infty$, а $k[y] = \int_0^{+\infty} K(x,s)y(s)ds$ — интегральное выражение с ненулевым вещественным симметрическим ядром Гильберта-Шмитда $K(x,s)$, удовлетворяющее условиям:

а) для любых решений $u(x,\lambda)$ уравнения $l[y] - \lambda y = 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} |K(x,s)u(s,\lambda)|ds < +\infty;$$

б) в окрестности вещественной оси существует и регулярно по λ решение однородного и.-д. уравнения $a[y] - \lambda y = 0$.

Как известно [1, с. 482], операцией l в гильбертовом пространстве $L^2(0,+\infty)$ порождается квазидифференциальный оператор L с минимальной областью определения D_L. Оператор L может иметь индекс дефекта либо (1.1), либо (2.2) [1, с. 483, теорема 2]. В настоящей работе рассматривается случай индекса дефекта (1.1).

Обозначим через $A = L + K$ и.-д. оператор, порождаемый и.-д. выражением (1) с минимальной областью определения $D_A = D_L$, где $Ky = k[y]$. Оператор K, порождаемый выражением $k[y]$, является симметричным вполне непрерывным оператором в $L^2(0,+\infty)$. Применяя теорему о возмущениии симметрического оператора [1, с. 352] к операторам A и L, заключаем, что оператор A имеет индекс дефекта (1.1).

* УГПИ, 692500, Уссурийск, Некрасова 35.. Электронная почта: `sgi@uspi.ru`

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] - \lambda y = 0, \tag{2}$$

где l — квазидифференциальная операция, определенная выше, а λ — произвольное невещественное число. Пусть $u_1(x,\lambda),\ u_2(x,\lambda)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющие соответственно начальным условиям:

$$u_1(0,\lambda) = 1, \quad u_1'(0,\lambda) = 0; \tag{3}$$

$$u_2(0,\lambda) = 0, \quad u_2'(0,\lambda) = -1. \tag{4}$$

Доказано (см., например, [6]), что для любого невещественного λ существует единственное, притом невещественное число $m(\lambda)$ такое, что

$$\psi(x,\lambda) = u_2(x,\lambda) + m(\lambda)u_1(x,\lambda) \in L^2(0,+\infty). \tag{5}$$

Функция $m(\lambda)$, определенная соотношением (5), регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть, причем при любом невещественном λ

$$m(\overline{\lambda}) = \overline{m(\lambda)}.$$

Для любой $f(x) \in L^2(0,+\infty)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(x,\lambda;f) = \psi(x,\lambda)\int\limits_0^x u_1(s,\lambda)f(s)ds + u_1(x,\lambda)\int\limits_x^{+\infty}\psi(s,\lambda)f(s)ds \quad (\mathrm{Im}\lambda > 0). \tag{6}$$

Как показано в работе [6], функция $\Phi(x,\lambda;f)$, определенная равенством (6), является значением резольвенты некоторого самосопряженного расширения оператора L на элементе f.

3. Для построения формулы всех обобщенных резольвент оператора A нам необходимо знать решение однородного и.-д. уравнения

$$a[y] - \lambda y = 0 \tag{7}$$

и решение неоднородного и.-д. уравнения

$$a[y] - \lambda y = f(x). \tag{8}$$

Для построения решения однородного и.-д. уравнения (7) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$l[y] - \lambda y = F(x), \tag{9}$$

где

$$F(x) = -\int\limits_0^{+\infty} K(x,s)y(s)ds. \tag{10}$$

Пусть $u_1(x,\lambda),\ u_2(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая соответственно начальным условиям (3) и (4). Тогда общее решение уравнения (9) можно представить в виде

$$y = c_1u_1(x,\lambda) + c_2u_2(x,\lambda) + \Phi(x,\lambda;F), \tag{11}$$

где $c_1,\ c_2$ — произвольные постоянные.

Подставляя (11) в соотношение (10) и учитывая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} K(x,s)\Phi(s,\lambda;F)ds = \int\limits_0^{+\infty} F(s)\Phi(s,\lambda;K(x,\circ))ds, \tag{12}$$

приходим к следующему интегральному уравнению:

$$F(x) = \varphi(x,\lambda) + \int\limits_0^{+\infty} k(x,s,\lambda)F(s)ds, \tag{13}$$

где

$$\varphi(x,\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} K(x,s)[c_1u_1(s,\lambda)+c_2u_2(s,\lambda)]ds, \quad k(x,s,\lambda) = -\Phi(s,\lambda;K(x,\circ)),$$

а

$$\Phi(s,\lambda;K(x,\circ)) = \psi(s,\lambda)\int\limits_0^{s} K(x,t)u_1(t,\lambda)\,dt + u_1(s,\lambda)\int\limits_s^{+\infty} K(x,t)\psi(t,\lambda)\,dt. \tag{14}$$

Итак, задача решения однородного и.-д. уравнения (7) свелась к решению интегрального уравнения (13). В силу предположения о ядре и.-д. уравнения $K(x,s)$ (см. п. 1) решение уравнения (13) существует и может быть представлено в виде

$$F(x) = \varphi(x,\lambda) + \int\limits_0^{+\infty} r(x,s,\lambda)\varphi(s,\lambda)ds, \tag{15}$$

где

$$r(x,s,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(x,s,\lambda) -$$

резольвента интегрального уравнения с ядром $k(x,s,\lambda) = k_1(x,s,\lambda)$, а

$$k_n(x,s,\lambda) = \int_0^{+\infty} k_{n-1}(x,t,\lambda)k_1(t,s,\lambda)dt \qquad (n=2,3,\dots)$$

— итерированные ядра уравнения (13) и $r(x,s,\lambda) \in L^2(0,+\infty)$.

Подставляя (15) в соотношение (11), получим общее решение однородного и.-д. уравнение в виде

$$y(x,\lambda) = c_1U_1(x,\lambda) + c_2U_2(x,\lambda) =$$
$$= c_1u_1(x,\lambda) + c_2u_2(x,\lambda) + \Phi\left(x,\lambda;\varphi(\circ,\lambda) + \int\limits_0^{+\infty} r(\circ,s,\lambda)\varphi(s,\lambda)ds\right), \tag{16}$$

где

$$U_i(x,\lambda) = u_i(x,\lambda) + \Phi(x,\lambda;G_i(\circ,\lambda)) \;\; (i=1,2), \tag{17}$$

а

$$G_i(s,\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} K(s,t)u_i(t,\lambda)dt - \int\limits_0^{+\infty} r(s,\tau,\lambda)\left(\int\limits_0^{+\infty} K(\tau,t)u_i(t,\lambda)dt\right)d\tau \;\; (i=1,2). \tag{18}$$

Нетрудно убедиться подстановкой (17) в уравнение (7), что $U_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ являются решениями однородного и.-д. уравнения (7). При проверке используется следующее известное соотношение:

$$r(s,\tau,\lambda)=k(s,\tau,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty} r(s,t,\lambda)k(t,\tau,\lambda)dt.$$

Таким образом, при условии, наложенном на ядро $K(x,s)$, однородное и.-д. уравнение (7) имеет решение, представимое в виде (16).

Для нахождения решения неоднородного и.-д. уравнения (8) преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$l[y]-\lambda y=f(x)+F(x), \tag{19}$$

где $F(x)$ по-прежнему определяется формулой (10). Решая дифференциальное уравнение (19), получим

$$y=c_1u_1(x,\lambda)+c_2u_2(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda;f+F)$$

или

$$y=c_1u_1(x,\lambda)+c_2u_2(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda;f)+\Phi(x,\lambda;F), \tag{20}$$

где $u_1(x,\lambda)$, $u_2(x,\lambda)$ — фундаментальные решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие условиям (3) и (4), $\Phi(x,\lambda,f)$ — резольвента некоторого самосопряженного оператора L на элементе f, определяемая формулой (6), а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Подставляя (20) в соотношение (10), с учетом (12) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$F(x)=\varphi_0(x,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty} k(x,s,\lambda)F(s)ds, \tag{21}$$

где

$$\varphi_0(x,\lambda)=-\int\limits_0^{+\infty} K(x,s)[c_1u_1(s,\lambda)+c_2u_2(s,\lambda)]ds-\int\limits_0^{+\infty} f(s)\Phi(s,\lambda;K(x,\circ))ds. \tag{22}$$

Решая интегральное уравнение (21), находим, что

$$F(x)=\varphi_0(x,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty} r(x,s,\lambda)\varphi_0(s,\lambda)ds, \tag{23}$$

где $r(x,s,\lambda)$ — по-прежнему резольвента интегрального уравнения (21).

Подставляя формулу (23) в соотношение (20), окончательно получаем общее решение неоднородного и.-д. уравнения (8) в виде

$$y(x,\lambda,f)=c_1u_1(x,\lambda)+c_2u_2(x,\lambda)+\Phi\left(x,\lambda;\varphi_0(\circ,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty} r(\circ,s,\lambda)\varphi_0(s,\lambda)ds\right)+\Phi(x,\lambda;f)$$

или

$$y(x,\lambda;f)=c_1U_1(x,\lambda)+c_2U_2(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda;f)+\Phi(x,\lambda;g), \tag{24}$$

где функции $U_1(x,\lambda)$, $U_2(x,\lambda)$, определенные формулой (17), являются решениями однородного и.-д. уравнения (7), а

$$g=g(s;f)=-\int\limits_0^{+\infty} K(s,t)\Phi(t,\lambda;f)dt-\int\limits_0^{+\infty} r(s,t,\lambda)\Big(\int\limits_0^{+\infty} K(t,\tau)\Phi(\tau,\lambda;f)d\tau\Big)dt.$$

Последнее соотношение с учетом (12) можно записать в следующем виде:

$$g(s;f) = -\int\limits_0^{+\infty} f(t)\Phi(t,\lambda;K(s,\circ))dt - \int\limits_0^{+\infty} r(s,t,\lambda)\left(\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\Phi(\tau,\lambda;K(t,\circ))\,d\tau\right)dt \qquad (25)$$

или

$$g(s;f) = \int\limits_0^{+\infty} g(t,s,\lambda)f(t)dt,$$

$$g(t,s,\lambda) = -\Phi(t,\lambda,K(s,\circ)) - \int\limits_0^{+\infty} r(s,\tau,\lambda)\Phi(t,\lambda,K(\tau,\circ))d\tau. \qquad (26)$$

Пусть $U_1(x,\lambda)$, $U_2(x,\lambda)$ — решения однородного и.-д. уравнения (7). Тогда (см. [6]) очевидно (оператор A имеет индекс дефекта (1.1)), что для любого невещественного λ

$$\Psi(x,\lambda) \equiv U_2(x,\lambda) + m(\lambda)U_1(x,\lambda) \in L^2(0,+\infty), \qquad (27)$$

при этом $\overline{\Psi(x,\lambda)} = \Psi(x,\overline{\lambda})$.

Легко подсчитать, что

$$\Psi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + \psi(x,\lambda)\int\limits_0^{x} u_1(s,\lambda)G(s,\lambda)ds + u_1(x,\lambda)\int\limits_x^{+\infty} \psi(s,\lambda)G(s,\lambda)\,ds, \qquad (28)$$

где

$$G(s,\lambda) = -\int\limits_0^{+\infty} K(s,t)\psi(t,\lambda)\,dt - \int\limits_0^{+\infty} r(s,\tau,\lambda)\left(\int\limits_0^{+\infty} K(t,\tau)\psi(t,\lambda)dt\right)d\tau. \qquad (29)$$

4. В соответствии с установленной формулой в работе [7] совокупность всех обобщенных резольвент R_λ оператора A определяется равенством

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\mathrm{Im}\lambda \cdot \mathrm{Im}\lambda_0 > 0), \qquad (30)$$

где λ_0 — какое-либо фиксированное невещественное число, $F(\lambda)$ — произвольная регулярная в полуплоскости операторная функция из дефектного подпространства $\mathcal{N}_{\lambda_0}$ оператора A в $\mathcal{N}_{\overline{\lambda_0}}$, не превосходящая единицы по норме, а $A_{F(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое оператором $F(\lambda)$.

Для значений $\overline{\lambda}$ из другой полуплоскости $(\mathrm{Im}\overline{\lambda} \cdot \mathrm{Im}\lambda_0 < 0)$ резольвенту $R_{\overline{\lambda}}$ можно определить, используя равенство

$$R_{\overline{\lambda}} = R_\lambda^*,$$

откуда согласно (30)

$$R_{\overline{\lambda}} = (A_{F^*(\lambda)} - \overline{\lambda}E)^{-1}, \qquad (31)$$

где $F^*(\lambda)$ — операторная функция из $\mathcal{N}_{\overline{\lambda_0}}$ в $\mathcal{N}_{\lambda_0}$, сопряженная с $F(\lambda)$, а A_{F^*} — соответствующее квазисамосопряженное расширение оператора A. В работе [7] показано, что $A_{F^*} = (A_F)^*$.

Отметим, что различным операторным функциям $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты R_λ.

Напомним [7], что $\mathcal{N}_\lambda$ $(\mathrm{Im}\lambda \neq 0)$ есть ортогональное дополнение в $L^2(0,+\infty)$ к линейному многообразию элементов вида $(A-\lambda E)f \quad (f \in D_A)$, т. е. $\mathcal{N}_\lambda$ состоит из всевозможных решений уравнения $(A^* - \overline{\lambda}E)g = 0$.

Пусть λ_0 — произвольное фиксированное невещественное число, F — линейный оператор, действующий из $\mathcal{N}_{\lambda_0}$ в $N_{\overline{\lambda_0}}$. Известно, что квазисамосопряженным расширением оператора A, определяемым оператором F, называется оператор A_F, заданный на множестве

$$D_{A_F} = D_A \dot{+} [F - I]\mathcal{N}_{\lambda_0}$$

равенством

$$A_F f = Af_0 - \overline{\lambda_0}\varphi + \lambda_0 F\varphi \quad (f_0 \in D_A, \varphi \in \mathcal{N}_{\lambda_0}).$$

Выясним, какова область определения $A_{F(\lambda)}$. Заметим, что при любом невещественном λ $(\mathrm{Im}\lambda \cdot \mathrm{Im}\lambda_0 > 0)$ оператор $A_{F(\lambda)}$ является частью оператора A^*, сопряженного с A. Введем обозначение $\Psi_\lambda = \Psi(x, \lambda)$ и заметим, что при любом невещественном λ

$$\|\Psi_\lambda\| = \|\Psi_{\overline{\lambda}}\|.$$

Положим $\lambda_0 = i$. Тогда из определения квазисамосопряженного расширения оператора A вытекает, что операторную функцию $F(\lambda)$ можно задать формулой

$$F(\lambda)\Psi_i = \omega(\lambda)\Psi_i \ \ (\mathrm{Im}\lambda > 0), \tag{32}$$

где $\omega(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, не превосходящая по модулю единицы.

Полагая

$$V_\lambda = V(x, \lambda) = \overline{\omega(\lambda)}\Psi_{-i} - \Psi_i \tag{33}$$

и используя результаты работы [6], заключаем, что многообразие $D_{A_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех элементов $y = y(x) \in D_{A^*}$, для которых имеет место равенство

$$(A^* y, V_\lambda) - (y, A^* V_\lambda) = 0.$$

В силу тождества Лагранжа это последнее равенство равносильно следующему:

$$[y(0)\overline{V'(0, \lambda)} - y'(0)\overline{V(0, \lambda)}] = 0. \tag{34}$$

Поскольку оператор A имеет индекс дефекта (1.1), то (см. [6]) для любых $y(x)$ и $V(x, \lambda)$ из D_{A^*}, справедливо соотношение

$$\lim_{x \to +\infty} [y(x)\overline{V'(x, \lambda)} - y'(x)\overline{V(x, \lambda)}] = 0.$$

Согласно (3), (4), (17) и (27) имеют место равенства

$$\Psi(0, \lambda) = U_2(0, \lambda) + m(\lambda)U_1(0, \lambda) = M(\lambda), \quad \Psi'(0, \lambda) = -1, \tag{35}$$

где

$$M(\lambda) = m(\lambda) + \int_0^{+\infty} \psi(s, \lambda)G(s, \lambda)ds, \tag{36}$$

а функция $G(s, \lambda)$ определена формулой (29). Тогда соотношению (34) можно придать вид

$$y(0)[1 - \omega(\lambda)] - [\omega(\lambda)M(i) - M(-i)]y'(0) = 0. \tag{37}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\omega(\lambda)M(i) - M(-i)}{1 - \omega(\lambda)} \quad (\mathrm{Im}\lambda > 0), \tag{38}$$

причем полагаем $\vartheta(\lambda)=\infty$, если $\omega(\lambda)=1$. Рассмотрим соотношение $\widetilde{R}_\lambda f$ формулы (24). При $c_1=c_2=0$ получим

$$\widetilde{R}_\lambda f=\Phi(x,\lambda;f+g)=\Phi(x,\lambda;f)+\Phi(x,\lambda;g), \tag{39}$$

где $\Phi(x,\lambda;f+g)$ — последние слагаемые в этой формуле.

Так как соотношение $\Phi(x,\lambda;f)$, определяемое равенством (6), есть резольвента некоторого сопряженного расширения оператора L на элементе $f(x)\in L^2(0,+\infty)$, то $\widetilde{R}_\lambda f=\Phi(x,\lambda;f+g)$ является также резольвентой некоторого самосопряженного расширения дифференциального оператора L на элементе $f+g\in L^2(0,+\infty)$. Напомним, что $g=g(s;f)$ (формула (25)).

Опираясь на последние рассуждения, докажем лемму, которая в дальнейшем будет применена при построении формулы всех обобщенных резольвент. При доказательстве леммы будет использована методика А.В. Штрауса (см. [6]).

Лемма 1. *Определенная соотношением* (36) *комплексная функция* $M(\lambda)$ *регулярна в верхней полуплоскости и имеет там положительную мнимую часть.*

Доказательство. Для любого $f(x)\in L^2(0,+\infty)$ имеем

$$\widetilde{R}_\lambda f=\Phi(x,\lambda;f+g)=\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{K}(x,s,\lambda)f(s)ds \quad (\mathrm{Im}\lambda\neq 0), \tag{40}$$

где ядро $\widetilde{K}(x,s,\lambda)$ резольвенты $\widetilde{R}_\lambda f$ может быть представлено в виде

$$\widetilde{K}(x,s,\lambda)=\begin{cases}\psi(x,\lambda)\Big(u_1(s,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty}G(s,\lambda)u_1(s,\lambda)ds\Big) & (s\le x),\\ u_1(x,\lambda)\Big(\psi(s,\lambda)+\int\limits_0^{+\infty}G(s,\lambda)\psi(s,\lambda)ds\Big) & (s>x)\end{cases}$$

или

$$\widetilde{K}(x,s,\lambda)=\begin{cases}\psi(x,\lambda)U_1(s,\lambda) & (s\le x),\\ u_1(x,\lambda)\Psi(s,\lambda) & (s>x),\end{cases} \tag{41}$$

где $\psi(x,\lambda)$ определяется формулой (5), а $U_1(s,\lambda),\ \Psi(s,\lambda)$ определяются формулами соответственно (17) и (28).

В силу (3), (4) и соотношения (41) имеем

$$\widetilde{K}(0,0,\lambda)=M(\lambda) \quad (\mathrm{Im}\lambda\neq 0). \tag{42}$$

Положим

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \left(0\le x\le \dfrac{1}{n}\right)\\ 0 & \left(x>\dfrac{1}{n}\right)\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots).$$

Тогда согласно (42) получим

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{R}_\lambda f_n,f_n)=M(\lambda). \tag{43}$$

С другой стороны, при любом n $(n=1,2,\cdots)$ $(\widetilde{R}_\lambda f_n,f_n)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией от λ, причем мнимая часть этой функции положительна, так как

$$\mathrm{Im}(\widetilde{R}_\lambda f_n,f_n)=\mathrm{Im}\lambda\cdot\|\widetilde{R}_\lambda f_n\|^2. \tag{44}$$

Из соотношений (43) и (44) следует, что $M(\lambda)$ является регулярной в верхней полуплоскости функцией, причем $\mathrm{Im}M(\lambda)\ge 0$. Заметим, что при любом невещественном λ $M(\overline{\lambda})=\overline{M(\lambda)}$.

Покажем, что $\mathrm{Im}M(\lambda) \neq 0$ для $\mathrm{Im}\lambda > 0$. Предположим противное, что $\mathrm{Im}M(\lambda) = 0$ при некотором λ ($\mathrm{Im}\,\lambda > 0$). Тогда с учетом (43) и (44) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(\widetilde{R}_\lambda f_n, f_n) = \mathrm{Im}\widetilde{K}(0,0,\lambda) = \mathrm{Im}M(\lambda). \tag{45}$$

Из предположения в формуле (45), что $\mathrm{Im}M(\lambda) = 0$, из формулы (46) вытекает

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|\widetilde{R}_\lambda f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \widetilde{K}(x,s,\lambda) n ds \right|^2 dx \ \ (\mathrm{Im}\lambda > 0). \tag{46}$$

Используя теорему Лебега, легко установить возможность предельного перехода под знаком несобственного интеграла в формуле (46).

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \widetilde{K}(x,s,\lambda) n ds = \lim_{n\to\infty} \widetilde{K}(x,\xi,\lambda) = \widetilde{K}(x,0,\lambda) \quad \left(0 < \xi < \frac{1}{n}\right),$$

то равенство (46) можно записать в виде

$$\int_0^{+\infty} \left| \widetilde{K}(x,0,\lambda) \right|^2 dx = 0.$$

Отсюда вытекает: $\widetilde{K}(x,0,\lambda) = 0$ для всех $x \in [0,+\infty]$. Последнее противоречит тому, что $\widetilde{K}'_x(+0,0,\lambda) \neq 0$, и поэтому $\mathrm{Im}M(\lambda) \neq 0$ ($\mathrm{Im}\lambda > 0$). Таким образом, лемма доказана.

Обратимся к формуле (38). Принимая во внимание, что $M(-i) = \overline{M(i)}$ и $\mathrm{Im}M(i) > 0$, легко заключить, что равенством (38) определяется взаимно однозначное соответствие между классом функций $\omega(\lambda)$, регулярных в верхней полуплоскости и не превосходящих по модулю единицы, и классом регулярных в этой полуплоскости функций $\vartheta(\lambda)$ с неотрицательной мнимой частью, причем последний класс пополнен несобственной функцией, равной бесконечности.

Согласно (37) можно, наконец, область определения $D_{A_{F(\lambda)}}$ оператора $A_{F(\lambda)}$ ($\mathrm{Im}\lambda > 0$) описать следующим образом: $D_{A_{F(\lambda)}}$ есть совокупность всех тех функций $y(x) \in D_{A^*}$, которые удовлетворяют граничному условию

$$y(0) = \vartheta(\lambda) y'(0) \quad (\mathrm{Im}\lambda > 0); \tag{47}$$

при $\vartheta(\lambda) = \infty$ это условие заменяется следующим:

$$y'(0) = 0.$$

Поскольку $F(\lambda)$ может быть произвольной операторной функцией из $\mathcal{N}_i$ в $\mathcal{N}_{-i}$, регулярной в верхней полуплоскости и не превосходящей по норме единицы, то согласно формулам (32) и (38) $\vartheta(\lambda)$ может быть любой регулярной в верхней полуплоскости функцией с неотрицательной мнимой частью или тождественно обращается в бесконечность.

Из предыдущего изложения ясно, что соответствие между классом операторных функций $F(\lambda)$ и классом функций $\vartheta(\lambda)$ взаимно однозначно. Попутно заметим, что самосопряженные расширения оператора A мы получаем тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или бесконечность.

Резюмируя, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Область определения $D_{A_{F(\lambda)}}$ квазисамосопряженного расширения $A_{F(\lambda)}$ и.-д. оператора A есть совокупность всех тех функций $y(x) \in D_{A^*}$, которые удовлетворяют граничному условию* (47), *где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости* *функция с неотрицательной мнимой частью, или обращается в бесконечность. При этом формулой* (47) *определяются самосопряженные расширения и.-д. оператора* A *в пространстве* $L^2(0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда* $\vartheta(\lambda)$ *есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность. Соответствие между классом операторных функций* $F(\lambda)$ *и классом функций* $\vartheta(\lambda)$ *взаимно однозначно.*

5. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0,+\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Положим

$$y(x,\lambda;f) = R_\lambda f \ \ (\mathrm{Im}\lambda \neq 0),$$

где R_λ — какая-либо обобщенная резольвента оператора A, определяемая операторной функцией $F(\lambda)$ согласно формуле (30). На основании формулы (30) заключаем, что $y(x,\lambda;f)$ является решением уравнения (8), причем это решение принадлежит области определения оператора $A_{F(\lambda)}$.

Для построения формулы всех обобщенных резольвент решение неоднородного и.-д. уравнения запишем в следующем виде:

$$y(x,\lambda;f) = c_1U_1(x,\lambda) + c_2\Psi(x,\lambda) + \Phi(x,\lambda;f) + \Phi(x,\lambda;g(\circ;f)), \tag{48}$$

где $U_1(x,\lambda),\ \Psi(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (7), определяемая условиями (3), (4) и (35), а постоянные c_1 и c_2 еще подлежат определению. Так как $\Phi(x,\lambda;f)$ и $\Phi(x,\lambda;g(\circ;f)) \in L^2(0,+\infty)$ как значения резольвент некоторого самосопряженного расширения оператора L (см. п. 1) на элементах f и g, то из условия принадлежности $y(x,\lambda;f) \in L^2(0,+\infty)$ следует, что

$$c_1 = 0. \tag{49}$$

Так как $y(x,\lambda;f) \in D_{A_{F(\lambda)}}$, то она должна удовлетворять граничному условию (47), где функция $\vartheta(\lambda)$ связана с $F(\lambda)$ соотношениями (32) и (38). Принимая во внимание (3), (4) и (35), получим

$$c_2M(\lambda) + \int\limits_0^{+\infty} \Psi(t,\lambda)f(t)dt = -c_2\vartheta(\lambda). \tag{50}$$

Таким образом, равенство (50) позволяет определить c_2:

$$c_2 = -\frac{1}{M(\lambda)+\vartheta(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \Psi(t,\lambda)f(t)dt. \tag{51}$$

В силу равенств (49) и (51) формула (48) принимает вид

$$R_\lambda f = -\frac{1}{M(\lambda)+\vartheta(\lambda)} \ \Psi(x,\lambda) \int\limits_0^{+\infty} \Psi(t,\lambda)f(t)dt + \Phi(x,\lambda;f) + \Phi(x,\lambda;g(\circ;f)),$$

или с учетом (41) имеем

$$R_\lambda f = \psi(x,\lambda)\int\limits_0^{x} U_1(t,\lambda)f(t)dt + u_1(x,\lambda)\int\limits_x^{+\infty} \Psi(t,\lambda)f(t)dt -$$

$$- \frac{1}{M(\lambda)+\vartheta(\lambda)} \ \Psi(x,\lambda)\int\limits_0^{+\infty} \Psi(t,\lambda)f(t)dt \qquad (Im\lambda > 0). \tag{52}$$

Принимая во внимание соотношение $R_{\overline{\lambda}} = R_\lambda^*$, легко получить из формулы (52) следующее равенство:

$$R_{\overline{\lambda}} f = \overline{\psi(x,\lambda)} \int\limits_0^x \overline{U_1(t,\lambda)} f(t)dt + \overline{u_1(x,\lambda)} \int\limits_x^{+\infty} \overline{\Psi(t,\lambda)} f(t)dt -$$

$$- \frac{1}{\overline{M(\lambda)} + \overline{\vartheta(\lambda)}} \ \overline{\Psi(x,\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \overline{\Psi(t,\lambda)} f(t)dt \qquad (Im\lambda > 0). \tag{53}$$

Формулу (53) можно было бы получить аналогично формуле (52), если учесть, что

$$u_j(x,\overline{\lambda}) = \overline{u_j(x,\lambda)} \quad (j=1,2), \Psi(x,\overline{\lambda}) = \overline{\Psi(x,\lambda)},\ M(\overline{\lambda}) = \overline{M(\lambda)}$$

и что имеет место формула (31).

Формула (52) была нами выведена в предположении, что $f(x)$ есть функция из $L^2(0,+\infty)$, обращающаяся в нуль вне конечного интервала. Однако несобственные интегралы в правой части (52) сходятся для любой $f \in L^2(0,+\infty)$. Принимая во внимание ограниченность оператора R_λ, легко отсюда заключить, что равенство (52) имеет место для любой функции $f \in L^2(0,+\infty)$.

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Совокупность всех обобщенных резольвент R_λ и.-д. оператора A при любом невещественном λ является интегральным оператором* (52), *где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью или обращается в бесконечность. При этом различным функциям $\vartheta(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Формулой* (52) *определяется резольвента самосопряженного расширения в пространстве $L^2(0,+\infty)$ и.-д. оператора A тогда и только тогда, когда $\vartheta(\lambda)$ есть вещественная постоянная или обращается в бесконечность.*

В заключение отметим, что аналогичные вопросы конечномерного возмущения дифференциальных операторов рассматривались ранее в работах [2–5].

Список литературы

1. *Ахиезер Н.И., Глазман И.Н.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.

2. *Кругликова О.П.* Обобщенные резольвенты и спектральные функции одного интегро-дифференциального оператора первого порядка в пространстве векторнозначных функций // Функциональный анализ: межвуз. сб. Ульяновск, 1997. С. 24–30.

3. *Синько Г.И.* Об обобщенной резольвенте одного интегро-дифференциального оператора // Дальневосточный математический сборник. Владивосток: Дальнаука, 1998. №6. С. 57–63.

4. *Синько Г.И.* Спектральная теория интегро-дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Уссурийск: Изд-во УГПИ, 1999. 151 с.

5. *Цыганов А.В.* О спектральных разложениях операторов дифференцирования // Функциональный анализ: межвуз. сб. Ульяновск, 1999. С. 53–63.

6. *Штраус А.В.* О спектральных функциях дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. Т. 19, №4. С. 201–220.

7. *Штраус А.В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, $\mathcal{N}$1. С. 51–86.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 2 мая 2005 г.

Sinko G.I. About generalized resolvent of one integro-diferential operator of the second order on semiaxis. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 71–81.

ABSTRACT

In this article a symmetrical integro-differential operator of the second order on semiaxis is considered. Its quasiselfadjoint extension is described, and the formula for all generalized resolvents of this operator in $L^2(0,+\infty)$ is constructed. It also prooves that any generalized resolvent R_λ is an integral operator for any nonreal λ.

Key words: *integro-differential operator, generalized resolvents.*