



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Chebotarev, Optimal multiplicative control of a semilinear parabolic equation,  
*Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2023, Volume 23, Number 2, 270–277

<https://www.mathnet.ru/eng/dvmg525>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 22:04:04



УДК 517.95  
MSC2020 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев<sup>1</sup>

## Оптимальное мультипликативное управление полулинейным параболическим уравнением

Представлен анализ задач оптимального управления для нелинейной параболической начально-краевой задачи, моделирующей динамику коллективного поведения сообщества бактерий. Получены оценки решения начально-краевой задачи, доказана разрешимость задач управления и выведены условия оптимальности. Для задачи с финальным наблюдением установлен слабый принцип «bang-bang».

**Ключевые слова:** задачи оптимального управления, система оптимальности, полулинейное параболическое уравнение, мультипликативное управление.

DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202324>

### 1. Введение. Постановка задачи управления

Задачи оптимального управления для нелинейных уравнений реакции–диффузии представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и для приложений. В данной работе рассматривается класс задач оптимального мультипликативного управления полулинейным параболическим уравнением, моделирующим, например, динамику коллективного поведения сообщества бактерий, обладающего «quorum-sensing» — чувством кворума — способностью коллективно действовать на внешние возбудители. Прикладная значимость анализа таких задач связана с важной терапевтической концепцией, направленной на управление кворумом бактерий, поскольку именно чувство кворума отвечает за регулирование различных факторов вирулентности при бактериальных инфекциях [1, 2].

Начально-краевая задача записывается в виде задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами, для которой ставятся задачи оптимального управления. Выводятся априорные оценки решения задачи Коши и на их основе доказывается разрешимость экстремальных задач. Далее представлено получение невырожденных условий оптимальности. В качестве приложения рассмотрена задача

<sup>1</sup> Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Дальневосточный федеральный университет, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. Электронная почта: [chebotarev.ayu@dvfu.ru](mailto:chebotarev.ayu@dvfu.ru)

управления с финальным наблюдением, установлена слабая релейность оптимального управления.

В ограниченной липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$  рассматривается следующая начально-краевая задача, описывающая управляемую систему.

$$\partial y / \partial t - a \Delta y = f_0(x, t) + f(x)h(y) - u(t)y, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$a \partial_n y + \gamma(y - y_b) \Big|_{\Sigma = \Gamma \times (0, T)} = 0, \quad y \Big|_{t=0} = y_0. \quad (2)$$

Здесь  $y = y(x, t)$  — состояние системы,  $u = u(t)$  — управление. Функция  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является нечетной, дифференцируемой и ограниченной. Функции  $f_0, f, \gamma$  заданы,  $a = \text{const} > 0$ . Через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\Gamma$ .

Далее используем пространства Лебега  $L^s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , и пространства Соболева  $H^s = W_2^s$ ;  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ . При этом  $V \subset H = H' \subset V'$ ;  $(\eta, \zeta)$  — значение функционала  $\eta \in V'$  на элементе  $\zeta \in V$  и скалярное произведение в  $H$ , если  $\eta, \zeta \in H$ ,  $\|\eta\|^2 = (\eta, \eta)$ . Через  $L^p(0, T; X)$  (соотв.  $C([0, T], X)$ ) обозначаем пространство строго измеримых функций класса  $L^p$  (соотв. непрерывных), определенных на  $[0, T]$ , со значениями в банаховом пространстве  $X$ ;

$$Y = \left\{ y : y \in L^2(0, T; V), y' \in L^2(0, T; V') \right\},$$

где  $y' = dy/dt$ . Отметим, что пространство  $Y$  непрерывно вложено в  $C([0, T]; H)$ .

Пусть исходные данные удовлетворяют условиям

(i)  $y_0 \in H, f_0 \in L^2(Q), f \in L^\infty(\Omega), \gamma \in L^\infty(\Sigma), \gamma \geq \gamma_0 > 0, \gamma_0 = \text{const}, y_b \in L^2(\Sigma);$

(ii)  $h \in C^1(\mathbb{R}), h(-s) = -h(s), |h(s)| \leq k_0, 0 \leq h'(s) \leq k_1; u \in L^2(0, T).$

Определим оператор  $A : V \rightarrow V'$  и функцию  $g_b \in L^2(0, T; V')$ , используя следующие равенства, справедливые для  $y, z \in V$ :

$$(Ay, z) = a(\nabla y, \nabla z) + \int_{\Gamma} \gamma y z \, d\Gamma, \quad (g_b, z) = \int_{\Gamma} \gamma y_b z \, d\Gamma.$$

Билинейная форма  $(Ay, z)$  может быть выбрана в качестве скалярного произведения в  $V$ , и при этом норма  $\|y\|_V = (Ay, y)^{1/2}$  эквивалентна стандартной норме пространства  $V$ .

Функция  $y \in Y$  называется *слабым решением задачи* (1), (2), если

$$y' + Ay = f_0 + g_b + f \cdot h(y) - u \cdot y, \quad t \in (0, T); \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

Рассмотрим пространство управлений  $U = L^2(0, T)$ , множество допустимых управлений  $U_{ad} \subset U$ , пространство состояний  $Y$  и целевой функционал  $J : Y \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что

(j)  $U_{ad} \subset U$  непустое, выпуклое и замкнутое множество;

(jj)  $J$  слабо полунепрерывен снизу.

(jjj)  $\forall r > 0$  множество  $\{u \in U_{ad} : J(y, u) \leq r, y \in Y\}$  или  $U_{ad}$  ограничено.

Определим оператор ограничений  $F : Y \times U \rightarrow L^2(0, T; V') \times H$ ,

$$F(y, u) = \left\{ y' + Ay - f_0 - g_b - f \cdot h(y) + u \cdot y, y(0) - y_0 \right\}.$$

**Задача (CP).** Найти пару  $\{\hat{y}, \hat{u}\} \in Y \times U_{ad}$  так, что

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \inf \left\{ J(y, u) : u \in U_{ad}, F(y, u) = 0 \right\}. \quad (4)$$

**Пример.** В постановке задачи (CP) выберем функции  $f, f_0, h$  и целевой функционал  $J$  следующим образом:  $f = f(x) = \sum_{j=1}^n \exp(-|x - x_j|^2/\sigma^2)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $x_j$  — фиксированные точки в  $\Omega$ ,  $f_0 = \alpha f$ ,  $h(s) = \alpha + \beta s^r / (s_0 + s^r)$ ,  $s \geq 0$ ,

$$J(\theta, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T u^2(t) dt, \quad u \in U.$$

Положительные постоянные  $\alpha, \beta, s_0, r, \lambda$  и функция  $y_d \in L^2(Q)$  заданы. В этом случае мы приходим к задаче управления динамикой коллективного поведения сообщества бактерий, обладающего чувством кворума (способностью коллективно действовать на внешние возбудители), цель которого получить нужную концентрацию ацилглюмосериновых лактонов [3, 4].

## 2. Разрешимость задачи оптимального управления

Получим предварительно априорные оценки решения управляемой системы.

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия (i)–(ii). Для слабого решения задачи (1), (2) справедливы оценки

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq K_1 e^{K_2}, \quad \|y\|_{L^2(0,T;V)} \leq K_1(1 + K_2 e^{K_2}). \quad (5)$$

Здесь  $K_1 = \|y_0\|^2 + \int_0^T (k_0 \|f\|^2 + \|f_0 + g_b\|_{V'}^2) dt$ ,  $K_2 = 2 \int_0^T |u(t)| dt + k_0 T$ .

**Доказательство.** Из равенства  $(y' + Ay, y) = (f \cdot h(y) - u \cdot y + f_0 + g_b, y)$  следует, с учетом того, что  $|h(y)| \leq k_0$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y\|^2 + \|y\|_V^2 \leq |u(t)| \cdot \|y\|^2 + \frac{k_0}{2} (\|y\|^2 + \|f\|^2) + \frac{1}{2} \|y\|_V^2 + \frac{1}{2} \|f_0 + g_b\|_{V'}^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \|y\|^2 + \|y\|_V^2 \leq (2|u(t)| + k_0) \cdot \|y\|^2 + k_0 \|f\|^2 + \|f_0 + g_b\|_{V'}^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и используя неравенство Гронуолла для оценки  $\|y(t)\|^2$ , получаем

$$\|y(t)\|^2 \leq K_1 e^{K_2}.$$

Тогда выводим  $\int_0^T \|y(t)\|_{V'}^2 dt \leq K_1(1 + K_2 e^{K_2})$ . Таким образом, справедливы нелокальные оценки (5).  $\square$

Однозначная разрешимость параболической задачи (3) с липшицевой нелинейностью  $h(y)$  доказывается, с учетом полученных оценок (5), аналогично [4].

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1), (2) и справедливы оценки (5).

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(ii), (j)–(jjj). Тогда существует решение задачи (CP).

*Доказательство.* Пусть  $\hat{J} = \inf J$  на множестве  $u \in U_{ad}, F(y, u) = 0$ . Выберем минимизирующую последовательность  $u_m \in U_{ad}, y_m \in Y, J(y_m, u_m) \rightarrow \hat{J}$ ,

$$y'_m + Ay_m = f \cdot h(y_m) - u_m \cdot y_m + f_0 + g_b, \quad y_m(0) = y_0. \quad (6)$$

Из условия (jjj) следует ограниченность последовательности  $u_m$  в пространстве  $U$  и поэтому, на основании леммы 1, получаем оценки

$$\|y_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C, \quad \|y_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C.$$

Здесь через  $C > 0$  обозначена наибольшая из постоянных, ограничивающих нормы и не зависящих от  $m$ . Из ограниченности  $\{y_m\}$  в  $L^2(0,T;V)$  вытекает ограниченность  $\{Ay_m\}$  в  $L^2(0,T;V') \cap L^\infty(0,T;H)$  и кроме того

$$\int_0^T (u_m(t)y_m, z)^2 dt \leq C \int_0^T |u_m(t)|^2 dt \|z\|^2 \quad \forall z \in V.$$

Поэтому последовательность  $\{u_m(t)y_m\}$  также ограничена в  $L^2(0,T;V')$ . Из полученных оценок и равенств (6) следует, что последовательность  $\{y'_m\}$  ограничена в пространстве  $L^2(0,T;V')$ . Учитывая компактность вложения  $Y \subset L^2(0,T;H)$ , переходя при необходимости к подпоследовательностям, заключаем, что существует пара  $\{\hat{y}, \hat{u}\} \in Y \times U_{ad}$ ,

$$u_m \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } U, \quad y_m \rightarrow \hat{y} \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \text{ сильно в } L^2(0,T;H). \quad (7)$$

Заметим также, что  $\forall z \in V$  при  $m \rightarrow \infty$

$$\left| \int_0^T (f(h(y_m) - h(\hat{y})), z) dt \right| \leq k_1 \max f \|z\| T^{1/2} \|y_m - \hat{y}\|_{L^2(0,T;H)} \rightarrow 0, \quad (8)$$

$$\left| \int_0^T (u_m y_m - \hat{u} \hat{y}, z) dt \right| \leq \left| \int_0^T (u_m - \hat{u})(\hat{y}, z) dt \right| + \|u_m\|_U \|z\| \|y_m - \hat{y}\|_{L^2(0,T;H)} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Результаты о сходимости (7)–(9) позволяют перейти к пределу в (6). Поэтому

$$\hat{y}' + A\hat{y} = f \cdot h(\hat{y}) - u \cdot \hat{y} + f_0 + g_b, \quad \hat{y}(0) = y_0.$$

и при этом в силу условия (jj)  $\hat{J} \leq J(\hat{y}, \hat{u}) \leq \liminf J(y_m, u_m) = \hat{J}$ . Следовательно, пара  $\{\hat{y}, \hat{u}\}$  есть решение задачи (CP).  $\square$

### 3. Условия оптимальности

Для получения системы оптимальности будем использовать принцип Лагранжа для гладко-выпуклых экстремальных задач [5, 6]. Проверим справедливость ключевого условия, состоящего в том, что образ производной оператора ограничений  $F(y, u)$  по  $y$ , где  $y \in Y, u \in U$ , совпадает с пространством  $L^2(0, T; V') \times H$ . Именно это условие гарантирует невырожденность условий оптимальности. Напомним, что

$$F(y, u) = \left\{ y' + Ay - f \cdot h(y) + u \cdot y - f_0 - g_b, y(0) - y_0 \right\}.$$

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия (i)–(ii). Для любой пары  $y \in Y, u \in U$  справедливо равенство

$$\text{Im}F'_y(y, u) = L^2(0, T; V') \times H.$$

*Доказательство.* Пусть  $\zeta = \{\eta, \xi_0\} \in L^2(0, T; V') \times H$ . Равенство  $F'_y(y, u)\langle \psi \rangle = \zeta$ , где  $\psi = \{\xi, u\} \in Y \times U$ , эквивалентно условиям

$$\xi' + A\xi - f \cdot h'(y)\xi + u \cdot \xi = \eta, \quad \xi(0) = \xi_0. \quad (10)$$

Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить разрешимость линейной задачи (10). Заметим, что  $f \cdot h'(y) \in L^\infty(Q)$ . В случае, если функция  $u \in U = L^2(0, T)$  также ограничена, разрешимость задачи (10) хорошо известна [7, Th.4.1, Ch.3]. Если функция  $u$  является неограниченной, то достаточно аппроксимировать ее функциями  $u_m \in C[0, T]$ ,  $\|u_m - u\|_U \rightarrow 0$  и для последовательности решений задачи (10), где  $u := u_m$ , получить, аналогично доказательству леммы 1, оценки

$$\|\xi_m\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C, \quad \|\xi_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq C, \quad \|\xi'_m\|_{L^2(0, T; V')} \leq C.$$

Здесь  $C > 0$  не зависит от  $m$ . Указанных оценок достаточно для предельного перехода в (10), где  $\xi := \xi_m, u := u_m$ . Следовательно, задача (10) разрешима для всех  $u \in U, \eta \in L^2(0, T; V'), \xi_0 \in H$ , что доказывает лемму.  $\square$

Для вывода системы оптимальности будем использовать следующие условия дифференцируемости целевого функционала.

(jv)  $\forall u \in U_{ad}$  отображение  $y \rightarrow J(y, u)$  дифференцируемо по Фреше в точке  $\{\hat{y}, u\}$ , и при этом отображение  $U_{ad} \ni u \rightarrow J'_y(\hat{y}, u) \in Y'$  непрерывно в точке  $\hat{u}$ ; существует дифференциал Гато  $\langle J'_u(\hat{y}, \hat{u}), u - \hat{u} \rangle$  отображения  $U_{ad} \ni u \rightarrow J(\hat{y}, u)$  в точке  $\hat{u}$  в направлении  $u - \hat{u}$ .

В соответствии с леммой 2 лагранжиан задачи (CP) имеет вид

$$L(y, u, p, q) = J(y, u) + \int_0^T \left( y' + Ay - f \cdot h(y) + u \cdot y - f_0 - g_b, p \right) dt + (y(0) - y_0, q).$$

Здесь  $\{p, q\} \in L^2(0, T; V) \times H$  — сопряженное состояние. Если  $\{\hat{y}, \hat{u}\}$  — решение задачи (CP), то в силу принципа Лагранжа [6, Теорема 1.5] существует пара  $\{p, q\} \in$

$L^2(0, T; V) \times H$  такая, что для  $z \in Y, v \in U_{ad}$  справедливы соотношения

$$\langle J'_y(\hat{y}, \hat{u}), z \rangle + \int_0^T (z' + Az - f \cdot h'(\hat{y})z + \hat{u} \cdot z, p) dt + (z(0), q) = 0, \quad (11)$$

$$\langle J'_u(\hat{y}, \hat{u}), v - \hat{u} \rangle + \int_0^T (\hat{y}, p)(v - \hat{u}) dt \geq 0. \quad (12)$$

Конкретизируем вид производных целевого функционала. Пусть

$$\langle J'_y(\hat{y}, \hat{u}), z \rangle = (q_T, z(T)) + \int_0^T (q(t), z(t)) dt \quad \forall z \in Y; \quad (v)$$

$$\langle J'_u(\hat{y}, \hat{u}), v \rangle = \int_0^T \xi(t)v(t) dt \quad \forall v \in U_{ad} - \hat{u}.$$

Здесь  $q_T \in H, q \in L^2(0, T; V'), \psi \in L^2(0, T; V'), \xi \in U$ .

В этом случае, полагая в (11)  $z \in C_0^\infty(0, T; V)$ , заключаем, что в смысле распределений на  $(0, T)$  справедливо равенство

$$-p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = -q. \quad (13)$$

Из этого равенства, поскольку  $p \in L^2(0, T; V)$ , вытекает, что  $p' \in L^2(0, T; V')$ . Кроме того, из (11), (13) вытекает равенство  $(p(T) + q_T, z(T)) - (p(0), z(0)) + (z(0), q) = 0$  для всех  $z \in Y$ . Поэтому  $p(T) = -q_T$ .

Таким образом, из условий (11), (12) получаем следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (i)–(ii), (j)–(jv) и условие (v). Если  $\{\hat{y}, \hat{u}\}$  — решение задачи (CP), то существует единственная функция  $p \in Y$  такая, что

$$-p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = -q, \quad p(T) = -q_T. \quad (14)$$

и при этом

$$\int_0^T (\xi + (\hat{y}, p))(v - \hat{u}) dt \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

#### 4. Примеры

**Распределенное наблюдение на подобласти.** Пусть

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\Omega_0} (y - y_d)^2 dx + \lambda |u|^2 \right) dt, \quad u \in U_{ad} = U = L^2(0, T). \quad (15)$$

Здесь  $\Omega_0$  — подобласть  $\Omega, y_d \in L^2(Q), \lambda = \text{const} > 0$ . Из теорем 2, 3 вытекает следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует  $\{\hat{y}, \hat{u}\}$  – решение задачи (CP) с целевым функционалом (15), для которого найдется единственная функция  $p \in Y$  такая, что

$$-p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = -\chi_0(y - y_d), \quad p(T) = 0,$$

и при этом  $\lambda \hat{u} = -(\hat{y}, p)$ . Здесь  $\chi_0 = 1$  в  $\Omega_0$  и  $\chi_0 = 0$  в  $\Omega \setminus \Omega_0$ .

**Финальное наблюдение.** Пусть

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y|_{t=T} - y_d)^2 dx, \tag{16}$$

$$u \in U_{ad} = \left\{ v \in U, u_1(t) \leq v \leq u_2(t), t \in (0, T) \right\}.$$

Здесь  $y_d \in H, u_1, u_2 \in L^2(0, T)$  – заданные функции,  $0 \leq u_1(t) < u_2(t)$ . Применяя к задаче оптимального управления теоремы 2, 3, получаем релейность оптимального управления.

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует  $\{\hat{y}, \hat{u}\}$  – решение задачи (CP) с целевым функционалом (16), для которого найдется единственная функция  $p \in Y$  такая, что

$$-p' + Ap - f \cdot h'(\hat{y})p + \hat{u} \cdot p = 0, \quad p(T) = y_d - y(T)$$

и при этом

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{если } (p(t), \hat{y}(t)) < 0; \\ u_2(t), & \text{если } (p(t), \hat{y}(t)) > 0. \end{cases}$$

## Список литературы

- [1] S. T. Rutherford, B. L. Bassler, “Bacterial quorum sensing: its role in virulence and possibilities for its control”, *Cold Spring Harb. Perspect. Med.*, **2** (2012), a012427.
- [2] A. K. Bhardwa, K. Vinothkumar, N. Rajpara, “Bacterial quorum sensing inhibitors: attractive alternatives for control of infectious pathogens showing multiple drug resistance”, *Recent Pat. Antiinfect. Drug Discov.*, **8** (2013), 68–83.
- [3] C. Kuttler, A. Maslovskaya, “Hybrid stochastic fractional-based approach to modeling bacterial quorum sensing”, *Math. Model.*, **93** (2021), 360–375.
- [4] A. Maslovskaya, C. Kuttler, A. Chebotarev, A. Kovtanyuk, “Opyimal multiplicative control of bacterial quorum sensing under external enzyme impact”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **17** (2022), 29.
- [5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва, 1974.
- [6] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [7] J-L Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, New York, 1972.



Поступила в редакцию  
3 мая 2023 г.

Исследование выполнено за счет гранта  
Российского научного фонда № 23-21-00087.

---

*Chebotarev A. Yu.* Optimal multiplicative control of a semilinear parabolic equation. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2023. V. 23. No 2. P. 270–277.

<sup>1</sup> Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Research and Education in Mathematics, Vladivostok, Russia

#### ABSTRACT

An analysis of optimal control problems for a nonlinear parabolic initial-boundary value problem that models the dynamics of the collective behavior of a bacterial community is presented. Estimates for the solution of the initial-boundary value problem are obtained, the solvability of control problems is proved, and optimality conditions are derived. The weak bang-bang principle is set for the problem with the final observation.

Key words: *optimal control problems, optimality system, semilinear parabolic equation, multiplicative control.*