N. V. Zepelev, Interference SH waves in transversely isotropic inhomogeneous half space, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 228–234

Н.В.Цепелев

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ SH ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ.

Рассмотрим распространение интерференционных поверхностных поперечных SH волн в трансверсально-изотропном неоднородном полупространстве в случае, когда плоскость изотропии среды не совпадает с граничной плоскостью. Пусть в координатах (x,y,z) полупространство, занятое средой, определяется неравенством $z \geq 0$. Существование в плоском случае указанных волн, не связанных с колебаниями другой поляризации, возможно при условии, что скорости распространения и плотность среды не зависят от координаты y, а плоскость распространения волн проходит через нормали к границе среды и к плоскости изотропии. Уравнение движения в этом случае имеет следующий вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+ \left(\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\omega^2\rho u=0. \tag{I}$$

Здесь обозначено

$$\begin{cases} a=\mu\cos^2\alpha+\mu''\sin^2\alpha, \\ b=(\mu''-\mu)\sin\alpha\cos\alpha, \\ c=\mu\sin^2\alpha+\mu''\cos^2\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

μ и μ'' – упругие постоянные, ρ – плотность, а α – угол наклона плоскости изотропии к граничной поверхности.

Пусть граница полупространства свободна от напряжений, то есть на ней выполняется условие

$$\tau_{yz}\Big|_{z=0}=b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0. \tag{3}$$

Будем далее рассматривать лишь такие собственные колебания среды, которые сосредоточены в окрестности границы $z=0$. Этим колебаниям, очевидно, соответствуют лучи "не сильно отклоняющиеся" от границы. Известно, что в анизотропной среде лучи и фронты волн не ортогональны друг другу. Это обстоятельство вызывает некоторые особенности рассматриваемого процесса и вынуждает разыскивать решение не в традиционной форме (см., например [I]), а в несколько отличающейся от нее

$$u=\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{-\frac{n}{3}}U_n(x,z)e^{i[\omega p(x)+\omega q(x)z+\omega^{1/3}\tau(x)]}\left[1+O(\omega^{-\frac{N}{3}})\right], \qquad (4)$$

то есть добавлять в фазу волны слагаемое $i\omega q(x)z$.

Вводя новую координату

$$\zeta=\omega^{2/3}z \qquad (5)$$

и действуя по обычной схеме метода [I] , для определения неизвестных функций U_n, p, q и τ , входящих в выражение (4), получаем рекуррентную систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{m}\mathcal{L}_n U_{m-n}=0, \qquad (6)$$

$$m=0,1,2,\ldots\ .$$

и граничных условий

$$\sum_{n=0}^{m}M_n U_{m-n}\Big|_{\zeta=0}=0, \qquad (7)$$

$$m=0,1,2,\ldots$$

Входящие в них операторы $\mathcal{L}_n$ и M_n определяются равенствами:

$$\begin{cases}\mathcal{L}_0U=(\rho_0-a_0p'^2-2b_0p'q-c_0q^2)U,\\ \mathcal{L}_1U=2i(b_0p'+c_0q)\dfrac{\partial U}{\partial\zeta},\\ \mathcal{L}_2U=c_0\dfrac{\partial^2U}{\partial\zeta^2}-\left[2(a_0p'+b_0q)(\tau'+q'\zeta)+\right.\\ \qquad\left.+(a_1p'^2+2b_1p'q+c_1q^2-\rho_1)\zeta\right]U,\\ \mathcal{L}_3U=2i(a_0p'+b_0q)\dfrac{\partial U}{\partial x}+2i\left[b_0\tau'+(b_0q'+c_1q+b_1p')\zeta\right]\dfrac{\partial U}{\partial\zeta}+\\ \qquad+i(a_0p''+2b_0q'+a_0'p'+b_0'q+b_1p'+c_1q)U,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \qquad (8)$$

$$
\begin{cases}
M_0 U = i(b_0 p' + c_0 q) U, \\
M_1 U = c_0 \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \\
M_2 U = i b_0 \tau' U, \\
\text{- - - - - - - - - - -}
\end{cases}
\tag{9}
$$

а величины a_n, b_n, c_n и ρ_n разложениями

$$
\begin{cases}
a = a + \omega^{-2/3} a_1 \zeta + \ldots, \\
b = b_0 + \omega^{-2/3} b_1 \zeta + \ldots, \\
c = c_0 + \omega^{-2/3} c_1 \zeta + \ldots, \\
\rho = \rho_0 + \omega^{-2/3} \rho_1 \zeta + \ldots,
\end{cases}
\tag{10}
$$

Первые два уравнения системы (6) удовлетворяются при выполнении равенств

$$
\begin{cases}
a_0 p'^2 + 2 b_0 p' q + c_0 q^2 = \rho_0, \\
b_0 p' + c_0 q = 0.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Введем в рассмотрение функцию

$$
F(x,z) = \sqrt{\frac{\rho c}{ac - b^2}} = \sqrt{\frac{\rho c}{\mu \mu''}} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu''} \sin^2 \alpha + \frac{\rho}{\mu} \cos^2 \alpha}. \tag{12}
$$

С ее помощью решение уравнений (11) можно записать следующим образом

$$
\begin{cases}
p = \displaystyle\int_{x_0}^{x} F(x,0)\, dx, \\
q = -\dfrac{b_0}{c_0} F(x,0).
\end{cases}
\tag{13}
$$

Учитывая полученные выражения третье уравнение системы (6) может быть приведено к виду

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} - \frac{2\rho_0}{c_0 F(x,0)} \left[\tau' - \varphi(x) \zeta \right] U = 0. \tag{14}
$$

Здесь положено

$$\varphi(x) = \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=0} - q' = \left[\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_0}{c_0}F\right)\right]\Big|_{z=0} \tag{15}$$

Решением уравнения (14) является функция Эйри. Выбор в качестве U_0 конкретной функции определяется требованием выполнения поставленных условий нашей задачи (сосредоточенности решения в окрестности свободной границы $z=0$).и зависит от знака $\varphi(x)$ из (23). Будем предполагать далее, что всюду на границе $z=0$ $\varphi(x)$ не имеет нулей. В таком случае при положительных $\varphi(x)$ в качестве решения уравнения (14) необходимо брать функцию W_1 , а при отрицательных $\varphi(x)$ функцию V . Очевидно, в нашей задаче выражение $\varphi(x)$ из (15) выполняет роль эффективного радиуса кривизны, введенного для изотропной среды в работе [2] . Нужно отметить, что вид решения уравнения (14) в отличие от случая изотропной среды определяется не только знаком производной скорости по вертикали, но существенным образом зависит и от производной по координате x , что является прямым следствием анизотропии. Пусть далее для определенности $\varphi(x)<0$. В таком случае

$$U_0 = A_0(x)V(\beta+\gamma\zeta), \tag{16}$$

причем

$$\beta = \tau'\left[\frac{2\rho_0}{c_0\varphi^2 F(x,0)}\right]^{1/3},$$
$$\gamma = -\left[\frac{2\rho_0\varphi}{c_0 F(x,0)}\right]^{1/3} \tag{17}$$

Как обычно, при использовании данного метода для полного определения нулевого приближения (нахождения функции $A_0(x)$ из (16)) необходимо рассмотреть следующее, то есть четвертое, уравнение системы (6). В данном случае оно записывается следующим образом

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial\zeta^2} - \frac{2\rho_0}{c_0 F(x,0)}\left[\tau' - \varphi(x)\zeta\right]U_1 =$$
$$= -\frac{i}{c_0}\left[\frac{2\rho_0 A_0'}{F(x,0)} - \left(\Phi - \frac{\rho_0'}{F(x,0)}\right)A_0\right]V(\beta+\gamma\zeta) -$$
$$- \frac{2i\gamma}{c_0}\left[b_0\tau' + \left(\Phi - \frac{\rho_0\gamma'}{\gamma F(x,0)}\right)\right]A_0 V'(\beta+\gamma\zeta). \tag{18}$$

Здесь обозначено

$$\Phi=\frac{b_0^2F(x,0)}{c_0}\left[\frac{d}{dx}\ln\frac{c_0}{b_0F(x,0)}+\frac{c_0}{b_0}\frac{d}{dz}\ln\frac{b}{c}\Big|_{z=0}\right]. \tag{19}$$

Решение уравнения (18) разыскивается (см. [1]) в форме

$$U_1=(A_1+B_1\zeta+C_1\zeta^2)U(\beta+\gamma\zeta)+\mathcal{D}_1U'(\beta+\gamma\zeta). \tag{20}$$

Коэффициенты B_1, C_1 и $\mathcal{D}_1$ оказываются следующими

$$B_1=-\frac{ib_0}{c_0}\tau'A_0,$$

$$C_1=-\frac{i}{2c_0}\left[\Phi-\frac{\rho_0\gamma'}{\gamma F(x,0)}\right]A_0, \tag{21}$$

$$\mathcal{D}_1=\frac{i}{c_0\gamma^2}\left[-2A_0'+\left(\frac{\gamma'}{\gamma}-\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)A_0\right]\frac{\rho_0}{F(x,0)}.$$

Потребуем далее от решения (4), чтобы оно удовлетворяло граничному условию (7). В нулевом приближении (равенство $M_0U_0|_{\zeta=0}=0$) это условие удовлетворения автоматически за счет того, что в нашем случае $M_0\equiv 0$. В первом приближении оно сводится к требованию

$$M_0U_1+M_1U_0\Big|_{\zeta=0}=c_0A_0U'(\beta)=0, \tag{22}$$

которое выполняется при $\beta=-\tilde{\rho}_n$, где $-\tilde{\rho}_n$ – корни производной функции Эйри U. Отсюда, учитывая, что β и τ связаны равенством (17), находим

$$\tau(x)=-\tilde{\rho}_n\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{c_0\varphi^2F(x,0)}{2\rho_0}\right]^{1/3}dx. \tag{23}$$

Для удовлетворения граничного условия в следующем приближении необходимо выполнение равенства

$$M_0U_2+M_1U_1+M_2U_0\Big|_{\zeta=0}=c_0\frac{\partial U_1}{\partial\zeta}+ib_0\tau'U_0\Big|_{\zeta=0}=0, \tag{24}$$

которое после подстановки в него выражений для U_0 и U_1 из (16) и (20) приводится к виду

$$c_0B_1+\gamma^2\mathcal{D}_1+ib_0\tau'A_0=0. \tag{25}$$

Учитывая вид коэффициентов B_1 и $\mathcal{D}_1$ из (21), легко показать, что равенство (25) удовлетворяется при условии

$$2A_0' = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)A_0 . \qquad (26)$$

Отсюда определяется вид коэффициента

$$A_0 = Q_0\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0}} , \qquad (27)$$

где Q_0 – произвольная постоянная.

Таким образом, нулевое приближение нашего решения при $\omega \to \infty$ с точностью до произвольного постоянного множителя выражается следующей формулой

$$u_n = Q_n\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0}}\, V(-\tilde{p}_n + \gamma\zeta)\, e^{i\omega[p+qz+\omega^{-2/3}\tau_n]}\left[1+O(\omega^{-1/3})\right], \qquad (28)$$

причем входящие в нее величины определяются из (10), (13), (15), (17) и (23). Индекс n у u_n соответствует n -ному корню уравнения (22), при этом, как и ранее, при рассмотрении подобных задач имеет смысл рассматривать лишь несколько первых корней $-\tilde{p}_n$

Полученное выражение для n -ной гармоники интерференционной волны из (28) дает возможность выписать приближенные значения ее фазовой и групповой скорости.

$$v_{\Phi}^{(n)} = \frac{1}{F(x,0)} + \frac{\omega^{-2/3}\tilde{p}_n}{F^2(x,0)}\left[\frac{c_0\varphi^2(x)F(x,0)}{2\rho_0}\right]^{1/3}\left[1+O(\omega^{-2/3})\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{a_0c_0-b_0^2}{\rho_0c_0}}\left\{1 - \frac{p_n}{\omega^{2/3}}\left[\frac{c_0\varphi^2(x)}{2\rho_0}\,\frac{a_0c_0-b_0^2}{\rho_0c_0}\right]^{1/3}\right\}\left[1+O(\omega^{-4/3})\right]. \qquad (29)$$

$$v_{\Gamma P}^{(n)} = \frac{1}{F(x,0)} + \frac{\omega^{-2/3}\tilde{p}_n}{3F^2(x,0)}\left[\frac{c_0\varphi^2(x)F(x,0)}{2\rho_0}\right]^{1/3}\left[1+O(\omega^{-2/3})\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{a_0c_0-b_0^2}{\rho_0c_0}}\left\{1 + \frac{\tilde{p}_n}{3\omega^{2/3}}\left[\frac{c_0\varphi^2(x)}{2\rho_0}\,\frac{a_0c_0-b_0^2}{\rho_0c_0}\right]^{1/3}\right\}\left[1+O(\omega^{-4/3})\right].$$

Эти выражения по своей структуре совпадают с полученными ранее в работе [3] для случая, когда α – угол наклона плоскости изотропии к дневной поверхности равен нулю. Их отличие заключается в том, что скорости $v_{\Phi}^{(n)}$ и $v_{\Gamma P}^{(n)}$ в нулевом приближении существенно зависят от угла наклона α, а также в том, что эффективный радиус кривизны в нашей задаче имеет вид, определяемый выражением (15).

Если мы будем рассматривать случай положительного эффективного радиуса кривизны $(\varphi(x)>0)$, то соответствующее решение, как указывалось в работе [I], получается заменой в (28) функции V на функцию W, а корень $-\widetilde{\rho}_n$ - заменяется на корень уравнения $W_1'(\beta)=0$.

Литература

1. Крауклис П.В., Цепелев Н.В. О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1973, т.34, с.72-92.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972, 456 с.
3. Крауклис П.В. Цепелев Н.В. Волны Лява в трансверсально-изотропном неоднородном полупространстве. - В кн.: Вопросы динамической теории распространения волн, т.XX, Л., 1980, с.20-26.

Tcsepelev N.V. Interference SH waves in transversaly isotropic inhomogeneous half space.

Love waves in transversaly isotropic inhomogeneous half space in the case, when the plane of isotropy isn't coincide with the boundary plane, are considered. The dependence of the solution upon the angle between these planes is investigated.