



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. Sh. Mogilevskii, Estimates of solutions of a general initial-boundary value problem for linearized nonstationary Navier–Stokes system in the half-space, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 147–173

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 13, 2025, 17:41:43



ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

§ I. Введение

Настоящая работа посвящена оценкам в полупространстве $R_\infty = \{x, t: x \in R^3, x_3 > 0, t > 0\}$ соболевских норм вектора

$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и функции p , удовлетворяющих в R_∞ линейной однородной системе уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \bar{u} = 0, \quad (\text{I.1})$$

начальному

$$\bar{u}|_{t=0} = 0 \quad (\text{I.2})$$

и краевым условиям

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(\bar{u}, p)|_{x_3=0} = \bar{\Phi}. \quad (\text{I.3})$$

Здесь B - матричный дифференциальный оператор, т.е. матрица 3×4 , элементами которой являются дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$

$$B = \{b_{ij}\} \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)(\bar{u}, p) = \left\{ \sum_{j=1}^3 b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u_j + b_{i4}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)p \right\}, \quad i=1,2,3.$$

Систему (I.1) можно записать в матричной форме. Матрица системы (I.1)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \{l_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\} \quad i, j=1,2,3,4$$

имеет вид

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, & 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0, & \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, & 0, & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_3}, & 0 \end{pmatrix}$$

или при $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$\mathcal{L}(i\xi, \delta) = \begin{pmatrix} \delta + \xi^2 & 0 & 0 & i\xi_1 \\ 0 & \delta + \xi^2 & 0 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & \delta + \xi^2 & i\xi_3 \\ i\xi_1 & i\xi_2 & i\xi_3 & 0 \end{pmatrix}$$

По аналогии с определением параболичности в [1] положим $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0, \delta_4 = -1, t_1 = t_2 = t_3 = 2, t_4 = 1$. Тогда каждый элемент матрицы $\mathcal{L}(i\xi, \delta)$ есть однородный полином степени $\delta_k + t_j$ в следующем смысле: $b_{kj}(\lambda i\xi, \lambda^2 \delta) = \lambda^{\delta_k + t_j} b_{kj}(i\xi, \delta)$. Потребуем, чтобы существовали такие целые числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, что $b_{kj}(\lambda i\xi, \lambda^2 \delta) = \lambda^{\sigma_k + t_j} b_{kj}(i\xi, \delta)$. (Мы здесь считаем оператор B совпадающим со своей главной частью).

В работе получены точные по дифференциальному порядку оценки решения в пространствах Соболева, при некоторых условиях, налагаемых на оператор B . Ранее такие оценки были получены для первой ([2,3]) и второй ([4]) краевых задач, являющихся частными случаями задачи (I.1), (I.2), (I.3).

Задача с общими краевыми условиями первого порядка ($\sigma_i = -1, b_{i4} = 0, i=1, 2, 3$) исследована в [5]. Там получены оценки L_p - норм слабого решения.

В заключение работы сформулирована теорема об оценке решения общей неоднородной краевой задачи в цилиндрической области $\Omega_{\mathbb{T}} = \Omega \times (0, T)$. Доказательству этой теоремы предполагается посвятить отдельную статью.

Оценки решения задачи (I.1), (I.2), (I.3) получаются с помощью теоремы о мультипликаторах Фурье. В терминах преобразования Фурье формулируются и основные условия, налагаемые на оператор B . Эти условия являются аналогом условия дополнителности для параболических систем ([1]).

§ 2. Некоторые определения и вспомогательные факты

Норма в $L_q(R_{\infty})$ определяется формулой

$$\|w\|_{q, R_{\infty}} = \left(\int_{R_{\infty}} |w(x, t)|^q dx dt \right)^{1/q}$$

Пространства Соболева $L_q^{(\alpha, \nu)}$ подробно изучены в [7]. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_i > 0, \nu > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Обобщенная функция f принадлежит пространству $L_q^{(\alpha, \nu)}(R_{\infty})$ если она является функцией, суммируемой по R_{∞} в степени q вместе с ее ливиллевскими обобщенными производными

$D_{x_i}^{\alpha_i} f$, $i=1,2,3$, $D_t^\nu f$. Норма в $L_q^{(\alpha, \nu)}(R_\infty)$ определяется равенством

$$\|f\|_{q, R_\infty}^{(\alpha, \nu)} = \|f\|_{q, R_\infty} + \sum_{i=1}^3 \|D_{x_i}^{\alpha_i} f\|_{q, R_\infty} + \|D_t^\nu f\|_{q, R_\infty}.$$

При целых α_i, ν $L_q^{(\alpha, \nu)}(R_\infty)$ совпадает с пространством Соболева $W_q^{\alpha, \nu}(R_\infty)$. При нецелых α_i, ν производная $D_{x_i}^{\alpha_i} f$ понимается как прообраз Фурье функции $(i \xi_i)^{\alpha_i} \tilde{f}$.

$D_{x_i}^{\alpha_i} f = F^{-1}[(i \xi_i)^{\alpha_i} F f]$, где $\tilde{f} = F f$ - преобразование Фурье функции f .

Для пространств $L_q^{(\alpha)}$, $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ имеет место обычная система теорем вложения и продолжения.

ТЕОРЕМА 2.1 ([7]). Оператор дифференцирования $D^{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha}$ - вектор с нецелыми, вообще говоря, компонентами) непрерывно переводит пространство $L_q^{(\alpha)}(R^n)$ в пространство $L_q^{(\beta)}(R^n)$, где $\rho_i = \alpha_i(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_j) \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2.2 ([7]). Имеет место непрерывное вложение

$$L_q^{(\alpha)}(R^n) \rightarrow B_q^{(\rho)}(R^m), \quad \alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \rho=(\rho_1, \dots, \rho_m), \quad 1 < m < n,$$

$$\rho_i = \alpha \alpha_i, \quad (i=1, \dots, m), \quad \alpha = 1 - \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} > 0,$$

$B_q^{(\rho)}(R^m)$ - пространство Бесова ([6]).

Мы будем использовать теоремы о мультипликаторах Фурье в пространствах L_q , доказанные в [8] и [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что $\Phi(\xi) \in M_q^q$, если для $\forall v(x) \in C_0^\infty$ $\|F^{-1} \Phi(\xi) F v\|_q \leq c \|v\|_q$ ($1 < q < \infty$). В этом случае функция $\Phi(\xi)$ называется мультипликатором Фурье класса (q, q) .

$$M_q^q(\Phi) = \sup_{v \in C_0^\infty} \frac{\|F^{-1} \Phi F v\|_q}{\|v\|_q}.$$

Имеет место теорема, обобщающая результаты Михлина-Марцинкевича ([8]).

Теорема 2.3. Пусть функция $\Phi(\xi)$ и ее производные $\frac{\partial^m \Phi}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_m}}$ ($m \geq 1$, k_1, \dots, k_m - различны) непрерывны при $\xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n \neq 0$ и удовлетворяют соотношениям

$$\left| \xi_{k_1} \dots \xi_{k_m} \frac{\partial^m \Phi}{\partial \xi_{k_1} \dots \partial \xi_{k_m}} \right| \leq M.$$

Тогда Φ является мультипликатором класса (q, q) и $M_q^q(\Phi) \leq c M$.

ТЕОРЕМА 2.4 ([9]). Пусть функции $H(x)$, $\varphi(x)$ заданы в пространстве R_+^n ($x_n > 0$), F' - преобразование Фурье по переменным $x'=(x_1, \dots, x_{n-1})$. Пусть, далее $H(\xi', t) \in M_q^q$ (t - параметр) и $\varphi(x) \in L_q(R_+^n)$. Тогда, если $M_q^q(H(\cdot, t)) \leq \frac{c}{t}$ и

$$\mathcal{H}\varphi = \int_0^{\infty} F^{-1} [H(\xi', t + \tau)(F'\varphi)(\xi', \tau)] d\tau \quad , \quad \text{то } \|\mathcal{H}\varphi\|_{q, R_+^2} \leq c \|\varphi\|_{q, R_+^2}.$$

Мы будем также систематически пользоваться следующим элементарным неравенством

$$x^n e^{-xt} \leq \frac{c}{t^n}, \quad x, t > 0. \quad (2.1)$$

Здесь и далее константы в неравенствах мы будем обозначать одной и той же буквой C .

§ 3. Оценка решения задачи (I.1), (I.2), (I.3)

Решение задачи (I.1), (I.2), (I.3) будем искать в классе функций $\bar{u} \in L_q^{(\alpha, \beta)}(R_{\infty})$, $q > 1$, ℓ - натуральное, $\forall \rho \in L_q^{(\alpha-2, \beta-1)}(R_{\infty})$. Производные, входящие в оператор B , понимаются в обычном смысле, поэтому $\sigma_i + 3 \leq 2\ell$, $i = 1, 2, 3$.

Элементы матрицы B имеют вид

$$b_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = P_{ij}^{2+\sigma_i} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \text{при } j \leq 3, \quad \text{и}$$

$$b_{i4} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = P_{i4}^{4+\sigma_i} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

где P_{ij}^n - полином степени n от 4-х переменных, однородный в указанном в § I смысле.

$$P_{kj}^n(i\xi, s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=n} a_{\alpha\beta}^{kj} (i\xi)^\alpha \cdot s^\beta,$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} (i\xi_3)^{\alpha_3}$, α - мультииндекс.

Продолжим функции \bar{u} , ρ нулем при $t < 0$ и сделаем преобразование Фурье всех рассматриваемых функций по x_1, x_2 и Лапласа по t

$$F\bar{u} \equiv \tilde{u}(\xi_1, \xi_2, x_3, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} dx_1 dx_2 \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-ix' \cdot \xi' - st} dt \quad (3.1)$$

$$x' = (x_1, x_2), \quad x' \cdot \xi' = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2.$$

Для преобразованных функций задача (I.1), (I.2), (I.3) примет

вид

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left(i\xi', \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial t} \right) (\bar{u}, \bar{\rho}) = \\ & = \begin{pmatrix} \tau^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & 0, & 0, & i\xi_1 \\ 0, & \tau^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & 0, & i\xi_2 \\ 0, & 0, & \tau^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ i\xi_1, & i\xi_2, & \frac{\partial}{\partial x_3}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{\rho} \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$B\left(i\xi', \frac{\partial}{\partial x_3}, \delta\right)(\bar{u}, \bar{p})\Big|_{x_3=0} = \bar{\Phi}(\xi', \delta). \quad (3.3)$$

Здесь $\tau = \sqrt{\delta + \xi'^2}$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \tau \leq \frac{\pi}{2}$.

Всякий вектор, удовлетворяющий уравнению (3.2) и стремящийся к 0 при $x_3 \rightarrow +\infty$, можно представить в виде $(\bar{u}, \bar{p}) = M\bar{c}$, где $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ - вектор-константа, определяемый граничными условиями, а

$$M = \begin{pmatrix} i\xi_1 e^{-|\xi|/x_3} & \tau e^{-\tau x_3} & 0 \\ i\xi_2 e^{-|\xi|/x_3} & 0 & \tau e^{-\tau x_3} \\ -|\xi| e^{-|\xi|/x_3} & i\xi_1 e^{-\tau x_3} & i\xi_2 e^{-\tau x_3} \\ -\delta e^{-|\xi|/x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Такое представление вектора (\bar{u}, \bar{p}) получено в [4]. Из (3.3) $B M \bar{c}\Big|_{x_3=0} = \bar{\Phi}$. Обозначим $K = B M\Big|_{x_3=0}$. Тогда $\bar{c} = K^{-1} \bar{\Phi}$ и

$$(\bar{u}, \bar{p}) = M K^{-1} \bar{\Phi} \equiv R \bar{\Phi}. \quad (3.4)$$

Выясним теперь при каких условиях на оператор B формула (3.4) имеет смысл и получаемое по этой формуле решение допускает оценку через данные задачи.

Пусть $\mathcal{D} = \det K$. Покажем прежде всего, что $\mathcal{D} = (\tau - |\xi'|) \mathcal{D}_1$ независимо от B . Здесь $\mathcal{D}_1(\xi', \delta)$ - однородная функция степени $8 + \sigma$, где $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Условимся о следующих обозначениях. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица, то i -ю строку будем обозначать A_i , а j -ый столбец - A^j . Если a , b - вектора с n компонентами, то

$a \cdot b$ - скалярное произведение этих векторов. $M_0 = M\Big|_{x_3=0}$,

$B\left(i\xi', \frac{\partial}{\partial x_3}, \delta\right) \equiv B\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ - для сокращения записи

будем указывать только второй аргумент.

$$K = B\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) M\Big|_{x_3=0} = \begin{pmatrix} B_1(-|\xi'|) \cdot M_0^1 & B_1(\tau) \cdot M_0^2 & B_1(\tau) \cdot M_0^3 \\ B_2(-|\xi'|) \cdot M_0^1 & B_2(\tau) \cdot M_0^2 & B_2(\tau) \cdot M_0^3 \\ B_3(-|\xi'|) \cdot M_0^1 & B_3(\tau) \cdot M_0^2 & B_3(\tau) \cdot M_0^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} [B_1(-|\xi'|) - B_1(-\tau)] \cdot M_0^1, & B_1(-\tau) \cdot M_0^2, & B_1(-\tau) \cdot M_0^3 \\ [B_2(-|\xi'|) - B_2(-\tau)] \cdot M_0^1, & B_2(-\tau) \cdot M_0^2, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|) - B_3(-\tau)] \cdot M_0^1, & B_3(-\tau) \cdot M_0^2, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} B_1(-\tau) \cdot M_0^1, & B_1(-\tau) \cdot M_0^2, & B_1(-\tau) \cdot M_0^3 \\ B_2(-\tau) \cdot M_0^1, & B_2(-\tau) \cdot M_0^2, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ B_3(-\tau) \cdot M_0^1, & B_3(-\tau) \cdot M_0^2, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Очевидно, что первый определитель в (3.5) делится на $\tau - |\xi'|$, а второй равен $|B(-\tau)M_0| \equiv \det(B(-\tau)M_0)$. Вычислим этот последний определитель, используя формулу Бине-Коши.

Введем еще обозначения. Пусть имеется матрица A размерности $m \times n$. Будем обозначать через $A^{(k)}$ матрицу, получающуюся из A вычеркиванием k -ого столбца, а через $A_{(k)}$ - вычеркиванием k -ой строки. $A_i^{(k)}$ и $A_{(k)}^j$ - i -ая строка и j -ый столбец матрицы A соответственно, из которых вычеркнут k -ый элемент. Теперь мы можем записать

$$|B(-\tau)M_0| = \sum_{j=1}^4 |B^{(j)}(-\tau)M_{0(j)}|;$$

$$|M_{0(i)}| = i\xi_1 \delta \tau; \quad |M_{0(2)}| = -i\xi_2 \delta \tau;$$

$$|M_{0(3)}| = -\delta \tau^2; \quad |M_{0(4)}| = \tau|\xi'|(|\xi'| - \tau).$$

Учитывая, что $\delta = (\tau - |\xi'|)(\tau + |\xi'|)$, получаем, что $|B(-\tau)M_0|$ делится на $\tau - |\xi'|$ и, следовательно,

$$\mathfrak{D} = (\tau - |\xi'|)\mathfrak{D}_1. \quad (3.6)$$

То, что степень однородности \mathfrak{D}_1 равна $\delta + \epsilon$, устанавливается простым подсчетом.

Приступим теперь к выяснению структуры элементов матрицы $R = M K^{-1}$. Для этого вычислим сначала матрицу K^{-1} . Через K^{ij} будем обозначать алгебраическое дополнение элемента K_{ji} матрицы K .

$$K^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{D}} \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}$$

$$K^{1i} = |B_{(i)}(-\tau)M_0^{(i)}| \quad i = 1, 2, 3$$

$$K^{2i} = - \begin{vmatrix} B_2(-|\xi'|) \cdot M_0^1, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ B_3(-|\xi'|) \cdot M_0^1, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} [B_2(-|\xi'|) - B_2(-\tau)] \cdot M_0^4, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|) - B_3(-\tau)] \cdot M_0^4, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{array} \right| - |B_{(i)}(-\tau) M_0^{(i)}| = \\
&= - \left| \begin{array}{cc} [B_2(-|\xi'|) - B_2(-\tau)] M_0^4, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|) - B_3(-\tau)] M_0^4, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} b_{24}(-\tau) \delta, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ b_{34}(-\tau) \delta, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{array} \right| - \\
&- \left| \begin{array}{cc} B_2^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^4, & B_2^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^3 \\ B_3^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^4, & B_3^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^3 \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\left| \begin{array}{cc} B_2^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^4, & B_2^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^3 \\ B_3^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^4, & B_3^{(i)}(-\tau) \cdot M_{0(i)}^3 \end{array} \right|$$

есть алгебраическое дополнение f_{21}^{21} элемента f_{12} матрицы $F = B^{(i)}(-\tau) M_{0(i)}$. Тогда $\kappa^{21} = f^{21} + g_{21}$, где

$$g_{21} = - \left| \begin{array}{cc} [B_2(-|\xi'|) - B_2(-\tau)] \cdot M_0^4, & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ [B_3(-|\xi'|) - B_3(-\tau)] \cdot M_0^4, & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{array} \right| + \delta \left| \begin{array}{cc} b_{24}(-\tau), & B_2(-\tau) \cdot M_0^3 \\ b_{34}(-\tau), & B_3(-\tau) \cdot M_0^3 \end{array} \right|$$

Аналогично получим

$$\kappa^{2i} = f^{2i} + g_{2i}, \quad \kappa^{3i} = f^{3i} + g_{3i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

$$g_{2i} = (-1)^i \left\{ \left| [B_{(i)}(-|\xi'|) - B_{(i)}(-\tau)] \cdot M_0^4, B_{(i)}(-\tau) \cdot M_0^3 \right| - \delta \left| B_{(i)}^4(-\tau), B_{(i)}(-\tau) \cdot M_0^3 \right| \right\}, \quad (3.8)$$

$$g_{3i} = (-1)^{4+i} \left\{ \left| [B_{(i)}(-|\xi'|) - B_{(i)}(-\tau)] \cdot M_0^4, B_{(i)}(-\tau) \cdot M_0^3 \right| - \delta \left| B_{(i)}^4(-\tau), B_{(i)}(-\tau) \cdot M_0^3 \right| \right\}. \quad (3.9)$$

Очевидно, что $\kappa^{ii} = f^{ii}$.

Пусть \hat{A} есть матрица, ассоциированная с матрицей A , т.е. $\hat{A} = \det A \cdot A^{-1}$. Тогда $\hat{K} = \hat{F} + \hat{G}$, где

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Из (3.8) и (3.9) заключаем, что все элементы матрицы \hat{G} делятся на $\tau - |\xi'|$.

$$\hat{F} = \widehat{B^{(i)}(-\tau) M_{0(i)}} = \widehat{M_{0(i)}} \widehat{B^{(i)}(-\tau)}$$

$$\widehat{M}_{0(i)} = \begin{pmatrix} -i\xi_1\tau, & -i\xi_2\tau, & \tau^2 \\ \xi_2^2 - \tau|\xi'|, & -\xi_1\xi_2, & -i\xi_1\tau \\ -\xi_1\xi_2, & \xi_1^2 - \tau|\xi'|, & -i\xi_2\tau \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$K^{-1} = \widehat{K}^{-1} = \frac{1}{2} [\widehat{M}_{0(i)} \widehat{B}^{(i)}(-\tau) + G]. \quad (3.11)$$

Рассмотрим матрицу $M_{(i)}$. Ее можно представить в виде

$$M_{(i)} = (M_{(i)}^1, 0, 0) [e^{-|\xi'|x_3} - e^{-\tau x_3}] + M_{0(i)} e^{-\tau x_3}$$

Отсюда, используя (3.10) и (3.11), получим

$$\begin{aligned} R_{(i)} = M_{(i)} K^{-1} &= \frac{1}{2} \{ (M_{(i)}^1, 0, 0) [e^{-|\xi'|x_3} - e^{-\tau x_3}] + \\ &+ M_{0(i)} e^{-\tau x_3} \} \{ \widehat{M}_{0(i)} \widehat{B}^{(i)}(-\tau) + G \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tau \begin{pmatrix} \xi_1^2, & \xi_1\xi_2, & i\xi_1\tau \\ \xi_1\xi_2, & \xi_2^2, & i\xi_2\tau \\ i\xi_1|\xi'|, & i\xi_2|\xi'|, & -\tau|\xi'| \end{pmatrix} \widehat{B}^{(i)}(-\tau) [e^{-|\xi'|x_3} - e^{-\tau x_3}] + \right. \\ &\left. + \tau|\xi'| (|\xi'| - \tau) \widehat{B}^{(i)}(-\tau) \cdot e^{-\tau x_3} + M_{0(i)} G \cdot e^{-\tau x_3} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$R_{ij} = \frac{\tau P_{ij}}{2_i} \frac{e^{-|\xi'|x_3} - e^{-\tau x_3}}{|\xi'| - \tau} + \frac{Q_{ij}}{2_i} e^{-\tau x_3}, \quad 1 < i, j \leq 3, \quad (3.12)$$

где $P_{ij} = H_i N^j$, $Q_{ij} = -\tau|\xi'| n_{ij} + M_{0i} \frac{G^j}{\tau - |\xi'|}$,

$$H = \begin{pmatrix} \xi_1^2, & \xi_1\xi_2, & i\xi_1\tau \\ \xi_1\xi_2, & \xi_2^2, & i\xi_2\tau \\ i\xi_1|\xi'|, & i\xi_2|\xi'|, & -\tau|\xi'| \end{pmatrix}, \quad N = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^3, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} n_{1i} &= |B_{(i)}^2, B_{(i)}^3| (-1)^{i+1}, \quad n_{2i} = (-1)^i |B_{(i)}^1, B_{(i)}^3|, \\ n_{3i} &= (-1)^{i+1} |B_{(i)}^1, B_{(i)}^2|, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$R_{1i} = -\frac{\delta K^i}{2} e^{-|\xi'|x_3} = -\frac{(\tau + |\xi'|) |B_{(i)}(-\tau) M_{0i}^1|}{2_i} e^{-|\xi'|x_3}, \quad (3.15)$$

$i=1, 2, 3.$

Сформулируем теперь те условия, которым должен удовлетворять определитель \mathfrak{D} для того, чтобы мы могли получить оценку решения задачи. Именно, потребуем, чтобы корень $\tau = |\xi'|$ функции \mathfrak{D} имел единичную кратность. Выразим это условие через элемен-

ты матрицы B .

Указанное условие можно записать следующим образом

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D} \right|_{s=0} \neq 0. \quad (3.16)$$

Воспользуемся формулой (3.5)

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} P_1(i\xi', \tau, s) \right|_{s=0} + \left. \frac{d}{ds} P_2(i\xi', \tau, s) \right|_{s=0}, \quad (3.17)$$

где $\frac{d}{ds}$ означает полную производную по s ,

$$P_i(i\xi', \tau, s) = \begin{vmatrix} [B_1(i\xi', -|\xi'|, s) - B_1(i\xi', -\tau, s)] M_0^1, & B_1(i\xi', -\tau, s) M_0^2, & B_1(i\xi', -\tau, s) M_0^3 \\ [B_2(i\xi', -|\xi'|, s) - B_2(i\xi', -\tau, s)] M_0^1, & B_2(i\xi', -\tau, s) M_0^2, & B_2(i\xi', -\tau, s) M_0^3 \\ [B_3(i\xi', -|\xi'|, s) - B_3(i\xi', -\tau, s)] M_0^1, & B_3(i\xi', -\tau, s) M_0^2, & B_3(i\xi', -\tau, s) M_0^3 \end{vmatrix}$$

$$P_i(i\xi', \tau, s) = |B(i\xi', -\tau, s) M_0|.$$

Пусть для краткости $P_i(i\xi', \tau, s) = |\mathcal{P}_i|$, где \mathcal{P}_i - соответствующая матрица.

$$\left. \frac{d}{ds} P_1(i\xi', \tau, s) \right|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_3} P_1(i\xi', |\xi'|, 0) + \frac{1}{2|\xi'|} \left. \frac{\partial}{\partial \tau} P_1(i\xi', \tau, 0) \right|_{\tau=|\xi'|}, \quad (3.18)$$

где $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ означает дифференцирование по i -ому аргументу.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} P_1(i\xi', |\xi'|, 0) &= \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \mathcal{P}_1^1(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \right| + \\ &+ \left| \mathcal{P}_1^1(i\xi', |\xi'|, 0), \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \right| + \\ &+ \left| \mathcal{P}_1^1(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \right|. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{P}_1^1(i\xi', |\xi'|, 0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \alpha_3} \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} P_1(i\xi', |\xi'|, 0) = 0. \quad (3.19)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \tau} P_1(i\xi', \tau, 0) \right|_{\tau=|\xi'|} &= \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P}_1^1(i\xi', \tau, 0) \right|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \Big| = \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B(i\xi', -|\xi'|, 0) M_0^1 \right|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \Big| + \\ &+ \left| [B(i\xi', -|\xi'|, 0) - B(i\xi', -\tau, 0)] \frac{\partial}{\partial \tau} M_0^1 \right|_{\tau=|\xi'|}, \mathcal{P}_1^2(i\xi', |\xi'|, 0), \mathcal{P}_1^3(i\xi', |\xi'|, 0) \Big| = \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B(i\xi', -|\xi'|, 0) M_0^1 \right|_{\tau=|\xi'|}, B(i\xi', |\xi'|, 0) M_0^2 \Big|_{\tau=|\xi'|}, B(i\xi', -|\xi'|, 0) M_0^3 \Big|_{\tau=|\xi'|} \Big|. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$M_0|_{s=0} = \begin{pmatrix} i\xi_1 & |\xi'| & 0 \\ i\xi_2 & 0 & |\xi'| \\ -|\xi'| & i\xi_1 & i\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P_1(i\xi', \tau, 0)|_{\tau=|\xi'|} &= i\xi_1 |\xi'|^2 \left[\left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1(-|\xi'|), B^1(-|\xi'|), B^2(-|\xi'|) \right| - \right. \\ &- \left. |B^2(-|\xi'|), \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|)| \right] + i\xi_2 |\xi'|^2 \left[|B^1(-|\xi'|), \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|) | - \right. \\ &- \left. |B^1(-|\xi'|), \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2(-|\xi'|), B^2(-|\xi'|) | \right] + \xi_1 \xi_2 |\xi'| \left[\left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2(-|\xi'|), B^2(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|) \right| - \right. \\ &- \left. \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1(-|\xi'|), B^1(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|) \right| \right] + \xi_1^2 |\xi'| \left[\left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1(-|\xi'|), B^2(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|) \right| + \right. \\ &+ \left. \xi_2^2 |\xi'| \left| B^1(-|\xi'|), \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2(-|\xi'|), B^3(-|\xi'|) \right| - |\xi'|^3 |B^1(-|\xi'|), B^2(-|\xi'|), \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3(-|\xi'|) | \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В записи вновь оставлен только второй аргумент.

Для вычисления $\frac{d}{ds} P_2(i\xi', \tau, s)|_{s=0}$ воспользуемся выкладками, сделанными при выводе (3.6).

$$\frac{d}{ds} P_2(i\xi', \tau, s)|_{s=0} = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{d}{ds} |B^{(j)}(-\tau)| M_{0(j)} + |B^{(j)}(-\tau)| \frac{d}{ds} |M_{0(j)}| \right]_{s=0},$$

$$|M_{0(j)}|_{s=0} = 0, \quad j=1, 2, 3, 4$$

$$\frac{d}{ds} |M_{0(1)}|_{s=0} = i\xi_1 |\xi'|; \quad \frac{d}{ds} |M_{0(2)}|_{s=0} = i\xi_2 |\xi'|;$$

$$\frac{d}{ds} |M_{0(3)}|_{s=0} = -|\xi'|^2; \quad \frac{d}{ds} |M_{0(4)}|_{s=0} = -\frac{|\xi'|}{2}.$$

Отсюда и из (3.17)-(3.20) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{D}|_{s=0} &= i\xi_1 |\xi'| \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1, B^1, B^2 \right| - \frac{1}{2} |B^2, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3, B^3| + |B^{(4)}| \right]_{s=0} + \\ &+ i\xi_2 |\xi'| \left[\frac{1}{2} |B^1, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3, B^3| - \frac{1}{2} |B^1, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2, B^2| - |B^{(2)}| \right]_{s=0} + \\ &+ \frac{\xi_1 \xi_2}{2} \left[\left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2, B^2, B^3 \right| - \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1, B^1, B^3 \right| \right]_{s=0} + \frac{\xi_1^2}{2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^1, B^2, B^3 \right|_{s=0} + \\ &+ \frac{\xi_2^2}{2} |B^1, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^2, B^3|_{s=0} - |\xi'|^2 \left[\frac{1}{2} |B^1, B^2, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} B^3| + |B^{(3)}| \right]_{s=0} - \frac{1}{2} |\xi'| |B^{(4)}| \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это и есть искомое выражение для левой части (3.16).

Пусть $P^n(x_1, \dots, x_m)$ - полином степени n . Обозначим через $d(x_i, P^n)$ целое число, равное максимальной степени, с которой x_i входит в P^n .

Из (3.6) и (3.16) следует, что $D_1|_{s=0} \neq 0$. Тогда мы можем записать, что

$$D_1(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \tau) = D_2(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \tau) \cdot D_3(\xi_1, \xi_2, |\xi'|), \quad (3.22)$$

где D_i однородные функции своих аргументов степени $m'_1 \cdot m'_2 + m'_3 = 8 + \sigma$, $m'_2 \geq 1$, $m'_3 \geq 0$. При этом $d(\tau, D_1) = m_2 \leq m'_2$.

Сформулируем еще два требования на функцию D . Требуется, чтобы:

а) все корни δ_i ($i=1, \dots, m_2$) функции $D_2(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \tau)$ удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re} \delta_i \leq -\delta |\xi'|^2$, $\delta > 0$;

в) $D_3(\xi_1, \xi_2, |\xi'|) = 0 \iff |\xi'| = 0$ (при $m_3 > 0$).

Докажем теперь несколько лемм, которые понадобятся нам при оценке решения. Пусть $P^n(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \tau)$ и $P^m(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \tau)$ - однородные полиномы степеней n и m соответственно; $n, m \geq 1$. Пусть, далее, P^n удовлетворяет условиям а) и в), $P^n|_{s=0} \neq 0$.

ЛЕММА 3.1. Если $m = n + 1$ и $d(\tau, P^m) \leq d(\tau, P^n)$, то

$$M_q^q \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right) \leq \frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > 0$ P^n не имеет корней по s . Поэтому по теореме 2.3 нам достаточно показать, что в этой полуплоскости выполняются неравенства:

$$|\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right)| \leq \frac{c}{t} \quad i=1,2 \quad (3.23)$$

$$|\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right)| \leq \frac{c}{t} \quad (3.24)$$

$$|s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right)| \leq \frac{c}{t} \quad (3.25)$$

$$|\xi_i s \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial s} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right)| \leq \frac{c}{t} \quad i=1,2 \quad (3.26)$$

$$|\xi_1 \xi_2 s \frac{\partial^3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial s} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right)| \leq \frac{c}{t}. \quad (3.27)$$

Мы докажем неравенства (3.23) и (3.25). Остальные доказываются аналогично.

$$\left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right) \right| = \left| \xi_i \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} P^m \cdot P^n - P^m \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} P^n}{(P^n)^2} e^{-|\xi'|t} \right|$$

$$-\frac{P^m}{P^n} \frac{\xi_i^2}{|\xi'|} t e^{-|\xi'|t} \left| < \left| \xi_i \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} P^m P^n - P^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} P^n}{(P^n)^2 |\xi'|} \right| |\xi'| e^{-|\xi'|t} + \right. \\ \left. + \left| \frac{P^m}{P^n |\xi'|} \right| \left| |\xi'| t e^{-|\xi'|t} \right|.$$

Используя неравенство (2.1), получаем

$$\left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right) \right| < \left\{ \left| \xi_i \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} P^m P^n - P^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} P^n}{(P^n)^2 |\xi'|} \right| + \left| \frac{P^m}{P^n |\xi'|} \right| \right\} \frac{c}{t} \quad (3.28)$$

Из условия леммы

$$m - d(v, P^m) \geq n + 1 - d(v, P^n). \quad (3.29)$$

Поэтому кратность корня $|\xi'|=0$ функции P^m не меньше кратности того же корня функции $P^n |\xi'|$. Следовательно

$$\left| \frac{P^m}{P^n |\xi'|} \right| \ll c. \quad (3.30)$$

Пусть для определенности $i=1$.

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} P^m = \xi_1 \sum_{k_1=m}^{d_1} a_{k_1} \xi_2^{d_2} [\alpha_1 \xi_1^{d_1-1} |\xi'|^{d_3} v^{d_4} + \xi_1^{d_1} \alpha_3 |\xi'|^{d_3-1} \frac{\xi_1}{|\xi'|} v^{d_4} + \\ + \alpha_4 \xi_1^{d_1} |\xi'|^{d_3} v^{d_4-1} \frac{\xi_1}{v}] = \sum_{k_1=m}^{d_1} a_{k_1} \xi_2^{d_2} [\alpha_1 \xi_1^{d_1} |\xi'|^{d_3} v^{d_4} + \\ + \alpha_3 \xi_1^{d_1+1} |\xi'|^{d_3-2} v^{d_4} + \alpha_4 \xi_1^{d_1+2} |\xi'|^{d_3} v^{d_4-2}],$$

a_{k_1} - коэффициенты полинома P^n , $P^n = \sum_{k_1=0}^{d_1} a_{k_1} \xi_1^{k_1} \xi_2^{d_2} |\xi'|^{d_3} v^{d_4}$.

Используя условия леммы и (3.29), получаем отсюда, что

$$\left| \frac{\xi_1}{|\xi'|} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| \ll c. \quad (3.31)$$

Из (3.28), (3.30) и (3.31) следует (3.23).

$$\left| s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-|\xi'|t} \right) \right| = \left| s \frac{\frac{\partial}{\partial s} P^m P^n - P^m \frac{\partial}{\partial s} P^n}{(P^n)^2} e^{-|\xi'|t} \right| = \\ = \left| s \frac{\frac{\partial}{\partial s} P^m P^n - P^m \frac{\partial}{\partial s} P^n}{(P^n)^2} \right| \left| |\xi'| e^{-|\xi'|t} \right| \ll \left| s \frac{\frac{\partial}{\partial s} P^m P^n - P^m \frac{\partial}{\partial s} P^n}{(P^n)^2} \right| \frac{c}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} P^m = \sum_{k_1=m}^{d_1} \alpha_1 a_{k_1} \xi_1^{k_1} \xi_2^{d_2} |\xi'|^{d_3} v^{d_4-1} \frac{\partial v}{\partial s} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k_1=m}^{d_1} \alpha_1 a_{k_1} \xi_1^{k_1} \xi_2^{d_2} |\xi'|^{d_3} v^{d_4-2}$$

Отсюда, из (3.29) и из условий леммы имеем

$$\left| \frac{\delta}{\xi^i} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| \leq c,$$

что и доказывает (3.25). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Если $m=n+1$ и $d(\alpha, P^m) < d(\alpha, P^n) + 1$, то

$$M_q \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right) \leq \frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как и в лемме 3.1, нам достаточно показать, что при $\operatorname{Re} \delta > 0$

$$\left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right) \right| \leq \frac{c}{t}, \quad i=1, 2 \quad (3.32)$$

и

$$\left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right) \right| \leq \frac{c}{t}. \quad (3.33)$$

Пусть для определенности $i=1$.

$$\begin{aligned} \left| \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right) \right| &= \left| \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) e^{-\tau t} - \xi_1^2 \frac{P^m}{P^n \tau} t e^{-\tau t} \right| < \\ &\leq \left| \frac{\xi_1}{\operatorname{Re} \tau} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| \cdot |\operatorname{Re} \tau \cdot e^{-\tau t}| + \left| \frac{\xi_1^2}{\tau (\operatorname{Re} \tau)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \cdot |(\operatorname{Re} \tau)^2 t e^{-\tau t}| < \\ &\leq \left\{ \left| \frac{\xi_1}{\operatorname{Re} \tau} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| + \left| \frac{\xi_1^2}{\tau (\operatorname{Re} \tau)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \right\} \cdot \frac{c}{t}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из условия леммы

$$m - d(\alpha, P^m) \geq n - d(\alpha, P^n). \quad (3.35)$$

Поэтому кратность корня $|\xi'|=0$ функции P^m не меньше кратности того же корня функции P^n . Отсюда получаем

$$\left| \frac{\xi_1}{\operatorname{Re} \tau} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| \leq c, \quad \left| \frac{\xi_1^2}{\tau (\operatorname{Re} \tau)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \leq c.$$

Это и (3.34) дает (3.32).

$$\begin{aligned} \left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right) \right| &< \left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) e^{-\tau t} \right| + \left| \frac{\delta t}{2\tau} \frac{P^m}{P^n} e^{-\tau t} \right| < \\ &\leq \left| \frac{\delta}{\operatorname{Re} \tau} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| \cdot |\operatorname{Re} \tau \cdot e^{-\tau t}| + \left| \frac{\delta}{2\tau (\operatorname{Re} \tau)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \cdot |(\operatorname{Re} \tau)^2 t e^{-\tau t}| < \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \left| \frac{\delta}{\operatorname{Re} \nu} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \right| + \left| \frac{\delta}{2\nu (\operatorname{Re} \nu)^2} \frac{P^m}{P^n} \right| \right\} \cdot \frac{c}{t}.$$

Из условий леммы и (3.35) получаем (3.33). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Если $m=n+2$ и $d(\nu, P^m) \leq d(\nu, P^n) + 1$, то

$$M_{\eta}^{\nu} \left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right) \leq \frac{c}{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в леммах 3.1 и 3.2, мы покажем, что при $\operatorname{Re} \delta > 0$

$$\left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right) \right| \leq \frac{c}{t} \quad (3.36)$$

и

$$\left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right) \right| \leq \frac{c}{t}. \quad (3.37)$$

Докажем сначала (3.36).

$$\begin{aligned} \left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right) \right| &= \left| \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{P^m}{P^n} \right) \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} - \right. \\ &- \xi_i \frac{P^m}{P^n} \frac{\nu \xi_i t e^{-\xi^2/t} - \xi_i |\xi_i| t e^{-\nu t}}{\nu |\xi^2 - \nu|^2} - \frac{\xi_i^2 (\nu - |\xi^2|) P^m}{\nu |\xi^2| P^n} \times \\ &\times \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{(|\xi^2 - \nu|)^2} \left| \leq \left| \frac{\xi_i}{|\xi^2|} \frac{\partial P^m}{\partial \xi_i} \right| \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right| + \right. \\ &+ \left| \frac{P^m}{P^n |\xi^2|} \right| \left| \xi_i \frac{\nu t e^{-\xi^2/t} - |\xi_i| t e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right| + \left| \frac{P^m}{P^n |\xi^2|} \right| \times \\ &\times \left| \xi_i^2 \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При $\operatorname{Re} \nu > 0$ $\operatorname{Re} \nu > |\xi^2|$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right| &= |\xi^2| \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} + \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2|} \right| \leq \\ &\leq |\xi^2| e^{-\xi^2/t} + |\xi^2| e^{-\operatorname{Re} \nu t} + |\xi^2|^2 \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right| \leq \frac{c}{t} + |\xi^2| e^{-\xi^2/t} + \\ &+ |\xi^2|^2 \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right| < \frac{2c}{t} + |\xi^2|^2 \left| \frac{e^{-\xi^2/t} - e^{-\nu t}}{|\xi^2 - \nu|} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} &= \frac{e^{-\xi' t}}{|\xi' - \nu} (1 - e^{-(\nu - \xi') t}) = \\ &= e^{-\xi' t} \int_0^t e^{-(\nu - \xi') \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Так как $\operatorname{Re} \nu > |\xi'|$, то в последнем интеграле модуль подынтегральной функции не превосходит 1, поэтому

$$|\xi'|^2 \left| \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| \leq e^{-\xi' t} t |\xi'|^2 \leq \frac{c}{t}.$$

Отсюда и из (3.39) получаем, что

$$\left| |\xi'| \nu \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| < \frac{c}{t}. \quad (3.40)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \left| \xi_i^2 \frac{\nu t e^{-\xi' t} - |\xi'| t e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| &= \left| \xi_i^2 t \frac{(\nu - |\xi'|) e^{-\xi' t} + |\xi'| (e^{-\xi' t} - e^{-\nu t})}{|\xi' - \nu} \right| < \\ &< \left| |\xi'|^2 t e^{-\xi' t} \right| + |\xi'|^3 t \left| \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| \leq \\ &< |\xi'|^2 t e^{-\xi' t} + |\xi'|^3 t^2 e^{-\xi' t} < \frac{c}{t}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\left| \xi_i^2 \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| < |\xi'|^2 t e^{-\xi' t} \leq \frac{c}{t}. \quad (3.42)$$

Из условий леммы следует, что

$$\left| \frac{\xi_i}{|\xi'| \nu} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{P^m}{P^{\nu}} \right| < c \quad \text{и} \quad \left| \frac{P^m}{|\xi'| \nu P^{\nu}} \right| < c.$$

Отсюда и из (3.38)–(3.42) следует (3.36).

Перейдем теперь к доказательству (3.37).

$$\begin{aligned} \left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^{\nu}} \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right) \right| &= \left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^{\nu}} \right) \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} + \right. \\ &+ \delta \frac{P^m}{P^{\nu}} \frac{t e^{-\nu t}}{2\nu(|\xi' - \nu)} + \delta \frac{P^m}{P^{\nu}} \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{2\nu(|\xi' - \nu)^2} \left| \leq \right. \\ &< \left| \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{P^m}{P^{\nu}} \right) \right| \cdot \left| \xi' \nu \frac{e^{-\xi' t} - e^{-\nu t}}{|\xi' - \nu} \right| + \left| \frac{\nu + |\xi'|}{2\nu(\operatorname{Re} \nu)^2} \frac{P^m}{P^{\nu}} \right| \times \end{aligned}$$

$$\times |(Re \nu)^2 + \bar{e}^{-\nu t}| + \left| \frac{\nu + |\xi'|}{2\nu^2 |\xi'|} \frac{P^m}{P^{\nu}} \right| \cdot \left| |\xi'| \nu \frac{e^{-|\xi'|t} - \bar{e}^{-\nu t}}{|\xi'| - \nu} \right|.$$

Из условий леммы, (2.1) и (3.40) получаем (3.37). Лемма доказана.

Выразим теперь решение задачи (I.1), (I.2), (I.3) через краевые условия и получим оценку этого решения. Пусть $\tilde{v}_{ij} = R_{ij} \Phi_j$, $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3$. Тогда из (3.4)

$$\tilde{w}_i = \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_{ij}; \quad \tilde{\rho} = \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_{ij}. \quad (3.43)$$

Обозначим через Ψ_j продолжение функции Φ_j в R_{∞} по x_3 . По теореме продолжения из [7]

$$\Psi_j \in L_q \left(\alpha_3 - 2 - \sigma_j, \ell - 1 - \frac{\sigma_j}{2} \right) (R_{\infty}), \quad \text{если только}$$

$$\Phi_j \in L_q \left(\alpha_3 - 2 - \sigma_j - \frac{1}{2}, \ell - 1 - \frac{\sigma_j - 1}{2} \right) (R_+^3), \quad R_+^3 = \{x, t: x \in R^2, t > 0\}.$$

Запишем теперь v_{ij} следующим образом

$$\begin{aligned} v_{ij}(x, t) &= F^{-1}(\tilde{v}_{ij}(\xi', \alpha_3, s)) = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_3} F^{-1} [R_{ij}(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \nu, \alpha_3 + y_3) \tilde{\Psi}_j(\xi', y_3, s)] dy_3 = \\ &= - \int_0^{\infty} F^{-1} [R_{ij}(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \nu, \alpha_3 + y_3) \frac{\partial}{\partial y_3} \tilde{\Psi}_j(\xi', y_3, s)] dy_3 - \\ &= - \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial y_3} R_{ij}(\xi_1, \xi_2, |\xi'|, \nu, \alpha_3 + y_3) \cdot \tilde{\Psi}_j(\xi', y_3, s) \right] dy_3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Мы будем пользоваться следующими фактами, вытекающими из определения дробной производной через преобразование Фурье-Лапласа:

$$\|F^{-1}(v^m \tilde{f})\|_{q, R_{\infty}} \leq c \langle \langle \tilde{f} \rangle \rangle_{q, R_{\infty}}^{(m, \frac{\sigma}{2})} \leq c \left\{ \|F^{-1}(v^m \tilde{f})\|_{q, R_{\infty}} + \left\| \frac{\partial^m}{\partial \alpha_3^m} \tilde{f} \right\|_{q, R_{\infty}} \right\}, \quad (3.45)$$

$$\|F^{-1}(|\xi'| \tilde{f})\|_{q, R_{\infty}} \leq c \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \tilde{f} \right\|_{q, R_{\infty}}. \quad (3.46)$$

Здесь $\langle \langle \tilde{f} \rangle \rangle_{q, R_{\infty}}^{(m, \frac{\sigma}{2})}$ - главная часть нормы $\|\tilde{f}\|_{q, R_{\infty}}^{(m, \frac{\sigma}{2})}$.

Элементы четвертого столбца граничного оператора В представим в виде

$$b_{i4} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = b'_{i4} D_t^{\mu_i} + b''_{i4} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad i=1,2,3, \quad (3.47)$$

где b'_{i4} - коэффициент при старшей чистой производной по t .
 $b'_{i4} = 0$ при σ_i четном. При σ_i нечетном $\mu_i = \frac{\sigma_i + 1}{2}$.

Если оператор b''_{i4} отличен от нулевого, то каждое его слагаемое обязательно содержит производные по пространственным переменным x . В соответствии с этим граничные условия Φ_i будем брать из класса

$$\begin{aligned} \Phi_i &\in L_q^{(2\ell-2-\sigma_i-1/q, \ell-1-\sigma_i/2-1/2q)}(\Sigma_\infty), \text{ если } b'_{i4} = 0 \text{ и} \\ \sum D_x^\nu D_t^\mu \Phi_i &\in L_q^{(1-1/q, 0)}(\Sigma_\infty), \text{ если } b'_{i4} \neq 0. \\ |\nu| + 2\mu &= 2\ell - 3 - \sigma_i \\ \Sigma_\infty &= \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \quad (x' \in \mathbb{R}^2, t \in (0, \infty)). \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

ТЕОРЕМА 3.1. Если \mathfrak{D} удовлетворяет условиям (3.16), а),

в) и

$$\begin{aligned} d(r, P_{ij}) &\leq m_i - 3 - \sigma_j, \quad d(r, |B_{ij}, M_0^{(n)}|) \leq m_i - 2 - \sigma_j, \\ d(r, Q_{ij}) &\leq m_i - 2 - \sigma_j \quad \text{при } b'_{j4} = 0, \\ d(r, Q_{ij}) &\leq m_i - 3 - \sigma_j \quad \text{при } b'_{j4} \neq 0, \\ i, j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.48)$$

то для решения задачи (I.1), (I.2), (I.3) справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^3 \langle\langle u_i \rangle\rangle_{q, \mathbb{R}^\infty}^{(2\ell, \ell)} + \langle\langle \nabla p \rangle\rangle_{q, \mathbb{R}^\infty}^{(2\ell-2, \ell-1)} \leq C \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma_\infty} \Phi_i^{\ell} \quad (3.49)$$

где

$$\int_{\Sigma_\infty}^{\ell} (\Phi_i) = \langle\langle \Phi_i \rangle\rangle_{q, \Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_i-1/q, \ell-1-\frac{\sigma_i}{2}-1/2q)} \quad \text{при } b'_{i4} = 0$$

и

$$\int_{\Sigma_\infty}^{\ell} (\Phi_i) = \langle\langle \sum_{|\nu|+2\mu=2\ell-3-\sigma_i} D_x^\nu D_t^\mu \Phi_i \rangle\rangle_{q, \Sigma_\infty}^{(1-1/q, 0)} \quad \text{при } b'_{i4} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сначала компоненты вектора скорости

u_i ($i=1, 2, 3$). Из (3.45) следует, что нам достаточно оценить

$$\|F^{-1}(r^{2\ell} \tilde{v}_{ij})\|_{q, \mathbb{R}^\infty} + \left\| \frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_3^{2\ell}} v_{ij} \right\|_{q, \mathbb{R}^\infty}.$$

Из (3.12) и (3.44)

$$F^{-1}(r^{2\ell} \tilde{v}_{ij}) = - \int_0^\infty F^{-1} \left\{ \left[\frac{r^{2\ell+1} P_{ij}}{\mathfrak{D}_1} \frac{e^{-|\xi|(x_3+y_3)} - e^{-r(x_3+y_3)}}{|\xi| - r} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu^{2l} Q_{ij}}{\mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} \left] \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right\} dy_3 + \\
& + \int_0^\infty F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{\mathcal{D}_1} \frac{|\xi'| e^{-\xi'(x_3+y_3)} - \nu e^{-\nu(x_3+y_3)}}{|\xi'| - \nu} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\nu^{2l+1} Q_{ij}}{\mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} \right] \tilde{\Psi}_j \right\} dy_3. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Первый интеграл из (3.50) запишем в виде

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{\nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} \frac{e^{-|\xi'(x_3+y_3)} - e^{-\nu(x_3+y_3)}}{|\xi'| - \nu} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\nu^{2l} Q_{ij}}{\nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} \right] \nu^{2l-3-\sigma_j} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right\} dy_3. \tag{3.51}
\end{aligned}$$

При $b'_{j4} = 0$ второй интеграл из (3.50) представим в виде

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{\nu^{2l-2-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} + \frac{|\xi'| \nu^{2l+1} P_{ij}}{\nu^{2l-2-\sigma_j} \mathcal{D}_1} \frac{e^{-\nu(x_3+y_3)} - e^{-|\xi'(x_3+y_3)}}{|\xi'| - \nu} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\nu^{2l+1} Q_{ij}}{\nu^{2l-2-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} \right] \nu^{2l-2-\sigma_j} \tilde{\Psi}_j \right\} dy_3. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

При $b'_{j4} \neq 0$ этот интеграл запишем по-другому

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{|\xi'| \nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} + \frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{\nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} \frac{e^{-\nu(x_3+y_3)} - e^{-|\xi'(x_3+y_3)}}{|\xi'| - \nu} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\nu^{2l+1} Q_{ij}}{\nu^{2l-3-\sigma_j} |\xi'| \mathcal{D}_1} e^{-\nu(x_3+y_3)} \right] |\xi'| \nu^{2l-3-\sigma_j} \tilde{\Psi}_j \right\} dy_3. \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Используя лемму 3.2 и условия теоремы, получим

$$M_q^q \left(\frac{\nu^{2l} Q_{ij}}{\nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu t} \right) < \frac{c}{t}, \tag{3.54}$$

$$M_q^q \left(\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{\nu^{2l-2-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu t} \right) < \frac{c}{t}, \tag{3.55}$$

$$M_q^q \left(\frac{\nu^{2l+1} P_{ij}}{|\xi'| \nu^{2l-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu t} \right) < \frac{c}{t}, \tag{3.56}$$

$$M_{\varphi}^{\mu} \left(\frac{\nu^{2\ell+1} Q_{ij}}{|\xi'| \nu^{2\ell-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} e^{-\nu t} \right) < \frac{c}{t} \quad \text{при } b'_{j_1} \neq 0. \quad (3.57)$$

Из леммы 3.3 получим

$$M_{\varphi}^{\mu} \left(\frac{\nu^{2\ell+1} P_{ij}}{\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} \frac{e^{-|\xi'|t} - e^{-\nu t}}{|\xi'| - \nu} \right) < \frac{c}{t}, \quad (3.58)$$

$$M_{\varphi}^{\mu} \left(\frac{|\xi'| \nu^{2\ell+1} P_{ij}}{\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \mathcal{D}_1} \frac{e^{-|\xi'|t} - e^{-\nu t}}{|\xi'| - \nu} \right) \leq \frac{c}{t}. \quad (3.59)$$

Учитывая, что функция $\tilde{\Psi}_j$ - продолжение функции Φ_j , получим из (3.50)–(3.59) в силу теоремы 2.4

$$\|F^{-1}[\nu^{2\ell} \tilde{v}_{ij}]\|_{q, R_{\infty}} \leq c \left\{ \|F^{-1}[\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q, R_{\infty}} + \|F^{-1}[\nu^{2\ell-2-\sigma_j} \tilde{\Psi}_j]\|_{q, R_{\infty}} \right\} \quad \text{при } b'_{j_1} = 0 \quad \text{и}$$

$$\|F^{-1}[\nu^{2\ell} \tilde{v}_{ij}]\|_{q, R_{\infty}} \leq c \left\{ \|F^{-1}[\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q, R_{\infty}} + \|F^{-1}[\nu^{2\ell-3-\sigma_j} |\xi'| \tilde{\Psi}_j]\|_{q, R_{\infty}} \right\} \quad \text{при } b'_{j_1} \neq 0.$$

Отсюда в силу (3.45), (3.46) и теоремы 2.2 имеем

$$\|F^{-1}[\nu^{2\ell} \tilde{v}_{ij}]\|_{q, R_{\infty}} \leq \gamma_{\Sigma_{\infty}}^{\ell}(\Phi_j). \quad (3.60)$$

Из (3.12) и (3.44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2\ell}}{\partial x_3^{2\ell}} v_{ij} = & - \int_0^{\infty} F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu P_{ij}}{\mathcal{D}_1} \frac{|\xi'|^{2\ell}}{|\xi'| - \nu} e^{-|\xi'|(\alpha_3+y_3)} - \frac{\nu^{2\ell}}{|\xi'| - \nu} e^{-\nu(\alpha_3+y_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\nu^{2\ell} Q_{ij} e^{-\nu(\alpha_3+y_3)}}{\mathcal{D}_1} \right] \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right\} dy_3 + \\ & + \int_0^{\infty} F^{-1} \left\{ \left[\frac{\nu P_{ij}}{\mathcal{D}_1} \frac{|\xi'|^{2\ell+1}}{|\xi'| - \nu} e^{-|\xi'|(\alpha_3+y_3)} - \frac{\nu^{2\ell+1}}{|\xi'| - \nu} e^{-\nu(\alpha_3+y_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\nu^{2\ell+1} Q_{ij}}{\mathcal{D}_1} e^{-\nu(\alpha_3+y_3)} \right] \tilde{\Psi}_j \right\} dy_3. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{|\xi'|^n e^{-|\xi'|t} - \nu^n e^{-\nu t}}{|\xi'| - \nu} &= \frac{|\xi'|^n (e^{-|\xi'|t} - e^{-\nu t})}{|\xi'| - \nu} + \frac{|\xi'|^n - \nu^n}{|\xi'| - \nu} e^{-\nu t} = \\ &= |\xi'|^n \frac{e^{-|\xi'|t} - e^{-\nu t}}{|\xi'| - \nu} + \sum_{\kappa=0}^{n-1} |\xi'|^{\kappa} \nu^{n-1-\kappa} e^{-\nu t} \end{aligned}$$

Применяя теперь леммы 3.2 и 3.3, получим

$$M_q \left(\frac{v P_{ij}}{v^{2l-3} \sigma_j D_1} \frac{|\xi'|^{2l} e^{-|\xi'|t} - v^{2l} e^{-vt}}{|\xi'| - v} \right) \leq \frac{c}{t}, \quad (3.62)$$

$$M_q \left(\frac{v P_{ij}}{v^{2l-3} \sigma_j |\xi'| D_1} \frac{|\xi'|^{2l+1} e^{-|\xi'|t} - v^{2l+1} e^{-vt}}{|\xi'| - v} \right) \leq \frac{c}{t}. \quad (3.63)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные сделанным при выводе (3.60), получим

$$\left\| \frac{\partial^{2l}}{\partial x_3^{2l}} v_{ij} \right\|_{q, R_{\infty}} \leq c \int_{\Sigma_{\infty}}^l (\Phi_j). \quad (3.64)$$

(3.60) и (3.64) дают оценку компонент скорости u_j

$$\ll \bar{u} \gg_{q, R_{\infty}}^{(2l, l)} = \sum_{i=1}^3 \ll u_i \gg_{q, R_{\infty}}^{(2l, l)} \leq c \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma_{\infty}}^l (\Phi_i). \quad (3.65)$$

Обратимся теперь к оценке градиента давления ∇p . Нам достаточно оценить

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} F^{-1} [v^{2l-2} \tilde{v}_{ij}] \right\|_{q, R_{\infty}} + \left\| \frac{\partial^{2l-2}}{\partial x_3^{2l-2}} \frac{\partial}{\partial x_k} v_{ij} \right\|_{q, R_{\infty}} \right\} \text{ при } k=1, 2, 3.$$

Пусть сначала $k \neq 3$. Из (3.44) и (3.15)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_k} F^{-1} [v^{2l-2} \tilde{v}_{ij}] = \\ &= \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) i \xi_k |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{D_1} e^{-|\xi'|(\alpha_3 + y_3)} \frac{\partial}{\partial y_3} \tilde{\Psi}_j \right] dy_3 - \\ & - \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) i \xi_k |\xi'| |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{D_1} e^{-|\xi'|(\alpha_3 + y_3)} \tilde{\Psi}_j \right] dy_3. \quad (3.66) \end{aligned}$$

При $k=3$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_3} F^{-1} [v^{2l-2} \tilde{v}_{ij}] = \\ &= - \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) |\xi'| |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{D_1} e^{-|\xi'|(\alpha_3 + y_3)} \frac{\partial}{\partial y_3} \tilde{\Psi}_j \right] dy_3 + \\ & + \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) |\xi'|^2 |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{D_1} e^{-|\xi'|(\alpha_3 + y_3)} \tilde{\Psi}_j \right] dy_3. \quad (3.67) \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.1, получим

$$M_q \left(\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) \xi_k |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{v^{2l-3} \sigma_j D_1} e^{-|\xi'|t} \right) \leq \frac{c}{t}, \quad (3.68)$$

$$M_q \left(\frac{v^{2l-2} (v + |\xi'|) |\xi'| \xi_k |B_{(v)} M_0^{(q)}|}{v^{2l-2} \sigma_j D_1} e^{-|\xi'|t} \right) \leq \frac{c}{t}. \quad (3.69)$$

В силу теоремы 2.4 из (3.66)–(3.69) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} F^{-1} [\nu^{2\ell-2} \tilde{v}_{ij}] \right\|_{q, R_\infty} &\leq C \left\{ \left\| F^{-1} [\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\Psi}_j] \right\|_{q, R_\infty} + \right. \\ &\left. + \left\| F^{-1} [\nu^{2\ell-3-\sigma_j} |\xi'| \tilde{\Psi}_j] \right\|_{q, R_\infty} \right\}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Совершенно аналогично получим, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^{2\ell-2}}{\partial x_3^{2\ell-2}} v_{ij} \right\|_{q, R_\infty} &\leq C \left\{ \left\| F^{-1} [\nu^{2\ell-3-\sigma_j} \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\Psi}_j] \right\|_{q, R_\infty} + \right. \\ &\left. + \left\| F^{-1} [\nu^{2\ell-3-\sigma_j} |\xi'| \tilde{\Psi}_j] \right\|_{q, R_\infty} \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Используя (3.45) и (3.46), получим из (3.70) и (3.71)

$$\sum_{i=1}^3 \ll \frac{\partial}{\partial x_i} p \gg_{q, R_\infty}^{(2\ell-2, \ell-1)} \leq C \sum_{i=1}^3 \gamma^i \partial_{\Sigma_\infty}^{\ell} (\Phi_i).$$

Отсюда и из (3.65) следует (3.49). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условие теоремы о том, что при $\nu_{jt} \neq 0$

$d(\nu, Q_{ij}) \leq m_2 - 3 - \sigma_j$ использовалось только при оценке \bar{u} .

Если же это условие не выполняется, но выполнены остальные условия теоремы 3.1, то можно получить точную по дифференциальному порядку оценку решения, несколько усилив требования на граничные условия. Именно, если

$$\begin{aligned} \Phi_j \in L_{q, \Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_j-\frac{1}{4}, \ell-1-\frac{\sigma_j}{2}-\frac{1}{4})} \quad (\Sigma_\infty), \quad \text{то} \\ \ll \bar{u} \gg_{q, R_\infty}^{(2\ell, \ell)} + \ll \nabla p \gg_{q, R_\infty}^{(2\ell-2, \ell-1)} \leq C \sum_{i=1}^3 \ll \Phi_i \gg_{q, \Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_i-\frac{1}{4}, \ell-1-\frac{\sigma_i}{2}-\frac{1}{4})} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Эта оценка следует из доказательства теоремы, так как при

$\Phi_j \in L_{q, \Sigma_\infty}^{(2\ell-2-\sigma_j-\frac{1}{4}, \ell-1-\frac{\sigma_j}{2}-\frac{1}{4})} (\Sigma_\infty)$ отпадает необходимость в оцен-

ке (3.57) и, следовательно, в последнем из условий (3.48).

Проверка условий (3.48) требует довольно громоздких вычислений. Можно указать более сильное достаточное условие, проверка которого значительно проще. Именно, потребуем, чтобы ν входило в \mathcal{D} со старшей степенью, т.е. $d(\nu, \mathcal{D}) = 8 + \sigma$, $m_2 = 8 + \sigma$, $m_3 = 0$. Из (3.8), (3.9), (3.13), (3.14) и (3.15) следует, что в этом случае условие (3.48) выполняется. Обращаясь к (3.5), замечаем, что в \mathcal{D} старшую степень по ν имеет слагаемое

$-\nu^{2\ell} [B^1(-|\xi'|), B^1(-\nu), B^2(-\nu)]$. Тогда ясно, что $d(\nu, \mathcal{D}) = 9 + \sigma$

в том и только в том случае, когда $d(\nu, [B^1(-|\xi'|), B^1(-\nu), B^2(-\nu)]) = 5 + \sigma$.

Теперь мы можем сформулировать

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если \mathfrak{D} удовлетворяет условиям (3.16), а), в) и $d(\nu, |B^1(-\nu)|, B^1(-\nu), B^2(-\nu)) = 5 + \delta$, то имеет место оценка (3.49).

В том случае, когда условия (3.48) не выполняются, можно, наложив дополнительные ограничения на краевые условия, получить оценку решения задачи (I.1), (I.2), (I.3).

Пусть

$$d(\nu, P_{ij}) = m_2 - 3 - \sigma_j + q_{ij},$$

$$d(\nu, |B_{ij}(-\nu)M_0^{(i)}|) = m_2 - 2 - \sigma_j + r_j,$$

$$d(\nu, Q_{ij}) = m_2 - 2 - \sigma_j + s_{ij} \quad \text{при } b'_{ij} = 0 \quad \text{и}$$

$$d(\nu, Q_{ij}) = m_2 - 3 - \sigma_j + s_{ij} \quad \text{при } b'_{ij} \neq 0,$$

где q_{ij}, r_j, s_{ij} - целые числа, $i, j = 1, 2, 3$. Пусть, далее, $\varkappa_j = \max(q_{ij}, r_j, s_{ij}) > 0$. Очевидно, что $\varkappa_j \leq 8 + \delta - m_2$. Если $\varkappa_j > 1$, то положим

$$\lambda_j = \begin{cases} \varkappa_j, & \text{если } \sigma_j + \varkappa_j - \text{нечетно} \\ \varkappa_j + 1, & \text{если } \sigma_j + \varkappa_j - \text{четно,} \end{cases}$$

$$h_j = \frac{1}{2}(2l - 3 - \sigma_j + \lambda_j). \quad \text{Очевидно, что } h_j - \text{целое число.}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Если \mathfrak{D} удовлетворяет условиям (3.16), а), в) и выполняются следующие соотношения: $2\mu_j < \lambda_j < 2(\mu_j + 1)$

$$\frac{\partial^{h_j-k}}{\partial t^{h_j-k}} \Phi_j = \sum_{|\alpha^k| = h_j - 2k} \frac{\partial^{|\alpha^k|}}{\partial x^{\alpha^k}} (\varphi_{j,\alpha^k}^k(x', t)), \quad (3.73)$$

где $k = 0, 1, \dots, \mu_j$; $\alpha^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k)$ - мультииндекс, то имеет место оценка

$$\langle\langle \bar{u} \rangle\rangle_{q, R_\infty}^{(2l, l)} + \langle\langle \nabla p \rangle\rangle_{q, R_\infty}^{(2l-2, l-1)} \leq \quad (3.74)$$

$$\leq C \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma_\infty}^l (\Phi_i) + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^{\mu_i} \sum_{|\alpha^k| = h_i - 2k} \int_{\Sigma_\infty}^1 (\varphi_{i,\alpha^k}^k) \right\},$$

где $\int_{\Sigma_\infty}^1 (\varphi_{i,\alpha^k}^k) = \langle\langle \varphi_{i,\alpha^k}^k \rangle\rangle_{q, \Sigma_\infty}^{(h_i - \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ при $b'_{i4} = 0$ и $\int_{\Sigma_\infty}^1 (\varphi_{i,\alpha^k}^k) = \langle\langle \varphi_{i,\alpha^k}^k \rangle\rangle_{q, \Sigma_\infty}^{(h_i - \frac{1}{2}, 0)}$ при $b'_{i4} \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся доказательством теоремы 3.1. Рассмотрим второе слагаемое в первом интеграле в (3.50)

$$-\int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{r^{il} Q_{ij}}{2_i} e^{-\nu(x_3 + y_3)} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2\ell} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-v(x_3+y_3)} v^{2\ell-3-\sigma_j} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3 = \\
&= - \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2\ell-\lambda_j} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-v(x_3+y_3)} v^{2\ell} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3 = \\
&= - \sum_{k=0}^{h_j} C_{h_j}^k \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2\ell-\lambda_j} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-v(x_3+y_3)} |\xi|^{2k} s^{h_j-k} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3 = \\
&= - \sum_{k=0}^{h_j} C_{h_j}^k \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2\ell-\lambda_j} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-v(x_3+y_3)} |\xi|^{2k} \sum_{\mu^1=\lambda_j-2k}^{h_j} (i\xi)^{\mu^1} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3 - \\
&\quad - \sum_{k=h_j+1}^{h_j} C_{h_j}^k \int_0^{\infty} F^{-1} \left[\frac{v^{2\ell-\lambda_j} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-v(x_3+y_3)} |\xi|^{2k} s^{h_j-k} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial y_3} \right] dy_3. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Здесь $\Psi_{j\alpha^k}$ - продолжение $\varphi_{j\alpha^k}$ в R_{∞} , $C_{h_j}^k$ - биномиальные коэффициенты.

Из леммы 3.2 и условий теоремы получим

$$\begin{aligned}
M_{\varphi}^{\alpha} \left(\frac{v^{2\ell-\lambda_j} |\xi|^{\lambda_j} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-vt} \right) &\leq \frac{c}{v} & \text{и} \\
M_{\varphi}^{\alpha} \left(\frac{v^{2\ell-\lambda_j} |\xi|^{2k} (i\xi)^{\mu^1} Q_{ij}}{v^{2\ell-3-\sigma_j} D_1} e^{-vt} \right) &\leq \frac{c}{v}.
\end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются остальные слагаемые (3.50). Следуя доказательству теоремы 3.1, получаем в силу теоремы 2.4

$$\begin{aligned}
&\|F^{-1}[v^{2\ell} \tilde{v}_{ij}]\|_{q, R_{\infty}} \leq c \left\{ \sum_{k=0}^{h_j} \sum_{\mu^1=\lambda_j-2k}^{h_j} (\|F^{-1}[\frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\Psi}_{j\alpha^k}]\|_{q, R_{\infty}} + \right. \\
&+ \|F^{-1}[|\xi| \tilde{\Psi}_{j\alpha^k}]\|_{q, R_{\infty}}) + \sum_{k=h_j+1}^{h_j} (\|F^{-1}[|\xi|^{2k-\lambda_j} s^{h_j-k} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial x_3}]\|_{q, R_{\infty}} + \\
&\left. + \|F^{-1}[|\xi|^{2k-\lambda_j+1} s^{h_j-k} \tilde{\Psi}_j]\|_{q, R_{\infty}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|F^{-1}[v^{2\ell} \tilde{v}_{ij}]\|_{q, R_{\infty}} \leq c \left\{ \gamma_{\Sigma_{\infty}}^{\ell} (\Phi_j) + \sum_{k=0}^{h_j} \sum_{\mu^1=\lambda_j-2k}^{h_j} \gamma_{\Sigma_{\infty}}^1 (\varphi_{j\alpha^k}) \right\}.$$

Поступая аналогичным образом с (3.61) и (3.76), получаем оценку (3.74). Теорема доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 следуют оценки решений первой и второй краевых задач в полупространстве, ранее полученные другим способом в [2] и [4].

В первой краевой задаче

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$\mathfrak{D} = \nu |\xi'| / (|\xi'| - \nu); \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -2; \quad m_2 = 1;$$

$$|B_{(3)} M_0^{(4)}| = \nu^2; \quad d(\nu, |B_{(3)} M_0^{(4)}|) = 2 > m_2 - 2 - \sigma_3 = 1.$$

Следовательно, условия (3.48) не выполняются. Легко видеть, что условия (3.16), а) и в) выполнены.

В [2] установлена

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в задаче (I.1), (I.2), (I.3) с B , определяемым формулой (3.76)

$$\frac{\partial \Phi_3(x', t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \varphi_j(x', t)}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle\langle \bar{u} \rangle\rangle_{q, R_\infty}^{(2,1)} + \|\nabla p\|_{q, R_\infty} \leq c \left\{ \sum_{i=1}^2 \|\Phi_i\|_{q, \Sigma_\infty}^{(2-\frac{1}{q}, 1-\frac{1}{q})} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \|\varphi_i\|_{q, \Sigma_\infty}^{(1-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Легко видеть, что при условиях теоремы 3.3 выполняются условия теоремы 3.2 с $\lambda_3 = \alpha_3 = 1$ и из (3.74) следует (3.77).

В [4] рассмотрена вторая краевая задача. Задано следующее краевое условие

$$-\delta_{i3} p + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \Big|_{x_3=0} = \Phi_i, \quad i=1, 2, 3.$$

Это значит, что

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_3} & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

$$\mathfrak{D} = (\nu - |\xi'|) \nu^2 (\nu^2 + \nu^2 |\xi'| + 3\nu |\xi'|^2 - |\xi'|^3),$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1, \quad \sigma = -3.$$

Легко видеть, что \mathfrak{D} удовлетворяет условиям (3.16), а) и в).

$$|B^1, B^1(-\nu), B^2(-\nu)| = -\nu^2 \Rightarrow d(\nu, |B^1, B^1(-\nu), B^2(-\nu)|) = 2 = 5 + \sigma.$$

Это равенство показывает, что выполнено условие следствия 3.1, и, следовательно, имеет место установленная в [4] оценка

$$\langle\langle \bar{u} \rangle\rangle_{q, R_\infty}^{(2,1)} + \|\nabla p\|_{q, R_\infty} \leq c \sum_{i=1}^2 \gamma_{\Sigma_\infty}^1(\Phi_i),$$

где

$$J_{\Sigma_{\infty}}^{\mu}(\Phi_i) = \langle\langle \Phi_i \rangle\rangle_{q, \Sigma_{\infty}}^{(1-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2q})}, \quad i=1, 2,$$

$$J_{\Sigma_{\infty}}^1(\Phi_3) = \langle\langle \Phi_3 \rangle\rangle_{q, \Sigma_{\infty}}^{(1-\frac{1}{q}, 0)}, \quad \text{так как } b_{31}' = -1.$$

Рассмотрим третью краевую задачу, которая характеризуется следующими краевыми условиями

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \Big|_{x_3=0} = \Phi_i, \quad i=1, 2; \quad u_3 \Big|_{x_3=0} = \Phi_3.$$

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$D = (v - |\xi'|) |\xi'| \nu^2 (v + |\xi'|); \quad m_2 = 3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = -1, \quad \sigma_3 = -2;$$

$$|B_{(3)}(-\nu) M_0^{(n)}| = \nu^2 (\nu^2 + |\xi'|^2) \Rightarrow d(\nu, |B_{(3)}(-\nu) M_0^{(n)}|) = 4 >$$

$> m_2 - 2 - \sigma_3 = 3$. Следовательно, условие (3.48) не выполняется. Условиям (3.16), а) и в) D удовлетворяет. Положим повтому, как и в первой краевой задаче, $\lambda_3 = \alpha_3 = 1$, т.е. $\frac{\partial \Phi_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \varphi_j(x, t)}{\partial x_j}$. Тогда по теореме 3.2 получим оценку решения третьей краевой задачи, предполагая, что $\varphi_j|_{t=0} = 0$ ($j=1, 2$)

$$\begin{aligned} \langle\langle \bar{u} \rangle\rangle_{q, R_{\infty}}^{(2,1)} + \|\nabla p\|_{q, R_{\infty}} &\leq c \left\{ \sum_{i=1}^2 \langle\langle \Phi_i \rangle\rangle_{q, \Sigma_{\infty}}^{(1-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2q})} + \right. \\ &+ \langle\langle \Phi_3 \rangle\rangle_{q, \Sigma_{\infty}}^{(2-\frac{1}{q}, 1-\frac{1}{2q})} + \sum_{j=1}^2 \|\varphi_j\|_{q, \Sigma_{\infty}}^{(1-\frac{1}{q}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2q})} \end{aligned}$$

Сформулируем теперь теорему об оценке решения неоднородной краевой задачи в области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} + \nabla p = \bar{f}, \quad \operatorname{div} \bar{u} = \rho, \quad (3.80)$$

$$\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \quad B(\alpha, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})(\bar{u}, p)|_{S_T} = \bar{\Phi}.$$

Здесь $S = \partial\Omega$, $S_T = S \times (0, T)$. Потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{d} + \varphi, \quad (3.81)$$

где $\bar{d} \in W_{q, \partial T}^{2\ell-2, \ell-1}$, $\varphi \in W_{q, \partial T}^{2\ell-2, \ell-1}$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset K_{\lambda} \times (0, T)$,

$K_{\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |\alpha| < \lambda\}$, $\ell \geq 1$ - натуральное, и

$$D_t^{\mu} \bar{u}|_{t=0} = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, \ell-1. \quad (3.82)$$

Элементы b_{ij} оператора B запишем в виде

$$b_{ij}(\alpha, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{|\alpha|+2p=\alpha_i+1} b_{ij+2p}(\alpha, t) D_x^\alpha D_t^p,$$

$$b_{i4}(\alpha, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = b'_{i4}(\alpha, t) D_t^{\alpha_i} + b''_{i4}(\alpha, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}),$$

b'_{i4} - коэффициент при чистой старшей производной по t .

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $S \in C^{2l+\theta}$, $0 < \theta < 1$, оператор B удовлетворяет следующим условиям: в каждой точке (α_0, t_0) боковой поверхности $S_T = S \times (0, T)$ ($\alpha_0 \in S, t_0 \in (0, T)$) оператор с постоянными коэффициентами $B(\alpha_0, t_0, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t})$, записанный в местной системе координат $\{y(\alpha_0)\}$, удовлетворяет условиям (3.16), а), в), (3.48); коэффициенты $b_{ij+2p}(\alpha, t)$ имеют ограниченные производные вида $D_x^\alpha D_t^\mu b_{ij+2p}(\alpha, t)$, где $|\alpha| + 2\mu = 2l - 2 - \delta_i$. Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

1) $\sum_{i=1}^3 |b'_{i4}(\alpha, t)| > 0$, 2) $\bar{u} \cdot \bar{n}|_{S_T} = 0$, \bar{n} - вектор внешней нормали к S . Тогда для всякого решения задачи (3.80), удовлетворяющего условиям (3.81) и (3.82), при достаточно малых T имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \langle \langle \bar{u} \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l, l)} + \langle \langle \nabla p \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l-2, l-1)} \leq c \{ \langle \langle \bar{f} \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l-2, l-1)} + \\ & + \langle \langle \nabla p \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l-2, l-1)} + \langle \langle \bar{u}_0 \rangle \rangle_{q, q}^{(2l-\frac{1}{2})} + \langle \langle \bar{d} \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l-2, l-1)} + \\ & + \langle \langle \varphi \rangle \rangle_{q, q_T}^{(2l-2, l-1)} + \sum_{i=1}^3 [\gamma_{S_T}^l(\Phi_i) + \|\Phi_i\|_{q, S_T}] \}. \end{aligned}$$

Автор выражает благодарность В.А.Солонникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.83, I-163.
2. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1964, т.70, 213-317.
3. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной системы Навье-Стокса. Зап.научн.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1973, т.38, 153-231.

4. Солонников В.А. Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1976, т. 59, 178-254.
5. Fabes E.V., Lewis J.E., Riviere N.M. Boundary Value Problems for the Navier-Stokes Equations. American Journal of Mathematics, 1977, vol. 99, N 3, 626-668.
6. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975, 478 с.
7. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1969, т. 105, 89-167.
8. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{(v)}(R^n)$. Матем. сборник, 1963, т. 60, № 3, 325-353.
9. Волович Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем. сборник, 1965, т. 68, № 3, 373-416.