Алгебра и логика, 62, № 4 (2023), 441—457

DOI: 10.33048/alglog.2023.62.401 УДК 510.5+512.563

О СПЕКТРАХ РАЗРЕШИМОЙ КАТЕГОРИЧНОСТИ ДЛЯ ПОЧТИ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ*)

Н. А. БАЖЕНОВ, М. И. МАРЧУК

Работа посвящена исследованию алгоритмической сложности изоморфизмов разрешимых моделей. Вычислимая модель $\mathcal{M}$ называется *разрешимой*, если её полная диаграмма $FD(\mathcal{M})$ вычислима.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Говорят, что разрешимая модель $\mathcal{M}$ $\mathbf{d}$-*разрешимо категорична*, если для любой разрешимой копии $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $f\colon \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. *Спектром разрешимой категоричности* для модели $\mathcal{M}$ называют множество

$$\mathrm{DCatSpec}\,(\mathcal{M}) = \{\mathbf{d} : \mathcal{M}\ \mathbf{d}\text{-разрешимо категорична}\}.$$

Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{a}$ является *степенью разрешимой категоричности* для $\mathcal{M}$, если $\mathbf{a}$ — наименьшая степень в спектре $\mathrm{DCatSpec}\,(\mathcal{M})$. Разрешимую категоричность также называют *автоустойчивостью относительно сильных конструктивизаций.*

Изучение спектров разрешимой категоричности начато С. С. Гончаровым [1]. Отметим, что исследования в этой области существенно связаны с изучением *спектров категоричности* (*спектров автоустойчиво-*

*) Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ, № 075-15-2022-282.

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2023

сти): подробнее см., напр., [2–6]. Напомним, что вычислимую модель $\mathcal{S}$ называют *вычислимо категоричной* (автоустойчивой), если для любой вычислимой копии $\mathcal{A} \cong \mathcal{S}$ существует вычислимый изоморфизм, действующий из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{S}$. *Вычислимой размерностью* для $\mathcal{S}$ называют количество вычислимых копий модели $\mathcal{S}$ с точностью до вычислимых изоморфизмов.

Вычислимая категоричность и разрешимая категоричность являются классическими объектами исследования в теории вычислимых моделей. Их изучение восходит к А. И. Мальцеву [7]. Отметим, что свойства, связанные с разрешимой категоричностью, существенно отличаются от свойств вычислимой категоричности. Приведём несколько примеров, иллюстрирующих этот тезис.

(1) С. С. Гончаров [8] доказал, что вычислимая размерность для вычислимой модели может принимать произвольное значение $n \in \omega \setminus \{0\}$. В то же время А. Т. Нуртазин [9] показал следующее: если разрешимая модель $\mathcal{M}$ не является разрешимо категоричной, то $\mathcal{M}$ имеет бесконечно много разрешимых копий с точностью до вычислимых изоморфизмов.

(2) В [10, 11] установлено, что индексное множество вычислимых графов $\mathcal{M}$, таких что $\mathcal{M}$ изоморфен разрешимо категоричной модели, является $\Sigma^0_{\omega+2}$-полным. В то же время в [12] доказано, что индексное множество вычислимо категоричных моделей является Π^1_1-полным.

(3) С. С. Гончаров [1] показал, что любая в. п. тьюрингова степень является степенью разрешимой категоричности для некоторой разрешимой простой модели. Вопрос о том, является ли произвольная 2-в. п. степень степенью разрешимой категоричности для некоторой модели до сих пор остаётся открытым. С другой стороны, в [13] установлено, что любая степень $\mathbf{d} \leq \mathbf{0}'$ является степенью (вычислимой) категоричности.

Изучение разрешимой категоричности является областью, в которой применимы многие методы работы с классической вычислимой категоричностью. С другой стороны, в этой области важную роль играют теоретико-модельные методы. В частности, из классического результата А. Т. Нуртазина [9] следует, что любая разрешимо категоричная модель является почти простой.

В данной работе изучается разрешимая категоричность для почти простых моделей, образующих цепи относительно элементарных вложений.

Приведём краткий обзор связанных с этим результатов. С. С. Гончаров исследовал разрешимую категоричность моделей теорий Эренфойхта. В [14] было показано, что существует теория Эренфойхта T, у которой есть простая разрешимая модель, являющаяся разрешимо категоричной, при этом у T есть разрешимая почти простая модель, не являющаяся разрешимо категоричной. Н. А. Баженов [15] построил разрешимую модель, не обладающую степенью разрешимой категоричности. Также разрешимая категоричность и степени разрешимой категоричности исследовались в [16–26].

В [15, 27] исследовалось понятие категоричности для n-разрешимых структур относительно m-разрешимых изоморфных копий для $m, n \geq 0$. Напомним, что структура называется *n-разрешимой*, если её Σ^0_n-диаграмма разрешима.

С. С. Гончаров, Р. Миллер и В. Харизанова [28] исследовали степени разрешимой категоричности почти простых моделей, в частности доказана следующая

ТЕОРЕМА 1 [28]**.** *Пусть S — вычислимо перечислимое множество. Тогда существует разрешимая теория T^S бесконечной сигнатуры σ'_0, имеющая разрешимую, разрешимо категоричную простую модель $\mathcal{M}^S$. Кроме того, существует разрешимая теория T сигнатуры $\sigma'_0 \cup \{c\}$, обладающая разрешимой простой моделью $\mathcal{M}^c = (\mathcal{M}_c, c)$, такой что тьюрингова степень множества полных формул теории $\mathtt{Th}(\mathcal{M}^c)$ равна $\deg(S)$. При этом степень разрешимой категоричности для $\mathcal{M}^c$ равна $\deg(S)$. Также существует простая модель $\mathcal{M}^{c,d} = (\mathcal{M}_{c,d}, c, d)$ сигнатуры $\sigma'_0 \cup \{c, d\}$, такая что $\mathcal{M}^{c,d}$ разрешимо категорична и множество полных формул теории $\mathtt{Th}(\mathcal{M}^{c,d})$ вычислимо. Более того, $\mathcal{M}^S \preceq \mathcal{M}_c \preceq \mathcal{M}_{c,d}$.*

М. И. Марчук [26] показала, что приведённый выше результат верен и для моделей сигнатуры графа.

С. С. Гончаров сформулировал следующий вопрос: можно ли полу-

чить аналог теоремы 1, в котором вместо модели $\mathcal{M}^c$ с вычислимо перечислимой степенью разрешимой категоричности будет построена модель $\mathcal{M}^c$, не обладающая степенью разрешимой категоричности? Данная работа даёт положительный ответ на этот вопрос.

§ 1. Предварительные сведения

Если $\mathcal{M}$ — модель сигнатуры σ, то через $\mathtt{Th}\,(\mathcal{M})$ обозначается элементарная теория модели $\mathcal{M}$. Модель $\mathcal{M}$ называется *простой*, если $\mathcal{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $\mathtt{Th}\,(\mathcal{M})$.

Модель $\mathcal{M}$ сигнатуры σ называется *атомной*, если для любого набора $\bar{a} = a_0, \ldots, a_n$ из $\mathcal{M}$ существует формула $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ, такая что $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$ и для любой формулы $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ выполнено следующее: если $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$, то

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{x}\,(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\,.$$

Формулу φ, удовлетворяющую таким условиям, называют *полной формулой* теории $\mathtt{Th}\,(\mathcal{M})$.

Известна следующая

ТЕОРЕМА 1.1 (критерий Р. Л. Воота, см. [29, теор. 2.3.4])**.** *Пусть $\mathcal{M}$ — модель счётной сигнатуры σ. $\mathcal{M}$ будет простой в том и только том случае, если модель $\mathcal{M}$ счётная атомная.*

Будем отождествлять множество $\omega^{<\omega}$ с деревом, имеющим стандартное упорядочение: $\sigma \preccurlyeq \tau$ в том и только том случае, если σ является начальным сегментом τ. Если $\sigma \in \omega^{<\omega}$ и $n \in \omega$, то запись $\sigma\widehat{\ }n$ означает конкатенацию σ и n. Если T — поддерево $\omega^{<\omega}$, то $b(\sigma; T)$ — это *функция ветвления* T, действующая из T в $\omega \cup \{\omega\}$ по следующему правилу: для $\sigma \in T$ значение $b(\sigma; T)$ равно мощности множества $\{n \in \omega : \sigma\widehat{\ }n \in T\}$.

Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{d}$ является *PA-степенью*, если существует полное непротиворечивое расширение арифметики Пеано, вычислимое относительно $\mathbf{d}$. Известно следующее описание PA-степеней, которое получили Д. Скотт [30], К. Джокуш и Р. Соар [31] и Р. Соловей.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [32, теор. 6.6])**.** Для тьюринговой степени $\mathbf{d}$ эквивалентны следующие условия:

(a) $\mathbf{d}$ является PA-степенью;

(b) существует $\mathbf{d}$-вычислимое множество X, такое что

$$\{e \in \omega : \varphi_e(e)\downarrow = 1\} \subseteq X, \quad \{e \in \omega : \varphi_e(e)\downarrow = 0\} \subseteq \overline{X};$$

(c) для любого вычислимого бесконечного, конечно ветвящегося дерева T, являющегося поддеревом $\omega^{<\omega}$ и имеющего частично вычислимую функцию ветвления $b(\sigma; T)$, в T существует $\mathbf{d}$-вычислимый бесконечный путь.

Известно, что во множестве всех PA-степеней нет минимальных элементов.

§ 2. Основной результат

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют следующие объекты*:

— *разрешимая теория T_0 бесконечной сигнатуры σ_0, имеющая разрешимую, разрешимо категоричную простую модель $\mathcal{N}$*;

— *разрешимая теория T_1 сигнатуры $\sigma_0 \cup \{c\}$, обладающая разрешимой простой моделью $\mathcal{N}^c = (\mathcal{N}_c, c)$, такой что спектр разрешимой категоричности $\mathcal{N}^c$ равен множеству всех PA-степеней*;

— *простая модель $\mathcal{N}^{c,d} = (\mathcal{N}_{c,d}, c, d)$ сигнатуры $\sigma_0 \cup \{c, d\}$, такая что $\mathcal{N}^{c,d}$ разрешимо категорична.*

При этом $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}_c \preceq \mathcal{N}_{c,d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \{e \in \omega : \varphi_e(e)\downarrow \in \{0, 1\}\}$. Зафиксируем разнозначное перечисление множества W: $w(0), w(1), w(2) \ldots$. Положим $W_t = \{w(0), w(1), \ldots, w(t)\}$.

Идея доказательства состоит в том, что искомая модель $\mathcal{N}$ строится так же, как и модель $\mathcal{M}^S$ из теоремы 1, за исключением того, что A_i двухэлементны для всех $i \in \omega$, а в качестве S выбираем W.

Сначала определим теорию T_0 сигнатуры σ_0. Сигнатура σ_0 состоит из унарных предикатов $\{P_i\}_{i\in\omega}$, $\{Q_i\}_{i\in\omega}$, $\{A_i\}_{i\in\omega}$ и бинарных предикатов $\{F_i\}_{i\in\omega}$, $\{G_i\}_{i\in\omega}$.

Предикаты $\{P_i\}_{i\in\omega}$ вложены друг в друга следующим образом: $P_0 \supset \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots$, причём P_i и $P_i \setminus P_{i+1}$ бесконечны для всех $i \in \omega$.

Предикаты $\{Q_i\}_{i\in\omega}$ вложены друг в друга следующим образом: $Q_0 \supset \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$, причём Q_i и $Q_i \setminus Q_{i+1}$ бесконечны для всех $i \in \omega$.

Унарные предикаты A_i, $i \in \omega$, двухэлементны. Множества P_0, Q_0 и A_i, где $i \in \omega$, попарно не пересекаются.

Бинарные предикаты F_i — это графики функций, отображающих P_i на $A_{w(i)}$. Бинарные предикаты G_i — это графики функций, отображающих Q_i на A_i. Для того, чтобы определить теорию T_0, рассмотрим следующий список аксиом.

1. Аксиомы бесконечного вложения:

— Аксиомы, утверждающие, что $P_{t+1} \subseteq P_t$ и $|P_t - P_{t+1}| = \infty$ для всех $t \in \omega$, а именно

$\forall x\ (P_{t+1}(x) \Rightarrow P_t(x))$;

$\exists^{\geq m} x\ (P_t(x) \wedge \neg P_{t+1}(x))$ для каждого $m \geq 1$.

— Аксиомы, утверждающие, что $Q_{i+1} \subseteq Q_i$ и $|Q_i - Q_{i+1}| = \infty$ для всех $i \in \omega$, а именно

$\forall x\ (Q_{i+1}(x) \Rightarrow Q_i(x))$;

$\exists^{\geq m} x\ (Q_i(x) \wedge \neg Q_{i+1}(x))$ для каждого $m \geq 1$.

2. Аксиомы непересекающихся множеств:

— Аксиомы, утверждающие, что $P_0 \cap Q_0 = \varnothing$; $P_0 \cap A_j = \varnothing$ и $Q_0 \cap A_j = = \varnothing$ для всех $j \in \omega$, и $A_j \cap A_l = \varnothing$ для всех $j, l \in \omega$, таких что $j \neq l$, а именно

$\neg\exists x\ (P_0(x) \wedge Q_0(x))$;

$\neg\exists x\ (P_0(x) \wedge A_j(x))$;

$\neg\exists x\ (Q_0(x) \wedge A_j(x))$;

$\neg\exists v\ (A_j(v) \wedge A_l(v))$.

3. Аксиомы о мощности A_i:

— Аксиомы, утверждающие, что $|A_j| = 2$ для всех $j \in \omega$, а именно

$(\exists x)(\exists y)[A_j(x) \wedge A_j(y) \& (x \neq y)]$;

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big([A_j(x) \wedge A_j(y) \wedge A_j(z) \& (x \neq y)] \Rightarrow [(z = x) \vee (z = y)]\Big)$.

Предикаты $F_0, F_1, F_2, \ldots$ являются бинарными отношениями, сопоставляющими шаги с элементами, перечисленными в W. При этом F_t соединяет элементы из P_t (а следовательно и из $P_{t+1}, P_{t+2}, \ldots$) с элементами из $A_{w(t)}$. Таким образом, F_t — это функция, отображающая P_t на $A_{w(t)}$.

Бинарные предикаты G_t являются функциями, отображающими Q_t на A_t.

4. Аксиомы об F- и G-функциях:

Следующие аксиомы верны для каждого $t \in \omega$, а именно

$(\forall x)(\forall v)[F_t(x,v) \Rightarrow P_t(x) \wedge A_{w(t)}(v)]$;

$(\forall x)(\exists v)[P_t(x) \Rightarrow F_t(x,v)]$;

$(\forall x)(\forall v)(\forall u)[(F_t(x,v) \wedge F_t(x,u)) \Rightarrow v = u]$;

$(\forall v)[A_{w(t)}(v) \Rightarrow \exists^{\geq m} x\ F_t(x,v)]$ для каждого $m \geq 1$;

$(\forall y)(\forall v)[G_t(y,v) \Rightarrow Q_t(y) \wedge A_t(v)]$;

$(\forall y)(\exists v)[Q_t(y) \Rightarrow G_t(y,v)]$;

$(\forall y)(\forall v)(\forall u)[(G_t(y,v) \wedge G_t(y,u)) \Rightarrow v = u]$;

$(\forall v)[A_t(v) \Rightarrow \exists^{\geq m} y\ G_t(y,v)]$ для каждого $m \geq 1$.

5. Аксиомы об F- и G-порождённых классах эквивалентности на шаге $t+1$:

Для каждого $t \geq 0$ определим $P_{t+1} \subset P_t$ и $F_{t+1}\colon P_{t+1} \to A_{w(t+1)}$ следующим образом. Для любого набора элементов $v_0, \ldots, v_t$ из $A_{w(0)}, \ldots, A_{w(t)}$ соответственно и для любого v_{t+1} из $A_{w(t+1)}$ существует бесконечно много элементов $x \in P_t$, таких что $x \notin P_{t+1}$ и $F_0(x, v_0)$, $F_1(x, v_1)$, $\ldots$, $F_t(x, v_t)$, и также бесконечно много x, таких что $x \in P_{t+1}$ и $F_0(x, v_0), \ldots, F_t(x, v_t), F_{t+1}(x, v_{t+1})$. Аналогично определим $Q_{t+1} \subset Q_t$ и $G_{t+1}\colon Q_{t+1} \to A_{t+1}$ для всех $t \geq 0$. Следующие аксиомы верны для каждого $m \geq 1$, а именно

$$(\forall v_0)\ldots(\forall v_t)\left[\bigwedge_{i=0}^{t} A_{w(i)}(v_i) \Rightarrow (\exists^{\geq m} x)[P_t(x) \wedge \neg P_{t+1}(x) \wedge \bigwedge_{i=0}^{t} F_i(x, v_i)]\right];$$

$$(\forall v_0)\ldots(\forall v_{t+1})\left[\bigwedge_{i=0}^{t+1} A_{w(i)}(v_i) \Rightarrow (\exists^{\geq m} x)[P_{t+1}(x) \wedge \bigwedge_{i=0}^{t+1} F_i(x, v_i)]\right];$$

$$(\forall v_0)\ldots(\forall v_t)\left[\bigwedge_{i=0}^{t} A_i(v_i) \Rightarrow (\exists^{\geq m} y)[Q_t(y) \wedge \neg Q_{t+1}(y) \wedge \bigwedge_{i=0}^{t} G_i(y, v_i)]\right];$$

$$(\forall v_0)\dots(\forall v_{t+1})\left[\bigwedge_{i=0}^{t+1} A_i(v_i) \Rightarrow (\exists^{\geq m} y)[Q_{t+1}(y) \wedge \bigwedge_{i=0}^{t+1} G_i(y, v_i)]\right].$$

Искомая теория T_0 является дедуктивным замыканием списка аксиом 1–5.

Определим конечное сигнатурное ограничение $T_{0,n}$ теории T_0 для $n \in \omega$. Аксиомы $T_{0,n}$ включают в себя аксиомы с предикатами $P_0, \dots, P_n$, $Q_0, \dots, Q_n, A_0, \dots, A_{w(n)}, F_0, \dots, F_n, G_0, \dots, G_n$ и следующие дополнительные аксиомы для всех $m \geq 2$.

6. Аксиомы о бесконечном дополнении $T_{0,n}$, $n \geq 0$, а именно

$$\exists^{\geq m} x \left(\bigwedge_{i=0}^{w(n)} \neg A_i(x) \wedge \neg P_0(x) \wedge \neg Q_0(x)\right).$$

В доказательстве будем использовать обозначение

$$r(n) =_{def} \max\{w(0), \dots, w(n)\}.$$

Заметим, что $r(n) \geq n$.

ЛЕММА 2.1. *Теория $T_{0,n}$ непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно построить каноническую счётную модель $\mathcal{N}_n$ теории $T_{0,n}$ следующим образом. Зафиксируем три вычислимых непересекающихся бесконечных множества V, X и Y. Пусть $V = \bigcup_{m\in\omega} V^{[m]}$ — объединение равномерно вычислимых непересекающихся двухэлементных множеств, такое что $V^{[m]} = \{v_{2m}, v_{2m+1}\}$, где элементы перечисляются без повторений. Определим $X = \bigcup_{m\in\omega} X^{[m]}$ и $Y = \bigcup_{m\in\omega} Y^{[m]}$. Равномерно по m полагаем, что $X^{[m]}$ — это объединение равномерно вычислимых попарно непересекающихся бесконечных множеств:

$$X^{[m]} = \bigcup\{X_{\langle m; j_0, \dots, j_m\rangle} : j_0, \dots, j_m \in \omega\}.$$

Аналогично (равномерно по m) определим $Y^{[m]}$ как объединение равномерно вычислимых попарно непересекающихся бесконечных множеств:

$$Y^{[m]} = \bigcup\{Y_{\langle m; j_0, \dots, j_m\rangle} : j_0, \dots, j_m \in \omega\}.$$

Считаем, что в обоих множествах элементы перечисляются без повторений.

Зададим $A_i = V^{[i]}$ для $i \leq r(n)$. Определим

$$P_0 = P_n \cup (P_{n-1} - P_n) \cup (P_{n-2} - P_{n-1}) \cup \dots \cup (P_0 - P_1),$$

где $P_n = X^{[n]}$, $P_{n-1} - P_n = X^{[n-1]}, \dots, P_0 - P_1 = X^{[0]}$. Аналогично определяем Q_0 как объединение непересекающихся множеств:

$$Q_0 = Q_n \cup \bigcup_{1 \leq m \leq n} (Q_{m-1} - Q_m),$$

где $Q_n = Y^{[n]}$ и $Q_{m-1} - Q_m = Y^{[m-1]}$ для $m = 1, \dots, n$.

Носитель модели $\mathcal{N}_n$ зададим как $|\mathcal{N}_n| = P_0 \cup Q_0 \cup \bigcup_{1 \leq i \leq r(n)} A_i \cup \cup \bigcup_{j > r(n)} V^{[j]}$. Для $x \in X_{\langle m; j_0, \dots, j_m \rangle}$ и $t \in \{0, \dots, m\}$ полагаем $F_t(x, v_{2w(t)+i_t})$, где $i_t = 0$, если j_t чётно, и $i_t = 1$, если j_t нечётно. Для $y \in Y_{\langle m; j_0, \dots, j_m \rangle}$ и $t \in \{0, \dots, m\}$ полагаем $G_t(y, v_{2t+k_t})$, где $k_t = 0$, если j_t чётно, и $k_t = 1$, если j_t нечётно. □

Заметим, что построенная теория T_0 лишь незначительно отличается от теории T^S из доказательства теоремы 1. В связи с этим доказательства лемм 2.2–2.4 аналогичны доказательствам [28, леммы 2–6].

ЛЕММА 2.2. *Теория T_0 полна, разрешима и модельно полна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого n теория $T_{0,n}$ полна в силу того, что является счетно категоричной и имеет только бесконечные модели. Теория $T_{0,n}$ рекурсивно аксиоматизируема (равномерно по n) и полна, поэтому каждая $T_{0,n}$ разрешима. Заметим, что $T_{0,n}$ счетно категорична, $\forall\exists$-аксиоматизируема и имеет бесконечные модели, следовательно $T_{0,n}$ модельно полна. Поскольку все $T_{0,n}$ полны, модельно полны и $T_{0,n} \subseteq T_{0,n+1} \subseteq T_0$, заключаем, что T_0 полна и модельно полна. Также T_0 рекурсивно аксиоматизируема и, следовательно, разрешима. □

ЛЕММА 2.3. *Теория T_0 имеет разрешимую простую модель $\mathcal{N}$, которая является разрешимо категоричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим модели $\mathcal{N}_n$, построенные в лемме 2.1. Пусть $n \in \omega$. В силу того, что $T_{0,n}$ модельно полна, относительно $T_{0,n}$ любая формула эквивалентна $\exists$-формуле, и любая вычислимая модель

теории $T_{0,n}$ разрешима. Следовательно, $\mathcal{N}_n$ — разрешимая модель. Заметим, что для каждого $n \in \omega$ модель $\mathcal{N}_n$ является элементарной подмоделью обеднения $\mathcal{N}_{n+1}$ до сигнатуры модели $\mathcal{N}_n$. Зададим искомую модель как $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{N}_n$. Отметим, что $\bigcap\limits_{i\geq 0} P_i^{\mathcal{N}} = \emptyset$ в модели $\mathcal{N}$. Действительно, каждый элемент из $P_0^{\mathcal{N}}$ принадлежит некоторой разности $P_{k-1}^{\mathcal{N}} - P_k^{\mathcal{N}}$. Аналогично для модели $\mathcal{N}$ справедливо, что $\bigcap\limits_{j\geq 0} Q_j^{\mathcal{N}} = \emptyset$. Модель $\mathcal{N}$ разрешима, т. к. модели $\mathcal{N}_n$ разрешимы равномерно по n. Можно показать, что для любой изоморфной разрешимой копии $\mathcal{S} \cong \mathcal{N}$ можно построить вычислимый изоморфизм из $\mathcal{S}$ на $\mathcal{N}$. □

Определение теории T_1:

Теория T_1 определяется расширением сигнатуры σ_0 теории T_0 до $\sigma = \sigma_0 \cup \{c\}$, где c — константный символ, с помощью добавления следующей аксиомы к списку аксиом теории T_0.

7. Аксиомы для c:

$P_i(c)$, для каждого $i \in \omega$.

ЛЕММА 2.4. *Теория T_1 полна, разрешима и модельно полна. Кроме того, T_1 имеет разрешимую простую модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_{1,n}$ — расширение теории $T_{0,n}$, полученное добавлением константы c в сигнатуру и добавлением аксиом $P_i(c)$ для всех $i \in \omega$. Для каждого $n \in \omega$ теория $T_{1,n}$ счетно категорична и имеет только бесконечные модели, следовательно $T_{1,n}$ полна. Также $T_{1,n}$ разрешима (равномерно по n) и модельно полна.

Можно модифицировать построение $\mathcal{N}_n$ так, чтобы получить модель $\mathcal{N}_{n,c}$ с помощью добавления элемента c, для которого выполнены $P_n(c)$ и $F_t(c, v_{2w(t)})$, где $t \in \{0, \ldots, n\}$. Для каждого $n \in \omega$ полученная модель $\mathcal{N}_{n,c}$ является элементарной подмоделью $\mathcal{N}_{n+1,c}$ в соответствующей сигнатуре. Пусть $\mathcal{N}^c = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{N}_{n,c}$. Модель $\mathcal{N}^c$ разрешима, поскольку модели $\mathcal{N}_{n,c}$ разрешимы равномерно по n. Заметим, что $\mathcal{N}^c$ — это простая модель своей теории $T_1 = \mathtt{Th}(\mathcal{N}^c)$, при этом обеднение $\mathcal{N}^c$ до сигнатуры σ_0 является моделью теории T_0, реализующей неглавный тип $\{P_i(x) : i \in \omega\}$ на единственном элементе c. □

Пусть $\mathcal{M}$ — это разрешимая копия модели $\mathcal{N}^c$, имеющая носитель ω. Определим *дерево изоморфизмов* $T(\mathcal{M})$ следующим образом. Носитель дерева $T(\mathcal{M})$ состоит из всех конечных частичных функций f, действующих из ω в ω и удовлетворяющих следующим свойствам.

(1) Пусть $f = \varnothing$ или $\mathrm{dom}(f) = \{v_{2t}, v_{2t+1} : t \leq s\}$ для некоторого $s \in \omega$.

(2) Если значение $f(v_{2i})$ определено, то $f(v_{2i}) \in A_i(\mathcal{M})$, где $A_i(\mathcal{M})$ обозначает интерпретацию предиката A_i в $\mathcal{M}$. Если значение $f(v_{2i+1})$ определено, то $f(v_{2i+1}) \in A_i(\mathcal{M})$.

(3) Пусть $\mathrm{dom}(f) = \{v_{2t}, v_{2t+1} : t \leq s\}$ и $p_t \in \{v_{2t}, v_{2t+1} : t \leq s\}$. Для всех $j \leq s$ условие $\mathcal{N}^c \models F_j(c, p_t)$ выполнено в том и только том случае, если $\mathcal{M} \models F_j(c, f(p_t))$.

Порядок на дереве $T(\mathcal{M})$ задаётся стандартным образом: $f \preccurlyeq g$ в том и только том случае, если $f \subseteq g$.

В силу того, что модели $\mathcal{N}^c$ и $\mathcal{M}$ разрешимы, можно отождествить дерево $T(\mathcal{M})$ с вычислимым поддеревом $\omega^{<\omega}$. Пусть $f \in T(\mathcal{M})$, $\mathrm{dom}(f) = \{v_{2i}, v_{2i+1} : i \leq s\}$ и $A_i(\mathcal{M}) = \{u_i <_\omega l_i\}$, где $<_\omega$ — это стандартный порядок на ω. Ясно, что сыновьями f в $T(\mathcal{M})$ могут быть только отображения

$$f \cup \{(v_{2i}, u_i), (v_{2i+1}, l_i)\} \text{ и } f \cup \{(v_{2i}, l_i), (v_{2i+1}, u_i)\}.$$

Отсюда получаем, что для каждого $\sigma \in T(\mathcal{M})$ верно $b(\sigma; T(\mathcal{M})) \leq 2$. В частности, дерево $T(\mathcal{M})$ является конечно ветвящимся. Кроме того, функция $b(\sigma; T(\mathcal{M}))$ частично вычислима.

Если F — это изоморфизм из $\mathcal{N}^c$ на $\mathcal{M}$, то для любого $s \in \omega$ отображение $F \restriction \{v_{2i}, v_{2i+1} : i \leq s\}$ принадлежит $T(\mathcal{M})$. Следовательно, дерево $T(\mathcal{M})$ бесконечно.

ЛЕММА 2.5. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— это PA-степень. Тогда модель* $\mathcal{N}^c$ $\mathbf{d}$-*разрешимо категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ — это разрешимая копия модели $\mathcal{N}^c$, имеющая носитель ω. Дерево $T(\mathcal{M})$ есть вычислимое бесконечное, конечно ветвящееся поддерево $\omega^{<\omega}$, имеющее частично вычислимую функцию

ветвления. По теореме 1.2 в дереве $T(\mathcal{M})$ существует **d**-вычислимый бесконечный путь P.

Пусть $F := \bigcup_{f \in P} f$. Тогда F — это частично **d**-вычислимая функция, которую можно эффективным образом продолжить до изоморфизма $G\colon \mathcal{N}^c \cong \mathcal{M}$. В самом деле, элементы из A_i, где $i \notin W$, автоморфны в своих моделях, а элементы из A_i, где $i \in W$, связанные с константой c в $\mathcal{N}^c$, отображение F переводит в элементы, связанные с константой c в $\mathcal{M}$. Аналогично, элементы, не связанные с константой c, отображение F переводит в элементы, не связанные с константой c. Тип автоморфизма элементов, лежащих в P_0 и Q_0, полностью определяется тем, в какой из разностей $P_i - P_{i+1}$ и $Q_i - Q_{i+1}$ (соответственно) лежат эти элементы, и тем, с какими элементами из $A_{w(j)}$ и A_j, где $j \leq i$, они связаны. Поэтому несложно продолжить F до изоморфизма между $\mathcal{N}^c$ и $\mathcal{M}$. □

ЛЕММА 2.6. *Существует разрешимая копия $\mathcal{M}$ модели $\mathcal{N}^c$ со следующим свойством: если F — это произвольный изоморфизм из $\mathcal{N}^c$ на $\mathcal{M}$, то тьюрингова степень $\deg_T(F)$ будет PA-степенью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение $\mathcal{M}$ проводится аналогично конструкции $\mathcal{N}^c$ со следующими основными изменениями. В $\mathcal{M}$ мы полагаем, что $F_t(c, v_{2w(t)})$, если $\varphi_{w(t)}(w(t))\downarrow = 1$, и $F_t(c, v_{2w(t)+1})$, если $\varphi_{w(t)}(w(t))\downarrow = 0$. Используя рассуждения, аналогичные лемме 2.4, можно показать, что $\mathcal{M}$ разрешима.

Пусть F — это произвольный изоморфизм из $\mathcal{N}^c$ на $\mathcal{M}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

(a) $\{e : \varphi_e(e)\downarrow = 1\} \subseteq \{e : F(v_{2e}) = v_{2e}\}$,

(b) $\{e : \varphi_e(e)\downarrow = 0\} \subseteq \{e : F(v_{2e}) = v_{2e+1}\} = \{e : F(v_{2e}) \neq v_{2e}\}$.

Из теоремы 1.2 получаем, что $\deg_T(F)$ будет PA-степенью. □

Теперь определим расширение теории T_1 с помощью добавления нового константного символа d.

Определение теории T_2.

Теорию T_2 определим как расширение теории T_1, полученное с помощью расширения сигнатуры σ до $\sigma_2 = \sigma \cup \{d\}$ и добавления следующих

аксиом к аксиомам T_1:

8. Аксиомы для d:

$Q_i(d)$ для каждого $i \in \omega$;

$(\exists y)[F_t(c, y) \wedge G_{w(t)}(d, y)]$ для каждого $t \in \omega$.

ЛЕММА 2.7. *Теория T_2 разрешима и имеет разрешимую простую разрешимо категоричную модель $\mathcal{N}^{c,d}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем построить модель $\mathcal{N}^{c,d}$ теории T_2, в которой выполнены $P_n(c)$, $Q_n(d)$, и для каждого $t \in \omega$ верны $F_t(c, v_{2w(t)})$ и $G_t(d, v_{2t})$. Кроме того, несложно установить, что T_2 модельно полна, каждая вычислимая модель теории T_2 является разрешимой, и относительно T_2 каждая формула эквивалентна $\exists$-формуле. $\square$

Установленный в лемме 2.7 результат завершает доказательство теоремы 2.1. $\square$

Используя построенные выше теории, теории из теоремы 1 и конструкцию прямых сумм, можно получить следующий результат. Напомним, что $\{W_i\}_{i\in\omega}$ — постовская нумерация семейства всех в. п. множеств.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $f\colon \omega \to \omega \cup \{-1\}$ — это вычислимая функция. Тогда существуют следующие объекты:*

— полная теория T, такая что степень разрешимой категоричности простой модели $\mathcal{M}_0$ теории T равна $\deg(W_{f(0)})$, если $f(0) \in \omega$, и простая модель не имеет степени разрешимой категоричности, если $f(0) = -1$;

— вычислимая последовательность разрешимых почти простых моделей $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\omega}$ теории T, такая что $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_{i+1}$ для каждого $i \in \omega$;

— вычислимая последовательность конечных наборов элементов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \ldots$, такая что для каждого $n \geq 1$ модель $(\mathcal{M}_n, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ простая, при этом степень разрешимой категоричности для этой модели равна $\deg(W_{f(n)})$, если $f(n) \in \omega$, и $(\mathcal{M}_n, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ не имеет степени разрешимой категоричности, если $f(n) = -1$.

Заметим, что указанные выше результаты получены для моделей бесконечной сигнатуры. Используя кодирование, построенное в [26], можно

установить, что теоремы 2.1, 2.2 верны и для моделей сигнатуры графа.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть* $f\colon \omega \to \omega \cup \{-1\}$ *— это вычислимая функция. Тогда существуют следующие объекты*:

— полная теория T *сигнатуры графа, такая что степень разрешимой категоричности простой модели* $\mathcal{G}_0$ *теории* T *равна* $\deg(W_{f(0)})$*, если* $f(0) \in \omega$*, и простая модель не имеет степени разрешимой категоричности, если* $f(0) = -1$;

— вычислимая последовательность разрешимых графов, которые являются почти простыми моделями $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in\omega}$ *теории* T*, такая что* $\mathcal{G}_i \preceq \mathcal{G}_{i+1}$ *для каждого* $i \in \omega$;

— вычислимая последовательность конечных наборов элементов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \ldots$ *такая, что для каждого* $n \geq 1$ *модель* $(\mathcal{G}_n, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ *простая, при этом степень разрешимой категоричности для этой модели равна* $\deg(W_{f(n)})$*, если* $f(n) \in \omega$*, и* $(\mathcal{G}_n, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ *не имеет степени разрешимой категоричности, если* $f(n) = -1$.

В заключение авторы выражают свою благодарность С. С. Гончарову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, в сб. Алгоритмические вопросы алгебры и логики. К 80-летию со дня рожд. акад. С. И. Адяна, Тр. МИАН, **274**, М., МАИК, 2011, 119—129.
2. *E. B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, **49**, No. 1 (2010), 51—67.
3. *B. F. Csima, J. N. Y. Franklin, R. A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Form. Log., **54**, No. 2 (2013), 215—231.
4. *R. Miller, A. Shlapentokh*, Computable categoricity for algebraic fields with splitting algorithms, Trans. Am. Math. Soc., **367**, No. 6 (2015), 3955—3980.
5. *E. Fokina, A. Frolov, I. Kalimullin*, Categoricity spectra for rigid structures, Notre Dame J. Form. Log., **57**, No. 1 (2016), 45—57.

6. *Н. А. Баженов, И. Ш. Калимуллин, М. М. Ямалеев*, О строгих и нестрогих степенях категоричности, Алгебра и логика, **55**, № 2 (2016), 257—263.

7. *А. И. Мальцев*, Конструктивные алгебры. I, Успехи матем. н., **16**, № 3(99) (1961), 3—60.

8. *С. С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, **19**, № 6 (1980), 621—639.

9. *А. Т. Нуртазин*, Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства, Алгебра и логика, **13**, № 3 (1974), 311—323.

10. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры, Алгебра и логика, **54**, № 2 (2015), 163—192.

11. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей конечной сигнатуры и сигнатуры графов, Алгебра и логика, **54**, № 6 (2015), 663—679.

12. *R. G. Downey, A. M. Kach, S. Lempp, A. E. M. Lewis-Pye, A. Montalbán, D. D. Turetsky*, The complexity of computable categoricity, Adv. Math., **268** (2015), 423—466.

13. *B. F. Csima, K. M. Ng*, Every Δ^0_2 degree is a strong degree of categoricity, J. Math. Log., **22**, No. 3 (2022), Article ID 2250022, 18 p.

14. *С. С. Гончаров*, Об автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций почти простых моделей, УМН, **65**, № 5(395) (2010), 107—142.

15. *N. Bazhenov*, Autostability spectra for decidable structures, Math. Structures Comput. Sci., **28**, No. 3 (2018), 392—411.

16. *С. С. Гончаров*, Автоустойчивость простых моделей относительно сильных конструктивизаций, Алгебра и логика, **48**, № 6 (2009), 729—740.

17. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей нетривиальных сигнатур, Докл. АН, **461**, № 2 (2015), 140—142.

18. *С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций булевых алгебр, Сиб. матем. ж., **56**, № 3 (2015), 498—512.

19. *С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций линейных порядков, Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., **15**, № 3 (2015), 51—60.

20. *С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей естественных классов, Докл. АН., **464**, № 1 (2015), 12—14.

21. *М. И. Марчук*, Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций структур с двумя отношениями эквивалентности, Алгебра и логика, **55**, № 4 (2016), 465—477.

22. *Н. А. Баженов*, О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр, Алгебра и логика, **55**, № 2 (2016), 133—155.

23. *С. С. Гончаров, Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Индексное множество автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций групп, Сиб. матем. ж., **58**, № 1 (2017), 95—103.

24. *Н. А. Баженов, М. И. Марчук*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций графов, Сиб. матем. ж., **59**, № 4 (2018), 719—735.

25. *С. С. Гончаров, М. И. Марчук*, О степени разрешимой категоричности модели с бесконечными решениями для полных формул, Алгебра и логика, **60**, № 3 (2021), 303—312.

26. *М. И. Марчук*, Разрешимая категоричность почти простых моделей сигнатуры графа, Матем. тр., **24**, № 1 (2021), 117—141.

27. *Е. Б. Фокина, С. С. Гончаров, В. Харизанова, О. В. Кудинов, Д. Туретски*, Индексные множества n-разрешимых структур, категоричных относительно m-разрешимых представлений, Алгебра и логика, **54**, № 4 (2015), 520—528.

28. *S. S. Goncharov, V. Harizanov, R. Miller*, On decidable categoricity and almost prime models, Sib. Adv. Math., **30**, No. 3 (2020), 200—212.

29. *Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн*, Теория моделей, М., Мир, 1977.

30. *D. Scott*, Algebras of sets binumerable in complete extensions of arithmetic, Proc. Sympos. Pure Math., **5** (1962), 117—121.

31. *C. G. Jockusch, jun., R. I. Soare*, Π^0_1 classes and degrees of theories, Trans. Am. Math. Soc., **173** (1972), 33—56.

32. *S. G. Simpson*, Degrees of unsolvability: A survey of results, in: J. Barwise (ed.) Handbook of mathematical logic (Stud. Logic Found. Math., **90**), Amsterdam etc., North-Holland Publ. Co., 1977, 631—652.

Поступило 28 октября 2022 г.

Окончательный вариант 19 июля 2024 г.

Адреса авторов:

БАЖЕНОВ Николай Алексеевич,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский гос. ун-т,

г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: bazhenov@math.nsc.ru

МАРЧУК Маргарита Игоревна,

Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский гос. ун-т,

г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: margaretmarchuk@gmail.com