Е. Н. Сметанникова, В. А. Соболев, Периодическая сингулярно возмущенная задача для матричного уравнения Риккати,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 500–507

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 500–507

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.2

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

© 2005 г. **Е. Н. Сметанникова, В. А. Соболев**

1. Введение. Рассмотрим матричное уравнение Риккати

$$\mu^2(\dot\rho + \rho A(t,\mu) + A^{\mathrm{T}}(t,\mu)\rho + Q(t,\mu)) = \rho B(t,\mu)R^{-1}(t,\mu)B^{\mathrm{T}}(t,\mu)\rho \qquad (1)$$

с условием периодичности по t

$$\rho(0,\mu) = \rho(1,\mu). \qquad (2)$$

Здесь μ – положительный малый параметр, $t \in R$, $Q(t,\mu)$ – симметрическая неотрицательно-определенная матрица, а $R(t,\mu)$ – симметрическая положительно-определенная матрица. Предположим, что

I. Матричные функции $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$, $Q(t,\mu)$ и $R(t,\mu)$ 1-периодичны по t и достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по t и μ при $t \in R$, $\mu \in [0,\mu_0]$, $0 < \mu_0 \ll 1$.

Хорошо известно, что задача (1), (2) возникает при решении линейно-квадратической задачи управления [1, с. 373], а также при решении задач оптимальной фильтрации [1, с. 191].

Будем говорить, что имеет место:

1) случай 0, если при всех значениях $t \in [0,1]$ матрица Q положительно определена и $\operatorname{rank} B = n$;

2) случай 1, если при всех значениях $t \in [0,1]$ матрица $B^{\mathrm{T}}QB$ невырождена и $\operatorname{rank} B = r \le n$.

3) случай L ($L \ge 2$), если при всех значениях $t \in [0,1]$ выполняются условия

$$B_j^{\mathrm{T}}QB_j = 0, \quad j = \overline{0, L-2}, \quad B_{L-1}^{\mathrm{T}}QB_{L-1} > 0, \qquad (3)$$

где $B_0 = B$, $B_j = AB_{j-1} - \dot B_{j-1}$, $j \ge 1$.

Решение задачи (1), (2) в случаях 0 и 1 представимо в виде асимптотического разложения по целым степеням параметра μ, алгоритм построения асимптотики подробно описан в [2]. В случае L решение (1), (2) представимо в виде асимптотического разложения по дробным степеням параметра $\varepsilon = \mu^{1/L}$, т.е. $\rho(t,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(t)\mu^{j/L}$.

Задача (1), (2) с невозмущенными непериодическими матричными коэффициентами рассматривалась в работах [3–5].

В настоящей работе для нахождения 1-периодического решения поставленной задачи формируется расширенная периодическая сингулярно возмущенная задача, которая допускает применение метода сведения к начальной задаче [2, 6] и метода интегральных многообразий [7, 8].

2. Сведение периодической задачи к начальной. В работе [6] показано, что начальное значение периодического решения уравнения

$$\dot\rho + \rho A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)\rho + Q(t) = \rho S(t)\rho, \qquad (4)$$

где $S = BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$, определяется выражением $F = K(0) + Y(1)W$, постоянная матрица W удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению второй степени

$$W = [K(0) + Y(1)W]\,[X(0) + P(1)W],$$

коэффициенты которого являются решениями следующих вспомогательных матричных задач Коши:

$$\dot K + KA(t) + A^{\mathrm{T}}(t)K + Q(t) = KS(t)K, \quad K(1) = 0, \qquad (5)$$

$$\dot{P} - PA^{\mathrm{T}}(t) - A(t)P + S(t) = PQ(t)P, \quad P(0) = 0, \tag{6}$$

$$\dot{X} + X(A(t) - S(t)K) = 0, \quad X(1) = I, \tag{7}$$

$$\dot{Y} = Y(A^{\mathrm{T}}(t) + Q(t)P), \quad Y(0) = I. \tag{8}$$

В работе [2] этот результат распространен на случай сингулярно возмущенных периодических задач, в которых матричные функции допускают следующее разбиение на блоки:

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & \mu K_2 \\ \mu K_2^{\mathrm{T}} & \mu K_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mu^{-1}A_3 & \mu^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \mu^{-1}B_2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^{\mathrm{T}} & Q_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & \mu^{-1}P_2 \\ \mu^{-1}P_2^{\mathrm{T}} & \mu^{-1}P_3 \end{pmatrix}.$$

Методом, описанным в работе [2], периодическая сингулярно возмущенная задача для уравнения (4) сводится к начальной задаче, размерность которой может быть понижена до размерности блока медленных переменных.

3. Формирование расширенной задачи. В условиях (3) $\mu = \varepsilon^L$ и уравнение (1) имеет вид

$$\varepsilon^{2L}(\dot{\rho} + \rho A + A^{\mathrm{T}}\rho + Q) = \rho B R^{-1} B^{\mathrm{T}} \rho. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\rho_{00} = \rho, \quad \rho B_{L-j} = \rho_{0j}\varepsilon^j, \quad j = \overline{1,L}, \quad B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j} = \rho_{ij}\varepsilon^{i+j-1}, \quad i,j = \overline{1,L},$$
$$\rho_{ij} = \rho_{ji}^{\mathrm{T}}, \quad i,j = \overline{0,L}, \tag{10}$$

и наряду с задачей для матрицы $\rho(t,\varepsilon)$ рассмотрим задачи для матричных функций $\rho_{ij}(t,\varepsilon)$, $i,j = \overline{1,L}$.

Уравнение (9) в этих обозначениях примет вид

$$\varepsilon^{2L}(\dot{\rho} + \rho A + A^{\mathrm{T}}\rho + Q) = (\rho B_{L-L})R^{-1}(B_{L-L}^{\mathrm{T}}\rho) = \varepsilon^{2L}\rho_{0L}R^{-1}\rho_{0L}^{\mathrm{T}},$$

откуда

$$\dot{\rho} + \rho A + A^{\mathrm{T}}\rho + Q = \rho_{0L}R^{-1}\rho_{0L}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Умножая уравнение на матрицу B_{L-j} справа, после несложных преобразований для матриц $\rho_{0j}(t,\varepsilon)$, $j = \overline{1,L}$, получаем уравнение $\varepsilon^{2L}((\rho B_{L-j})^{\boldsymbol\cdot} + \rho(AB_{L-j} - \dot{B}_{L-j}) + A^{\mathrm{T}}(\rho B_{L-j}) + QB_{L-j}) = (\rho B_{L-L})R^{-1}(B_{L-L}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j})$, которое с учетом введенных обозначений можно записать в виде $\dot{\rho}_{0j}\varepsilon^j + \rho B_{L-j+1} + A^{\mathrm{T}}\rho_{0j}\varepsilon^j + QB_{L-j} = \varepsilon^{j-1}\rho_{0L}R^{-1}\rho_{jL}^{\mathrm{T}}$. Отсюда при $j = 1$ в силу $QB_{L-1} \neq 0$ для матрицы ρ_{01} имеем

$$\varepsilon\dot{\rho}_{01} + \rho B_L + \varepsilon A^{\mathrm{T}}\rho_{01} + QB_{L-1} = \rho_{0L}R^{-1}\rho_{1L}^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

а при $j = \overline{2,L}$ $QB_{L-j} = 0$, поэтому с учетом обозначений (10) приходим к уравнению

$$\varepsilon\dot{\rho}_{0j} + \rho_{0j-1} + \varepsilon A^{\mathrm{T}}\rho_{0j} = \rho_{0L}R^{-1}\rho_{jL}^{\mathrm{T}}, \quad j = \overline{2,L}. \tag{13}$$

Умножая обе части уравнения (9) на матрицу B_{L-i}^{T} слева и на матрицу B_{L-j} справа, для функции ρ_{ij}, где $i = \overline{1,L}$, $j = \overline{i,L}$, получаем уравнение $\varepsilon^{2L}(B_{L-i}^{\mathrm{T}}\dot{\rho}B_{L-j} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho AB_{L-j} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}QB_{L-j}) = (B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-L})R^{-1}(B_{L-L}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j})$ или $\varepsilon^{2L}((B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j})^{\boldsymbol\cdot} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j+1} + B_{L-i+1}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}QB_{L-j}) = (B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-L})R^{-1}(B_{L-L}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j})$, откуда с учетом (10) вытекает уравнение

$$\dot{\rho}_{ij}\varepsilon^{i+j-1} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j+1} + B_{L-i+1}^{\mathrm{T}}\rho B_{L-j} + B_{L-i}^{\mathrm{T}}QB_{L-j} = \varepsilon^{i+j-2}\rho_{iL}R^{-1}\rho_{jL}^{\mathrm{T}}.$$

Выделим частные случаи.

1. Если $i = 1$, $j = 1$, то в случае L $B^{\mathrm{T}}_{L-1}QB_{L-1} > 0$, поэтому уравнение для матрицы $\rho_{11}(t,\varepsilon)$ с учетом обозначений (10) имеет вид

$$\varepsilon\dot{\rho}_{11} + \varepsilon\rho^{\mathrm{T}}_{01}B_L + \varepsilon B^{\mathrm{T}}_L\rho_{01} + B^{\mathrm{T}}_{L-1}QB_{L-1} = \rho_{1L}R^{-1}\rho^{\mathrm{T}}_{1L}. \tag{14}$$

2. При $i = 1$, $j > 1$ $B^{\mathrm{T}}_{L-1}QB_{L-j} = 0$, поэтому для $\rho_{1j}(t,\varepsilon)$ имеем уравнение

$$\varepsilon\dot{\rho}_{1j} + \rho_{1,j-1} + \varepsilon B^{\mathrm{T}}_L\rho_{0j} = \rho_{1L}R^{-1}\rho^{\mathrm{T}}_{jL}, \quad j = \overline{2,L}. \tag{15}$$

3. При $i > 1$, $j \geq i$ $B^{\mathrm{T}}_{L-i}QB_{L-j} = 0$, тогда уравнение для матричных функций $\rho_{i,j}$, где $i = \overline{2,L}$, $j = \overline{i,L}$, запишем в виде

$$\varepsilon\dot{\rho}_{ij} + \rho_{i,j-1} + \rho_{i-1,j} = \rho_{iL}R^{-1}\rho^{\mathrm{T}}_{jL}, \quad i = \overline{2,L}, \quad j = \overline{i,L}. \tag{16}$$

Таким образом, для матриц $\rho_{ij}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0,L}$, $j = \overline{i,L}$, получили систему матричных уравнений (11)–(16), первое из которых – уравнение для матрицы $\rho = \rho_{00}(t,\varepsilon)$ – является регулярно возмущенным, а остальные – сингулярно возмущенными.

Добавляя условия периодичности для матриц

$$\rho_{ij}(0,\varepsilon) = B^{\mathrm{T}}_{L-i}(1,\varepsilon)\rho(0,\varepsilon)B_{L-j}(1,\varepsilon) = \rho_{ij}(1,\varepsilon), \tag{17}$$

получаем задачу (11)–(17), которая будет сведена к задаче Коши методом, изложенным в п. 2. Назовем эту задачу расширенной.

Задача (11)–(17) эквивалентна задаче для матричного уравнения Риккати

$$\dot{\overline{\rho}} + \overline{\rho}\,\overline{A}(t,\varepsilon) + \overline{A}^{\mathrm{T}}(t,\varepsilon)\overline{\rho} + \overline{Q} = \overline{\rho}\,\overline{S}\,\overline{\rho}, \quad \overline{\rho}(0) = \overline{\rho}(1), \tag{18}$$

матричные компоненты которого можно разбить на блоки следующим образом:

$$\overline{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1(t,\varepsilon) & \varepsilon\rho_2(t,\varepsilon) \\ \varepsilon\rho^{\mathrm{T}}_2(t,\varepsilon) & \varepsilon\rho_3(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где матричные функции $\rho_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$, имеют соответственно размерности $(n\times n)$, $(n\times rL)$ и $(rL\times rL)$, причем $\rho_1(t,\varepsilon) = \rho$, $\rho_2(t,\varepsilon) = (\rho_{01}\ \rho_{02}\ \ldots\ \rho_{0L})$ и $\rho_3(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1L} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{\mathrm{T}}_{1L} & \cdots & \rho_{LL} \end{pmatrix}$.

Матрица $\overline{A}(t,\varepsilon)$ разбивается на блоки следующим образом: $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \varepsilon^{-1}A_3(t) & \varepsilon^{-1}A_4(t) \end{pmatrix}$, компоненты этой матрицы $A_1 = A$, $A_2 = (B_L\ 0\ \ldots\ 0)$, $A_3 = (0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_{(L-1)r} \\ 0_r & 0 \end{pmatrix}$, где 0_r – нулевая $r\times r$-матрица, I_k – единичная $k\times k$-матрица, имеют соответственно размерности $(n\times n)$, $(n\times rL)$, $(rL\times n)$ и $(rL\times rL)$. Матрица $\overline{Q}(t,\varepsilon)$ может быть записана в блочной форме в виде $\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q^{\mathrm{T}}_2 & Q_3 \end{pmatrix}$. Компоненты матрицы $\overline{Q}$: $Q_1 = Q$, $Q_2 = (QB_{L-1}\ 0)$, $Q_3 = \begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}}_{L-1}QB_{L-1} & 0 \\ 0 & 0_{(L-1)r} \end{pmatrix}$ имеют соответственно размерности $(n\times n)$, $(n\times rL)$ и $(rL\times rL)$. Наконец, для матрицы $\overline{S}(t,\varepsilon)$ получаем разбиение $\overline{S} = \begin{pmatrix} S_1 & \varepsilon^{-1}S_2 \\ \varepsilon^{-1}S^{\mathrm{T}}_2 & \varepsilon^{-2}S_3 \end{pmatrix}$, где матричные блоки $S_1 = 0_n$, $S_2 = (0\ \ldots\ 0)$ и $S_3 = \begin{pmatrix} 0_{r(L-1)} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$ имеют соответственно размерности: $(n\times n)$, $(n\times rL)$ и $(rL\times rL)$, причем R – $r\times r$-матрица.

4. Понижение размерности расширенной задачи. Сведем периодическую задачу (11)–(17) к начальной задаче меньшей размерности. Тогда начальное значение периодического решения на медленном интегральном многообразии будет искомым начальным значением периодического решения исходного уравнения для матрицы $\rho(t,\mu)$.

Для построения интегрального многообразия задачи (11)–(17) можно применить алгоритм, описанный в работе [2]. Матричные коэффициенты удовлетворяют всем необходимым требованиям периодичности, гладкости, имеют соответствующие разбиения на блоки.

Задачи (5)–(8) можно переписать в виде

$$\dot{\overline{K}}+\overline{K}\,\overline{A}+\overline{A}^{\text{т}}\,\overline{K}+\overline{Q}=\overline{K}\,\overline{S}\,\overline{K},\quad \overline{K}(1,\varepsilon)=0, \tag{19}$$

$$\dot{\overline{P}}-\overline{P}\,\overline{A}^{\text{т}}-\overline{A}\,\overline{P}+\overline{S}=\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{P},\quad \overline{P}(0,\varepsilon)=0, \tag{20}$$

$$\dot{\overline{X}}+\overline{X}(\overline{A}-\overline{S}\,\overline{K})=0,\quad \overline{X}(1,\varepsilon)=I, \tag{21}$$

$$\dot{\overline{Y}}=\overline{Y}(\overline{A}^{\text{т}}+\overline{Q}\,\overline{P}),\quad \overline{Y}(0,\varepsilon)=I. \tag{22}$$

Начальное значение периодического решения задачи (18) определяется формулой

$$\overline{F}=\overline{K}(0,\varepsilon)+\overline{Y}(1,\varepsilon)\overline{W}, \tag{23}$$

постоянная матрица $\overline{W}$ удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению второй степени

$$\overline{W}=[\overline{K}(0,\varepsilon)+\overline{Y}(1,\varepsilon)\overline{W}]\,[\overline{X}(0,\varepsilon)+\overline{P}(1,\varepsilon)\overline{W}]. \tag{24}$$

Заметим, что задачи для матриц $\overline{\rho}(t,\varepsilon)$ и $\overline{K}(t,\varepsilon)$ отличаются только граничными условиями. Следовательно, матрицы-функции $K_{ij}(t,\varepsilon)$ будут удовлетворять расширенной системе уравнений (11)–(16) с граничными условиями $K_{ij}(1,\varepsilon)=0$.

Чтобы получить уравнение для матрицы $K(t,\varepsilon)$ на интегральном многообразии расширенной системы (11)–(16), необходимо получить выражение для матрицы K_{0L} с требуемой степенью точности и подставить его в уравнение (11) системы. Заметим, что при этом вовсе не обязательно находить все $K_{ij_S}(t)$, достаточно знать все $K_{ij_{S-1}}(t)$.

Получим уравнение для матрицы $K(t,0)$. При $\varepsilon=0$ вырожденная задача (11)–(16) принимает вид

$$\begin{gathered}\dot K+KA+A^{\text{т}}K+Q=K_{0L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{0L_0},\quad K(1,0)=0,\quad KB_L+QB_{L-1}=K_{0L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{1L_0},\\ K_{0,j-1_0}=K_{0L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{jL_0},\quad j=\overline{2,L},\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1}=K_{1L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{1L_0},\quad K_{1,j-1_0}=K_{1L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{jL_0},\quad j=\overline{2,L},\\ K_{i,j-1_0}+K_{i-1,j_0}=K_{iL_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{jL_0},\quad i=\overline{2,L},\quad j=\overline{i,L}.\end{gathered} \tag{26}$$

Предположим, что

II. Система матричных алгебраических уравнений (26) имеет единственное положительно-определенное решение

$$M(t)=\begin{pmatrix}K_{11_0} & K_{12_0} & \ldots & K_{1L_0}\\ K^{\text{т}}_{12_0} & K_{22_0} & \ldots & K_{2L_0}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K^{\text{т}}_{1L_0} & K^{\text{т}}_{2L_0} & \ldots & K_{LL_0}\end{pmatrix}$$

и собственные числа матрицы $D_{40}(t)=A_{40}(t)-S_{30}(t)M(t)$ имеют отрицательные вещественные части при $t\in[0,1]$ [9, 10].

Чтобы получить уравнение для матрицы $K_0(t) = K(t,0)$, достаточно решить квадратное уравнение для матрицы $K_{1L_0}(t)$ и линейное уравнение для матрицы $K_{0L_0}(t)$. Выбор матрицы-решения $K_{ij_0}(t)$, $i,j=\overline{1,L}$, системы не должен нарушать требования положительной определенности матрицы $M(t)$. Уравнение $B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1} = K_{1L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{1L_0}$ имеет единственное симметрическое положительно-определенное 1-периодическое решение

$$K_{L1_0} = R^{1/2}(R^{-1/2}B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1}R^{-1/2})^{1/2}R^{1/2}.$$

Из линейного уравнения $KB_L + QB_{L-1} = K_{0L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{1L_0}$ для матрицы $K_{0L_0}(t)$ имеем выражение

$$K_{0L_0} = (KB_L + QB_{L-1})[K^{\text{т}}_{1L_0}]^{-1}R = (KB_L + QB_{L-1})K^{-1}_{L1_0}R.$$

Подставляя его в уравнение для матрицы $K(t,0)$, получаем

$$\dot K + KA + A^{\text{т}}K + Q = K_{0L_0}R^{-1}K^{\text{т}}_{0L_0} = (KB_L + QB_{L-1})K^{-1}_{L1_0}RR^{-1}RK^{-1}_{1L_0}(B^{\text{т}}_LK + B^{\text{т}}_{L-1}Q) =$$
$$= KB_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_LK + KB_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q +$$
$$+ QB_{L-1}K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_LK + QB_{L-1}K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\dot K + K(A - B_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q) + (A^{\text{т}} - QB_{L-1}K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_L)K +$$
$$+ (Q - QB_{L-1}K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q) = KB_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_LK$$

или

$$\dot K + KA_0 + A_0^{\text{т}}K + Q_0 = KS_0K, \tag{27}$$

где $A_0 = A - B_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q$, $Q_0 = Q - QB_{L-1}K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_{L-1}Q$, $S_0 = B_LK^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0}B^{\text{т}}_L$. Используя преобразование

$$K^{-1}_{L1_0}RK^{-1}_{1L_0} =$$
$$= R^{-1/2}(R^{-1/2}B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1}R^{-1/2})^{-1/2}R^{-1/2}RR^{-1/2}(R^{-1/2}B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1}R^{-1/2})^{-1/2}R^{-1/2} =$$
$$= R^{-1/2}(R^{-1/2}B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1}R^{-1/2})^{-1}R^{-1/2} = R^{-1/2}R^{1/2}(B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1})^{-1}R^{1/2}R^{-1/2} =$$
$$= (B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1})^{-1},$$

для коэффициентов уравнения (27) получаем следующие выражения:

$$A_0 = A - B_L(B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1})^{-1}B^{\text{т}}_{L-1}Q, \quad Q_0 = Q - QB_{L-1}(B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1})^{-1}B^{\text{т}}_{L-1}Q,$$
$$S_0 = B_L(B^{\text{т}}_{L-1}QB_{L-1})^{-1}B^{\text{т}}_L.$$

Уравнение (27) хорошо известно. Оно получено в работах [3–5] другими методами. Положительная полуопределенность матрицы $Q_0(t)$ доказана в работе [10].

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

III. Уравнение (27) с граничным условием $K(1,0)=0$ имеет единственное решение, соответствующее $M(t)$, на $[0,1]$.

IV. Уравнение (27) с условием периодичности $K(0,0) = K(1,0)$ имеет единственное неотрицательно-определенное 1-периодическое решение такое, что система $\dot y = (A(t,0) - S(t,0)K(t,0))y$ является асимптотически устойчивой.

Из работы [8] следует, что в условиях I–III при достаточно малых значениях ε существует единственное интегральное многообразие системы (11)–(16).

Условия I–IV связаны с достаточными условиями существования и единственности 1-периодического решения $\overline{\rho}(t,\varepsilon)$ расширенной задачи (19), обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы $\dot{\overline{y}} = (\overline{A}(t,\varepsilon) - \overline{S}(t,\varepsilon)\overline{\rho}(t,\varepsilon))y$, а также близость решений расширенной задачи $\overline{\rho}_1(t,\varepsilon)$ и исходной задачи $\rho(t,\varepsilon)$ [12].

Далее можно, следуя описанному в работе [2] алгоритму, найти все $K_{ij_0}(t)$ и, подставив их в уравнение (11), получить задачу для матрицы $K(t,\varepsilon)$ в первом приближении с граничным условием $K(1,\varepsilon)=\xi=O(\varepsilon)$ [8].

Уравнение (20) для матрицы $\overline{P}(t,\varepsilon)$ получается заменой переменных $\overline{K}^{-1}(t,\varepsilon)=\overline{P}(t,\varepsilon)$ в уравнении (19).

Матричная функция $\overline{P}(t,\varepsilon)$ имеет структуру вида $\overline{P}=\begin{pmatrix}P_1 & \varepsilon^{-1}P_2\\ \varepsilon^{-1}P_2^{\text{т}} & \varepsilon^{-1}P_3\end{pmatrix}$, где матричные блоки в разбиении $\overline{P}(t,\varepsilon)$ имеют вид: $n\times n$-матрица $P_1=P$, $n\times rL$-матрица $P_2=$ $=(P_{01}\ P_{02}\ \ldots\ P_{0L})$, $rL\times rL$-матрица $P_3=\begin{pmatrix}P_{11} & \ldots & P_{1L}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ P_{1L}^{\text{т}} & \ldots & P_{LL}\end{pmatrix}$.

В работе [2] показано, что матричное уравнение для $\overline{P}(t,\varepsilon)$ может быть переписано в виде $\dot{\widetilde{P}}=-\widetilde{P}\widetilde{A}-\widetilde{A}\widetilde{P}+\widetilde{P}\widetilde{S}\widetilde{P}-\widetilde{Q}$, $\widetilde{P}(0)=0$, где

$$\widetilde{P}=\begin{pmatrix}P_1 & \varepsilon P_2\\ \varepsilon P_2^{\text{т}} & \varepsilon P_3\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}-A_1^{\text{т}} & -A_3^{\text{т}}\\ -\varepsilon^{-1}A_2^{\text{т}} & \varepsilon^{-1}A_4^{\text{т}}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}0_{n+(L-1)r} & 0\\ 0 & R^{-1}\end{pmatrix},\quad \widetilde{S}=\begin{pmatrix}Q_1 & \varepsilon^{-1}Q_2\\ \varepsilon^{-1}Q_2^{\text{т}} & \varepsilon^{-2}Q_3\end{pmatrix}.$$

Интегральное многообразие полученной задачи строится по описанному выше образцу. Матрица $V=\begin{pmatrix}P_{11_0} & \ldots & P_{1L_0}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ P_{1L_0}^{\text{т}} & \ldots & P_{LL_0}\end{pmatrix}$ является единственным отрицательно-определенным решением уравнения для матрицы P при $\varepsilon=0$ и собственные числа матрицы $-G_{40}(t)=$ $=A_{40}^{\text{т}}(t)+Q_{30}(t)V(t)$ имеют отрицательные вещественные части.

Матрица $P(t,0)$ будет удовлетворять уравнению на интегральном многообразии, которое получится из (27) заменой $P(t,0)=K^{-1}(t,0)$

$$\dot{P}=A_0P+PA_0^{\text{т}}+PQ_0P-S_0 \tag{28}$$

с условием

$$P(0,0)=0. \tag{29}$$

Предположим, что выполнено условие

V. Задача (28), (29) имеет единственное решение, соответствующее отрицательно-определенному корню $V(t)$ уравнения для $P_{30}(t)$, на $[0,1]$. Тогда система (20) имеет единственное устойчивое интегральное многообразие медленных движений [2].

Вопросы существования, единственности медленного интегрального многообразия линейных задач (21) и (22), а также алгоритм его построения описаны в работе [11]. После понижения размерности задачи (21) получаем задачу для нулевого приближения матрицы $X(t,\varepsilon)$

$$\dot{X}=-XD_{10}^{\text{т}}=-X(A_0-S_0K),\quad X(1)=I, \tag{30}$$

а для задачи (22) задача более низкой размерности имеет вид

$$\dot{Y}=YG_{10}^{\text{т}}=X(A_0^{\text{т}}+Q_0P),\quad Y(0)=I. \tag{31}$$

Заметим, что, объединив задачи (27), (28)–(31), мы будем находиться в условиях теоремы о начальном значении периодического решения в случае невозмущенных задач [6]. В нулевом приближении матрица начальных значений, т.е. $F_1=\rho(0,0)=\rho(1,0)$, согласно этой теореме, определяется формулой $F_1(0)=K(0,0)+Y(1,0)W(0)$, а матрица $W(0)$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$W(0)=[K(0,0)+Y(1,0)W(0)][X(0,0)+P(1,0)W(0)].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение о сведении расширенной периодической задачи к начальной задаче меньшей размерности в случае L.

Теорема. *Пусть имеют место случай L и условия* I–V. *Тогда существует такое значение $\mu_L > 0$, что при $\mu \in (0, \mu_L]$ существует единственное неотрицательно-определенное 1-периодическое решение уравнения (1), представимое в виде асимптотического разложения по степеням параметра $\varepsilon = \mu^{1/L}$, его начальное значение $F(\mu) = \rho(0, \mu)$ определяется формулой (23), а матрица $\overline{W}(\mu)$ – как решение уравнения (24).*

Замечание. В условиях теоремы справедливо предельное равенство $\lim\limits_{\mu\to 0} \|\overline{W}_0 - W(\mu)\| = 0$, где $\overline{W}_0$ – решение вырожденной задачи, соответствующей "расширенной" задаче (18).

5. Пример построения асимптотики в случае 2. Рассмотрим задачу нахождения 1-периодического решения уравнения Риккати

$$\varepsilon^4(\dot\rho + \rho A + A^{\mathrm{T}}\rho + Q) = \rho S \rho,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q(t,\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1 + \mu\cos(2\pi t)$, $q(t,\mu) = 1 + \mu q_1(t,\mu)$, где $q_1(t,\mu)$ – 1-периодическая функция.

Такие задачи возникают, например, при решении задачи управления крутильными колебаниями простейшего кривошипно-шатунного механизма [13].

Матрица ρ в силу условия ортогональности, т.е. условия $\rho B = 0$, имеет блочную структуру вида $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & \varepsilon^2\rho_2 \\ \varepsilon^2\rho_2 & \varepsilon^2\rho_3 \end{pmatrix}$. Найдем численно периодическое решение задачи. Покажем на рассматриваемом примере, как регуляризовать задачу для $\rho(t,\mu)$ с помощью описанного выше метода.

Численное интегрирование проведем дважды: сначала проинтегрируем полную систему для матричного уравнения Риккати, к которому сводится поставленная задача, определив начальное значение периодического решения, затем построим интегральное многообразие расширенной задачи.

Так как $B^{\mathrm{T}}QB \equiv 0$, а $B_1^{\mathrm{T}}QB_1 = q > 0$, то имеет место случай 2 и асимптотические разложения решений необходимо искать по степеням параметра $\varepsilon = \mu^{1/2}$.

Уравнение Риккати эквивалентно системе скалярных уравнений для ρ_1, ρ_2, ρ_3 :

$$\begin{aligned}
&\dot\rho_1 = -2\varepsilon^2\alpha\rho_2 + \rho_2^2 - q, && \rho_1(0,\varepsilon) = \rho_1(1,\varepsilon),\\
&\dot\rho_2 = -\varepsilon^{-2}(\rho_1 - \rho_2\rho_3) - \alpha\rho_3, && \rho_2(0,\varepsilon) = \rho_2(1,\varepsilon),\\
&\dot\rho_3 = \varepsilon^{-2}\rho_3^2 - 2\rho_2, && \rho_3(0,\varepsilon) = \rho_3(1,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{32}$$

Регуляризованная задача имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot\rho_1 = \alpha^2\rho_2^2 + 2\varepsilon(1 - \alpha\rho_2)(-\dot\alpha\rho_2 + \sqrt{2}\alpha^2\rho_3 - \sqrt{2}(1 - \alpha\rho_2)\alpha^2\rho_3),\\
\dot\rho_2 = -\rho_1 + \alpha^2\rho_2\rho_3 + \varepsilon((1 - \alpha\rho_2)(-\sqrt{2}\alpha - \dot\alpha\rho_3 + \sqrt{2}(1 - \alpha\rho_2) + \sqrt{2}\alpha^3\rho_3^2) -\\
- \alpha\rho_3(-\dot\alpha\rho_2 + \sqrt{2}\alpha^2\rho_3 - \sqrt{2}(1 - \alpha\rho_2)\alpha^2\rho_3)),\\
\dot\rho_3 = -2\rho_2 + \alpha^2\rho_3^2 + 2\varepsilon\alpha\rho_3(-\sqrt{2}\alpha - \dot\alpha\rho_3 + \sqrt{2}(1 - \alpha\rho_2) + \sqrt{2}\alpha^3\rho_3^2),\\
\rho_i(0,\varepsilon) = \rho_i(1,\varepsilon), \quad i = \overline{1,3}.
\end{gathered} \tag{33}$$

Численно проинтегрируем систему на интегральном многообразии. Сравним результаты, полученные разными способами. В случае, когда $\alpha = 1 + \varepsilon^2\cos(2\pi t)$, а $q = 1 + 2\varepsilon^2\cos(2\pi t) + 2\sqrt{2}\varepsilon^3\pi\sin(2\pi t)$, удается найти точное решение задачи (32). Сравним с начальным значением периодического решения для ρ, вычисленным при $\varepsilon = 0.01$, $\rho_1(0) = \varepsilon\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{2}\cos(2\pi t) \approx$

$\approx 1.41421\cdot 10^{-2}$, $\rho_2(0) = \varepsilon^2\sqrt{2} = 1\cdot 10^{-4}$, $\rho_3(0) = \varepsilon^3 \approx 1.41421\cdot 10^{-6}$, результаты численного интегрирования задачи (32) $\rho_1(0) \approx 1.41435\cdot 10^{-2}$, $\rho_2(0) \approx 0.999973\cdot 10^{-4}$, $\rho_3(0) \approx 1.41421\cdot 10^{-6}$ и регуляризованной задачи (33) $\rho_1(0) \approx 1.41427\cdot 10^{-2}$, $\rho_2(0) \approx 1\cdot 10^{-4}$, $\rho_3(0) \approx 1.41421\cdot 10^{-6}$.

Отметим, что погрешности численного интегрирования полной системы (32) превосходят погрешности численного счета регуляризованной задачи (33) и растут при уменьшении малого параметра, в то время как точность нахождения начального значения периодического решения с помощью построения медленного многообразия расширенной системы увеличивается.

Авторы выражают признательность Булевскому центру исследований в области информатики (Boole Centre for Research in Informatics, UCC, Ireland) и Российскому фонду фундаментальных исследований (проект 04-01-96515) за поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. М., 1987.
2. *Жарикова Е.Н., Соболев В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 151–168.
3. *O'Malley R.E. (Jr.), Jameson A.* // Appl. Math. Optim. 1975. № 1. P. 337–354.
4. *O'Malley R.E. (Jr.), Jameson A.* // IEEE Trans. Automatic Control. 1975. V. 20. P. 218–226.
5. *O'Malley R.E. (Jr.), Jameson A.* // IEEE Trans. Automatic Control. 1977. V. 22. P. 328–337.
6. *Мурадян М.Г.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2176–2178.
7. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М., 1988.
8. *Соболев В.А.* // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 53–64.
9. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–78.
10. *Speyer J.L.* // Control and dynamic systems. New York, 1986.
11. *Sobolev V.A.* // System & Control Lett. 1984. № 5. P. 169–279.
12. *Bittani S., Guadarabassi G., Mafezzoni C., Silverman L.* // SIAM J. Control and Optimiz. 1978. V. 16. № 1. P. 37–40.
13. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. М., 1967.

Самарский государственный аэрокосмический университет,
Самарский государственный университет

Поступила в редакцию
08.09.2003 г.