ЛИТЕРАТУРА

1. *Багиров Э. Б.* Нижняя оценка для распределений квадратичных форм от нормально распределенных случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 4, с. 815—819.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
3. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
4. *Birnbaum Z. W.* On random variables with comparable peakedness. — Ann. Math. Statist., 1948, v. 19, № 1, p. 76—81.

Поступила в редакцию
17.VI.1988

О ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАРТИНГАЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

БЕНДИКОВ А. Д., ПАВЛОВ И. В.

Введение. Настоящая работа состоит из двух частей. В п. 1 вводится смешанная норма на множестве мартингалов относительно специального возрастающего семейства σ-алгебр. Такие пространства мартингалов (они обозначаются через $\mathscr{M}_p$) естественно возникают при перенесении определения смешанной нормы с конечномерных структур (см. [1]) на бесконечномерные (см. [2], [3]). В п. 2, рассматривая гармонические функции в области $T^\infty \times]0, \infty[$ (T^∞ — счетное декартово произведение единичных окружностей), мы применяем норму $\mathscr{M}_p$ для изучения граничного поведения этих функций, а также вопроса представления их в виде интеграла Пуассона. Классические конечномерные результаты по данному вопросу изложены в монографии [4, гл. II].

1. Пространства мартингалов с конечной смешанной нормой. Пусть $(\Omega_k, \mathscr{A}_k, \mathbf{Q}_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность вероятностных пространств. Введем следующие обозначения:

$$\Omega_m^n := \prod_{k=m+1}^n \Omega_k, \quad \mathscr{A}_m^n := \prod_{k=m+1}^n \mathscr{A}_k, \quad \mathbf{P}_m^n := \prod_{k=m+1}^n \mathbf{Q}_k,$$

$$\Omega^n := \Omega_0^n, \quad \mathscr{A}^n := \mathscr{A}_0^n, \quad \mathbf{P}^n := \mathbf{P}_0^n,$$

$$\Omega := \Omega_0^\infty, \quad \mathscr{A} := \mathscr{A}_0^\infty, \quad \mathbf{P} := \mathbf{P}_0^\infty, \quad \mathbf{P}_m := \mathbf{P}_m^\infty.$$

Если $\omega_k \in \Omega_k$, то $\omega_m^n := (\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n) \in \Omega_m^n$; при этом полагаем $\omega^n := \omega_0^n$, $\omega_m := \omega_m^\infty$, $\omega := \omega_0^\infty$.

Введем в рассмотрение на Ω возрастающее семейство σ-алгебр $\mathscr{B}_n := \{A^n \times \Omega_n^\infty \mid A^n \in \mathscr{A}^n\}$. Ясно, что $\bigvee_{n=1}^\infty \mathscr{B}_n = \mathscr{A}$ и что если с. в. f на Ω измерима относительно $\mathscr{B}_n$, то она зависит только от первых n координат. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ — вектор с бесконечным числом координат, где $1 \leqslant p_k \leqslant \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и положим $\mathbf{p}^n := (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\mathbf{p}_n := (p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots)$; таким образом $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^n, \mathbf{p}_n)$.

Определение 1. Через $\mathscr{M}_p$ обозначим пространство мартингалов $f = (f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ на $(\Omega, \mathscr{A})$ таких, что

$$\|f\|_{\mathbf{p}} := \sup_n \|f_n\|_{\mathbf{p}^n} < \infty, \tag{1}$$

где $\|f_n\|_{\mathbf{p}^n} = \|\ldots\|\|f_n(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n)\|_{p_n, \omega_n}\|_{p_{n-1}, \omega_{n-1}} \ldots\|_{p_1, \omega_1}$ — обычная смешанная норма с. в. f_n (см. [1]).

Без труда проверяется, что $\mathscr{M}_p$ — банахово пространство. Рассмотрим подпространство $L_p \subset \mathscr{M}_p$, состоящее из равномерно интегрируемых мартингалов. Если $f = (f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P}) \in L_p$, то f удобно отождествлять с $f_\infty = \lim_{n\to\infty} f_n$, положив при этом $\|f_\infty\|_p := \|f\|_p$. Банаховы идеальные пространства L_p подробно изучены авторами в статье [10]. Многие свойства пространств L_p аналогичны свойствам обычных прост-

ранств L_p, где p — число. Эти свойства мы будем использовать без дополнительных оговорок.

Предложение 1. *Пусть* $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P}) \in \mathscr{M}_p$. *Тогда существуют неотрицательные мартингалы* $(g_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ *и* $(h_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$, *принадлежащие* $\mathscr{M}_p$ *и такие, что* $f_n = g_n - h_n$.

Доказательство. Так как из (1) следует, что $\sup\limits_n \| f_n \|_1 < \infty$, то можно применить разложение Крикеберга (см. [5, с. 64]). Именно, полагаем $g_n = \lim\limits_{k\to\infty} \uparrow \mathbf{E}\,[f_k^+ \mid \mathscr{B}_n]$. Из [3, теор. 1] получаем:

$$\| g_n \|_{\mathbf{p}} = \lim_{k\to\infty} \| \mathbf{E}\,[f_k^+ \mid \mathscr{B}_n] \|_{\mathbf{p}} \leqslant \sup_k \| f_k^+ \|_{\mathbf{p}} \leqslant \sup_k \| f_k \|_{\mathbf{p}},$$

т. е. $(g_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P}) \in \mathscr{M}_p$.

Предложение 2. 1) *Если* $\varliminf\limits_{k\to\infty} p_k > 1$, *то всякий мартингал* $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ *из* $\mathscr{M}_p$ *равномерно интегрируем.*

2) *Если* $\varliminf\limits_{k\to\infty} p_k = 1$, *то в* $\mathscr{M}_p$ *существуют неравномерно интегрируемые мартингалы.*

Доказательство. 1) Рассуждения достаточно провести для неотрицательного $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$. Из условия предложения следует существование номера m и числа $\varepsilon > 0$ таких, что $p_k \geqslant 1 + \varepsilon$ при $k > m$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{P}^m$-п. н. по $\omega^m \in \Omega^m$ случайная последовательность $(g_n^{\omega^m}, \mathscr{F}_n, \mathbf{P}_m^\infty)_{n=m+1}^\infty$, где $g_n^{\omega^m} = f_n(\omega^m, \cdot)$ и $\mathscr{F}_n = \{A_m^n \times \Omega_n^\infty \mid A_m^n \in \mathscr{A}_m^n\}$, есть мартингал. Имеем:

$$\| \sup_{n>m} \| g_n^{\omega^m} \|_{\mathbf{p}_m} \|_{\mathbf{p}^m, \omega^m} = \| \lim_{n\to\infty} \uparrow \| f_n(\omega^m, \omega_m) \|_{\mathbf{p}_m, \omega_m} \|_{\mathbf{p}^m, \omega^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \| \| f_n(\omega^m, \omega_m) \|_{\mathbf{p}_m, \omega_m} \|_{\mathbf{p}^m, \omega^m} = \sup_n \| f_n \|_{\mathbf{p}} < \infty.$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{n>m} \| g_n^{\omega^m} \|_{\mathbf{p}_m}$ $\mathbf{P}^m$-п. н. по $\omega^m \in \Omega^m$ конечен, а так как все координаты вектора $\mathbf{p}_m$ больше $1 + \varepsilon$, то мартингал $(g_n^{\omega^m})$ равномерно интегрируем. Поэтому, обозначив $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, получим $\mathbf{P}^m$-п. н. по $\omega^m \in \Omega^m$:

$$\int\limits_{\Omega_m^\infty} f_n(\omega^m, \omega_m)\, d\mathbf{P}_m^\infty(\omega_m) = \int\limits_{\Omega_m^\infty} f(\omega^m, \omega_m)\, d\mathbf{P}_m^\infty(\omega_m).$$

Интегрируя это равенство по Ω^m имеем: $\mathbf{E}\,[f_n] = \mathbf{E}\,[f]$. Отсюда следует (см. [6, с. 205, теор. 5]), что $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ — равномерно интегрируемый мартингал.

2) Предположим для простоты, что $(\Omega_k, \mathscr{A}_k, \mathbf{Q}_k)$ — непрерывные вероятностные пространства. Не нарушая общности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^\infty (1 - 1/p_k) < \infty$. Пусть $A_k \in \mathscr{A}$ таковы, что $\mathbf{Q}_k(A_k) = 1/2$. Обозначим $B_n := \left(\prod\limits_{k=1}^n A_k\right) \times \Omega_n^\infty$, $f_n := 2^n I_{B_n}$. Очевидно, что $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ — неотрицательный мартингал. Имеем:

$$\sup_n \| f_n \|_{\mathbf{p}} = \prod_{k=1}^\infty 2^{1-1/p_k} = \exp\left(\ln 2 \sum_{k=1}^\infty (1 - 1/p_k)\right) < \infty.$$

С другой стороны, $\mathbf{P}(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $f_n \to 0$ п. н. Поэтому мартингал $(f_n, \mathscr{B}_n, \mathbf{P})$ неравномерно интегрируем.

Следствие. *Если* $\varliminf\limits_{k\to\infty} p_k > 1$, *то* $L_p = \mathscr{M}_p$. *Если же* $\varliminf\limits_{k\to\infty} p_k = 1$, *то* L_p *изометрически вкладывается в* $\mathscr{M}_p$.

2. Применение пространств $\mathscr{M}_p$ к исследованию гармонических функций. Пусть теперь $\Omega_k = T_k = T$ — единичная окружность, рассматриваемая как топологическая группа, $\mathscr{A}_k$ — σ-алгебра борелевских подмножеств на T_k, $\mathbf{Q}_k$ — мера Хаара на $(T_k, \mathscr{A}_k)$, $T^n := \Omega^n$, $T^\infty := \Omega$. В данном случае все $(\Omega_k, \mathscr{A}_k)$ являются стандартными

борелевскими пространствами и из [7, гл. V] следует, что $\mathscr{M}_p$ естественно отождествляется с пространством знакопеременных мер на $(T^\infty, \mathscr{A})$, $(\mathscr{B}_n)$ — локально абсолютно непрерывных относительно меры Хаара $\nu := \mathbf{P}$ (см. [6, с. 511]) и таких, что порождаемые ими мартингалы удовлетворяют (1).

Рассмотрим меры $\nu_n := \varepsilon^n \otimes \mathbf{P}_n$ (ε^n — мера Дирака в нейтральном элементе группы T^n). Тогда $\int f d\mathbf{P} = f * \nu$, $\int f d\mathbf{P}_n = f * \nu_n$ ($*$ — операция свертки). Обозначим также $T_+^\infty := T^\infty \times]0, \infty[$, а $\mathscr{L}_+$ и $\mathscr{L}$ — соответственно множества цилиндрических бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями на T_+^∞ и T^∞.

Определение 2. Будем говорить, что локально интегрируемая функция F гармонична (в обобщенном смысле) на T_+^∞, если для любой $\varphi \in \mathscr{L}_+$ $\int\limits_{T_+^\infty} F\Delta\varphi \, d\nu \, dt = 0$, где $\Delta\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}$, $a_k > 0$, $x_k \in T_k$ $(k \geqslant 1)$, $a_0 = 1$, $x_0 = t \in]0, \infty[$.

Обозначим через $(P_t)_{t>0}$ винеровскую полугруппу на T^∞, порожденную оператором $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ (см. [8]), и через $(Q_t)_{t>0}$ — соответствующую полугруппу Коши (см. [9]).

Предложение 3. *Пусть* $f \in L_{\mathbf{p}}$ $(1 \leqslant p_k \leqslant \infty,\ k = 1, 2, \ldots)$ *и* $F(x, t) = Q_t f(x)$. *Тогда*:

1) *функция* F *гармонична на* T_+^∞ (*в смысле определения* 2);

2) $\|f\|_{\mathbf{p}} = \sup\limits_{t>0} \|Q_t f\|_{\mathbf{p}}$;

3) *если* $\sup\limits_k p_k < \infty$, *то* $\|Q_t f - f\|_{\mathbf{p}} \to 0$ *при* $t \to 0$;

4) *если* $\inf\limits_k p_k > 1$, *то* $Q_t f \to f$ ν-*п. в. при* $t \to 0$.

Доказательство. 1) Функцию F можно представить как слабый предел функций $F_n = Q_t f_n$, $f_n \in \mathscr{L}$. Легко видеть, что при любом n функция F_n гармонична. После предельного перехода получаем гармоничность F.

2) Неравенство $\sup\limits_{t>0} \|Q_t f\|_{\mathbf{p}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{p}}$ следует из неравенства Юнга, которое выполняется в пространстве $\mathscr{M}_{\mathbf{p}}$. Докажем обратное неравенство. Используя известный конечномерный результат (см. [4]), получаем, что $(Q_t f) * \nu_n = Q_t(f * \nu_n) \to f \overline{*} \nu_n$ ν-п. в. при $t \to 0$. Применяя неравенство Фату в $L_{\mathbf{p}}$, имеем:

$$\|f \overline{*} \nu_n\|_{\mathbf{p}} \leqslant \sup_{t>0} \|(Q_t f) \overline{*} \nu_n\|_{\mathbf{p}} \leqslant \sup_{t>0} \|Q_t f\|_{\mathbf{p}}.$$

Отсюда $\|f\|_{\mathbf{p}} \leqslant \sup\limits_{t>0} \|Q_t f\|_{\mathbf{p}}$.

3) Данное свойство стандартным образом вытекает из плотности $\mathscr{L}$ в $L_{\mathbf{p}}$ (которая имеет место, так как $\sup\limits_k p_k < \infty$).

4) Выберем число r так, что $1 < r < \inf\limits_k p_k$. Очевидно, $f \in L_r$. Определим на L_r следующие функции:

$$Kg = \overline{\lim_{t\to 0}}\, Q_t g - \underline{\lim_{t\to 0}}\, Q_t g, \quad Mg = \sup_{t>0} |Q_t g|.$$

Относительно функции Mg известно следующее неравенство (см. [9, с. 167]):

$$\|Mg\|_r \leqslant c_r \|g\|_r. \tag{2}$$

Поскольку $Kg \leqslant 2Mg$, то, применяя несложные выкладки и неравенство (2), получаем при любом $\varepsilon > 0$:

$$\nu(\{Kg > \varepsilon\}) \leqslant \nu(\{2Mg > \varepsilon\}) \leqslant \frac{2^r}{\varepsilon^r} \|Mg\|_r^r \leqslant \frac{2^r c_r^r}{\varepsilon^r} \|g\|_r^r.$$

Так как $\mathscr{L}$ плотно в L_r, то можно записать $f = h + g$, где $h \in \mathscr{L}$, а $\|g\|_r < \delta$. Очевидно, что $Kh = 0$. Поэтому $Kf \leqslant Kh + Kg = Kg$ и $\nu(\{Kf > \varepsilon\}) \leqslant c(\varepsilon, r) \|g\|_r^r \leqslant c(\varepsilon, r)\, \delta^r$. В силу того, что δ можно выбрать сколь угодно малым, получаем $Kf = 0$

ν-п. в., т. е. $\lim_{t\to 0} Q_t f$ существует ν-п. в. И, наконец, из пункта 3) данного предложения вытекает, что этот предел ν-п. в. совпадает с f.

Предложение 4. *Пусть $F(x, t)$ — гармоническая (в смысле определения 2) функция на T^∞_+ ($x \in T^\infty$, $t \in]0, \infty[$), удовлетворяющая условию $\operatorname{ess\,sup}_{t>0} \| F(\cdot, t) \|_{\mathbf{p}} = c < \infty$. Тогда на T^∞ существует такая мера μ, что при всех $t > 0$ меры $Q_t\mu$ абсолютно непрерывны относительно ν и $F(x, t) = Q_t\mu(x)$ $d\nu dt$-п. в.*

Если при этом $p_k > 1$ ($k = 1, 2, \ldots$), то $\mu \in \mathscr{M}_{\mathbf{p}}$.

Доказательство. Для простоты приведем доказательство при $p_k > 1$ ($k = 1, 2, \ldots$). Обозначим $F_t(x) := F(x, t)$ и рассмотрим функцию $F^n_t = F_t * \nu_n$, которая зависит от $n + 1$ переменных. Функция $F^n_t(x) = F^n(x, t)$ гармонична в смысле определения 2 и по лемме Вейля имеет непрерывную регуляризацию $\widetilde{F}^n_t(x) = \widetilde{F}(x, t)$. Имеем:

$$\sup_{t>0} \| \widetilde{F}^n_t \|_{\mathbf{p}} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \| F^n_t \|_{\mathbf{p}} \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \| F_t \|_{\mathbf{p}} = c < \infty.$$

Учитывая, что $\inf_{1\leqslant k\leqslant n} p_k > 1$, и применяя известный конечномерный результат (см. [4]), получаем существование такой функции f_n на T^n, что при всех $t > 0$ $\widetilde{F}^n_t = Q_t f_n$ ν-п. в., причем $\| f_n \|_{\mathbf{p}} = \sup_{t>0} \| Q_t f_n \|_{\mathbf{p}} \leqslant c$. Таким образом, мы получили мартингал $(f_n, \mathscr{B}_n, \nu) \in \mathscr{M}_{\mathbf{p}}$. Согласно сказанному в начале п. 2, существует мера μ на $(T^\infty, \mathscr{A})$ такая, что $d\mu|_{\mathscr{B}_n} = f_n\, d\nu$. Теперь нетрудно проверить, что $Q_t\mu(x) = F(x, t)$ $d\nu dt$-п. в. То, что $Q_t\mu \ll \nu$ для всех $t > 0$, следует из полугруппового свойства.

Заметим, что результаты, содержащиеся в предложениях 2 и 3, остаются верными, если группу T^∞ заменить более общей группой $R^n \times T^\infty$, $n \geqslant 0$. Некоторое затруднение, возникающее при доказательстве пункта 4) предложения 3, устраняется следующей леммой.

Лемма. *Пусть (P_t) и (Q_t) — соответственно винеровская полугруппа и полугруппа Коши на $R^n \times T^\infty$, а полугруппы $(\widetilde{P}_t)$ и $(\widetilde{Q}_t)$ получаются из них заменой коэффициентов a_k на $\tilde{a}_k = 2a_k$. Если функция f лежит в $L_p(R^n \times T^\infty)$ и равна нулю в области $\mathscr{U} \subset R^n \times T^\infty$, то для всякого компакта $\mathscr{K} \subset \mathscr{U}$ существует такое $\delta > 0$, что для п.в. $x \in \mathscr{K}$ выполняется:*

$$Q_t f(x) \leqslant c \frac{t}{\delta} \widetilde{Q}_\delta f(x), \quad t > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.
2. *Бендиков А. Д., Павлов И. В.* Вероятностные методы в исследовании свойств интеграла Пуассона в пространстве BMO (T^∞) и в пространствах $\mathscr{V}_p$ (T^∞) со смешанной нормой. — В сб.: «XIX школа-коллоквиум по теор. вер. и матем стат. Тезисы докладов», Тбилиси, 1985, с. 7.
3. *Павлов И. В., Бендиков А. Д.* О некоторых операторах в пространстве мартингалов со смешанной нормой. — В сб.: «4-я международная Вильнюсская конф. по теор. вер. и матем. стат. Тезисы докладов», Вильнюс, 1985, т. III, с. 9—11.
4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974, 336 с.
5. *Neveu J.* Discrete-parameter martingales. North-Holland Publ. Comp., 1975, 236 p.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
7. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. Academic Press (New-York — London), 1967, 276 p.
8. *Berg Ch.* Potential theory on the infinite dimensional torus. — Invent. Math., 1976, 32, p. 49—100.
9. *Meyer P. A.* Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood — Paley. — Lect. Notes Math., 1976, 511, p. 125—183.
10. *Бендиков А. Д., Павлов И. В.* Пространства $L_{\mathbf{p}}$ со смешанной нормой на бесконечном декартовом произведении вероятностных пространств. — Analysis Mathematica, 1987, 13, с. 231—250.

Поступила в редакцию
14.V.1986