V. N. Kublanovskaya, The solution of spectral problems for polynomial matrices, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2003, Volume 296, 122–138

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

В статье продолжаются исследования по применению ранее предложенного метода ранговой факторизации (ΔW-метода, см., например, [1, 2]) к решению задач алгебры с полиномиальным и рациональным вхождением параметров. Расширяется область применения метода.

Для полиномиальных матриц полного ранга (в том числе для $A-\lambda I$, $A-\lambda B$) предлагаются методы решения следующих задач: вычисление делителей полиномиальной матрицы, спектры которых совпадают с нулями известных делителей ее характеристического полинома; вычисление общего делителя для нескольких регулярных полиномиальных матриц, собственные пары которого совпадают с соответствующими собственными парами рассматриваемых матриц; решение обратной задачи на собственные значения полиномиальной матрицы в некоторой постановке. Рассматривается применение предлагаемых методов к решению некоторых задач алгебры.

Статья состоит из трех параграфов.

В §1 предлагается алгоритм, позволяющий находить делители для полиномиальной матрицы полного ранга, спектры которых совпадают с нулями заданных делителей характеристического полинома матрицы. Рассматривается применение алгоритма к решению следующих задач: выделение регулярного блока матрицы, выделение нулевых собственных значений из спектра матрицы с вычислением делителя матрицы, не имеющего нулевых собственных значений. Предлагаются алгоритмы вычисления присоединенной и приведенной присоединенной матриц для регулярной полиномиальной матрицы.

В §2 рассматривается алгоритм вычисления общего делителя для двух (и более) регулярных матриц, собственные пары которого совпадают с общими собственными парами рассматриваемых матриц. В частности, рассматривается алгоритм выделения делителя из пучка $A-\lambda B$, собственные пары которого совпадают с одинаковыми собственными парами матриц A и B. Предлагается алгоритм вычисления несократимой факторизации рациональной матрицы.

§3 посвящен решению обратной задачи на собственные значения регулярной матрицы $F(\lambda)$ (в том числе $F(\lambda) = A - \lambda I$ и $F(\lambda) = A - \lambda B$) в следующей постановке. В спектре $F(\lambda)$ заменить несколько (все) известные собственные значения на заданные числа, сохранив при этом неизменными некоторые векторные спектральные характеристики. Рассматривается решение задачи для случаев одного и нескольких заменяемых собственных значений.

В основе предлагаемых алгоритмов лежит метод ранговой факторизации (ΔW-1 метод). Будут использованы следующие известные (см. [1, 2]) утверждения.

1. Любая полиномиальная $m \times n$ матрица $\Phi(\lambda)$ ранга m может быть представлена в виде так называемого ΔW-1 разложения:

$$\Phi(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), 0].$$

Здесь 0 есть нулевая $m \times (n-m)$ матрица, $W(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n; $\Delta(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица порядка m.

2. Любая полиномиальная $m \times n$ матрица $\Phi(\lambda)$ ранга m может быть представлена в виде так называемого $\nabla V - 1$ разложения:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda).$$

Здесь $\nabla(\lambda)$ – регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром $\Phi(\lambda)$; $V(\lambda)$ – полиномиальная матрица полного строчного ранга, составленная из m первых строк унимодулярной матрицы $W^{-1}(\lambda)$, так что конечный спектр $V(\lambda)$ есть пустое множество. Правые нуль пространства из полиномиальных решений матриц $\Phi(\lambda)$ и $V(\lambda)$ совпадают.

Свойства ΔW-1 и $\nabla V - 1$ разложений, алгоритмы их реализации и применение к решению некоторых задач алгебры с полиномиальным и рациональным вхождением параметров см., например, [1, 2].

Ниже будут использованы следующие обозначения.

$F_\rho^{m\times n}$ – множество полиномиальных $m \times n$ матриц ранга ρ;

$\sigma_r[F]$ – конечный спектр матрицы $F(\lambda)$, т.е. множество нулей общего наибольшего делителя (ОНД) всевозможных миноров порядка ρ матрицы $F(\lambda)$;

$f[F] = f(\lambda)$ – характеристический полином $F(\lambda)$: $\{\lambda | f(\lambda) = 0\} = \sigma_r[F]$;

$\varepsilon[F] = \varepsilon(\lambda)$ – минимальный полином матрицы $F(\lambda)$; $\varepsilon[F] = \frac{f[F]}{f_1[F]}$, где $f_1[F]$ есть ОНД всевозможных миноров порядка $\rho-1$ матрицы $F(\lambda)$;

$N_c[F]$ – правое нуль-пространство из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda)$;

(λ_*, x_*) и (λ_*, y_*) – правая и левая собственные пары матрицы $F(\lambda)$: $F(\lambda_*)x_* = 0$, $F^T(\lambda_*)y_* = 0$.

§1. Вычисление делителей матричного полинома с заданными спектрами

1.1. Постановка задачи. Пусть $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{s} C_k \lambda^k$ есть $m \times n$ матричный полином (полиномиальная матрица) полного ранга, степени $s \geqslant 1$. В частности, $F(\lambda) = A - \lambda I$, $F(\lambda) = A - \lambda B$. Для определенности полагаем $F(\lambda) \in F_m^{m \times n}$, $m \leqslant n$. Все приведенные ниже результаты справедливы для регулярной матрицы $F(\lambda)$ $(m = n)$ и для матрицы $F^T(\lambda)$ при $m \leqslant n$. Пусть $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ суть делители характеристического полинома $f[F]$.

Требуется найти разложение

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) F_2(\lambda), \tag{1.1}$$

где

$$\sigma_r[F_1] = \{\lambda | g_1(\lambda) = 0\}, \quad \sigma_r[F_2] = \{\lambda | g_2(\lambda) = 0\}. \tag{1.2}$$

1.2. Алгоритм вычисления. Алгоритм вычисления разложения (1.1), (1.2) рассмотрим в более общей постановке. Будем предполагать, что известен полином $h(\lambda)$:

$$\{\lambda | h(\lambda) = 0\} \supseteq \{\lambda | g_1(\lambda) = 0\}; \{\lambda | h(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda | g_2(\lambda) = 0\} = \varnothing. \tag{1.3}$$

Алгоритм вычисления разложения (1.1), (1.2) требует выполнения следующих операций.

(1) Сформировать полиномиальную $m \times (m+n)$ матрицу

$$\Phi(\lambda) = [h(\lambda) I_m, F(\lambda)],$$

где I_m – единичная матрица порядка m.

(2) Найти ∇V-разложение матрицы $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda), \quad V(\lambda) = [V_1(\lambda), V_2(\lambda)], \tag{1.4}$$

где $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$ суть блоки матрицы $V(\lambda)$, размеры которых совпадают с размерами блоков матрицы $\Phi(\lambda)$.

В качестве искомых матриц берем $F_1(\lambda) = \nabla(\lambda)$, $F_2(\lambda) = V_2(\lambda)$. Докажем, что так выбранные матрицы удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.2).

Действительно, из (1.4) имеем

$$F(\lambda) = \nabla(\lambda)V_2(\lambda), \tag{1.5}$$

где по свойствам ∇V-разложения $\nabla(\lambda)$ есть регулярная матрица, спектр которой совпадает с конечным спектром матрицы $\Phi(\lambda)$. При этом из определения конечного спектра полиномиальной матрицы с учетом вида матрицы $\Phi(\lambda)$ имеем:

$$\sigma_2[\nabla] = \sigma[\Phi] = \{\lambda | g_1(\lambda) = 0\}.$$

Далее, с учетом, что все матрицы, входящие в (1.5), имеют один и тот же ранг, $\nabla(\lambda)$ – регулярная матрица, заключаем, что $\sigma_r[V_2]$ дополняет $\sigma_r[\nabla]$ до $\sigma_r[F]$, так что $\sigma_r[V_2] = \{\lambda | g_2(\lambda) = 0\}$. Справедливость этого утверждения устанавливается применением формулы Бине–Коши[3] к вычислению миноров $F\begin{pmatrix} 1 \ldots m \\ i_1 \ldots i_m \end{pmatrix}$ матрицы $F(\lambda)$, представленной в виде (1.5). Справедливость разложения (1.1), (1.2) установлена.

Обозначим (λ_*, x_*), $(\lambda_*, x_*^{(i)})$ и (λ_*, y_*), $(\lambda_*, y_*^{(i)})$ правые и левые собственные пары матриц $F(\lambda)$, $F_i(\lambda)$, $i = 1.2$.

Следствие 1.1. *Если полином $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ не имеют общих нулей, то в условиях алгоритма имеют место следующие равенства*

$$\begin{aligned} &x_*^{(2)} = x_*, \quad y_*^{(2)} = F^T(\lambda_*)y_*, \quad \text{если} \quad \lambda_* \in \{\sigma_r[F] \cap \sigma_r[F_2]\}; \\ &y_*^{(1)} = y_*, \quad x_*^{(1)} = F_2(\lambda_*)x_*, \quad \text{если} \quad \lambda_* \in \{\sigma_r[F] \cap \sigma_r[F_1]\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.3. Применения алгоритма.

1.3.1. Исчерпывание из спектра полиномиальной матрицы нескольких собственных значений. Пусть $F(\lambda) \in F_m^{m\times n}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_r$, $r \geqslant 1$, суть известные собственные значения, которые подлежат исчерпыванию из $\sigma_r[F]$. Задача решается алгоритмом п. 1.2. В качестве $h(\lambda)$ берется полином $h(\lambda) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)$. В результате будет получено разложение (1.1), (1.2), где $\sigma_r[F_1] = \{\lambda | h(\lambda) = 0\}$, $\sigma_r[F_2]$ состоит из собственных значений матрицы $F(\lambda)$ за исключением λ_i, $i = 1, \ldots r$.

Из следствия 1.1 при условии, что спектры матриц $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ не пересекаются, следует, что правые собственные пары $(\lambda_*, x_*^{(2)})$ матрицы $F_2(\lambda)$ совпадают с соответствующими собственными парами (λ_*, x_*) матрицы $F(\lambda)$; левые собственные пары (λ_*, y_*) матрицы $F(\lambda)$ связаны с левыми собственными парами $(\lambda_*, y_*^{(2)})$ матрицы $F_2(\lambda)$ соотношением $y_*^{(2)} = F_1^T(\lambda_*) y_*$, так что $y_* = F_1^{-T}(\lambda_*)\ y_*^{(2)}$.

1.3.2. Выделение регулярного ядра. Пусть $F(\lambda) \in F_n^{m \times n}$, $m > n$. Задача состоит в вычислении регулярной матрицы $\nabla(\lambda)$, спектр которой совпадает с конечным спектром $F(\lambda)$. Для решения применяется алгоритм п. 1.2, где в качестве $h(\lambda)$ берется характеристический полином $f[F]$ матрицы $F(\lambda)$, если последний известен. В противном случае в качестве $h(\lambda)$ берем любой минор порядка n матрицы $F(\lambda)$.

В результате применения алгоритма п.1.2, т.е. ∇V-разложения матрицы $\Phi(\lambda) = [h(\lambda) I_n, F^\tau(\lambda)]$ будет получено разложение (1.1), (1.2), где $\nabla(\lambda)$ есть искомая матрица. Действительно, спектр матрицы $\nabla(\lambda)$ совпадает со спектром $\Phi(\lambda)$, а следовательно, и со спектром $F(\lambda)$, так как при указанном выше выборе $h(\lambda)$ нули общего наибольшего делителя всевозможных миноров порядка n матрицы Φ совпадают со спектром $F(\lambda)$.

1.3.3. Выделение из спектра $F(\lambda)$ нулевых собственных значений. Для решения задачи в качестве $h(\lambda)$ в алгоритме п. 1.2 следует взять λ^q, где q – кратность нуля характеристического полинома $f(F)$. Если q неизвестно, то для исчерпывания нулевого собственного значения из $\sigma_r[F]$ можно применить любой из следующих двух способов.

В первом способе $h(\lambda) = \lambda^t$, где в качестве числа t можно взять максимально возможную кратность $\lambda = 0$, как корня характеристического полинома матрицы $F(\lambda)$ ($t = n_1 - 1$, где n_1 есть степень $f[F]$).

Второй способ состоит в выполнении q шагов, каждый из которых исчерпывает $h(\lambda) = \lambda$. Число q определяется в процессе исчерпывания. Для этого вычисляется последовательность полиномиальных матриц $\Phi_k(\lambda) = [\lambda I_n, V_2^{(k-1)}(\lambda)]$ и их ∇V-разложения: $\Phi_k(\lambda) = \nabla_k[V_1^{(k)}(\lambda), V_2^{(k)}(\lambda)]$, $k = 1, \dots q$, $V_2^{(0)}(\lambda) = F^T(\lambda)$. Вычисления заканчиваются на том $k = q$, когда $\det \nabla_q(0) \neq 0$. В результате будет построена искомая матрица $V_2^{(q-1)}(\lambda)$, где $\sigma_r[V_2^{(q-1)}]$ совпадает с $\sigma_r[F]$ за исключением нулевого собственного значения ($\lambda = 0 \notin \sigma_r[V_2^{(q-1)}]$). Справедливость следует из свойств алгоритма п. 1.2.

Замечание. Второй способ может быть применен для определения кратности любого собственного значения матрицы $F(\lambda)$.

1.3.4. Вычисление присоединенной и приведенной присоединенной матриц. Задача состоит в вычислении матриц $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$, удовлетворяющих равенствам:

$$F(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)F(\lambda) = f[F]I; \tag{1.7}$$

$$F(\lambda)C(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda) = \mathcal{E}[F]I. \tag{1.8}$$

Здесь $F(\lambda)$ есть регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица, $f[F]$ и $\mathcal{E}[F]$ соответственно характеристический и минимальный полиномы $F(\lambda)$; $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ суть присоединенная и приведенная присоединенная матрицы для $F(\lambda)$ (см., например, [3]).

Для вычисления $B(\lambda)$, в предположении, что $f[F]$ известен, следует выполнить операции.

(1) Сформировать $m \times 2m$ матрицу $\Phi(\lambda) := [f[F]I_m, F]$ и найти ее ∇V-разложение:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda), \quad V(\lambda) = [V_1(\lambda), V_2(\lambda)], \tag{1.9}$$

где $V_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, блоки матрицы $V(\lambda)$ каждый размеров $m \times m$.

(2) Найти обратную матрицу для унимодулярной матрицы[1] $V_2(\lambda)$.

(3) Искомую матрицу $B(\lambda)$ вычислить по формуле

$$B(\lambda) = V_2^{-1}(\lambda)V_1(\lambda). \tag{1.10}$$

Для обоснования алгоритма предварительно установим, что $V_2(\lambda)$ есть унимодулярная матрица. Из (1.9) следует равенство $F(\lambda) = \nabla(\lambda)V_2(\lambda)$, где по свойствам алгоритма п. 1.2, имеем

[1] Алгоритм обращения унимодулярных матриц см., например, [2].

$\sigma_r[\nabla] = \sigma_r[F]$, так что $\det V_2(\lambda) = \mathrm{const}$. Отсюда $V_2(\lambda)$ есть унимодулярная матрица. Из свойств ∇V-разложения матрицы $\Phi(\lambda)$ следует $N_c[\Phi] = N_c[V]$. Тогда, с учетом, что $\begin{bmatrix} -F(\lambda) \\ f(\lambda)I \end{bmatrix}$ есть базисная матрица для $N_c[\Phi]$, имеем

$$V_1(\lambda)F(\lambda) = V_2(\lambda)f(\lambda) \quad \text{или} \quad V_2^{-1}(\lambda)V_1(\lambda)F(\lambda) = f(\lambda)I.$$

Отсюда, с учетом, что $f(\lambda)$ есть скалярный полином, следует справедливость (1.7).

Вычисление матрицы $C(\lambda)$, удовлетворяющей (1.8), в предположении, что минимальный полином $\mathcal{E}[F]$ известен, реализуется аналогично вычислению матрицы $B(\lambda)$ и состоит в выполнении операций (1)–(3) с заменой $f[F]$ на $\mathcal{E}[F]$.

Замечания. 1. Вычисление характеристического полинома $f[F]$ для регулярной матрицы $F(\lambda)$ можно реализовать методом следов Д. К. Фаддеева (см., например, [3]).

2. Вычисление минимального полинома $\mathcal{E}[F]$ можно реализовать следующим способом.

(1) Вычислить полином $f_1[F] \equiv f_1(\lambda)$, т.е. ОНД всех элементов $b_{ij}(\lambda)$ матрицы $B(\lambda) = \{b_{ij}(\lambda)\}$, $i, j = 1, \ldots, m$.

(2) Найти $\mathcal{E}[F]$ по формуле: $\mathcal{E}[F] = \frac{f[F]}{f_1[F]}$.

Алгоритм вычисления ОНД скалярных полиномов и деления полиномов, основанный на использовании ΔW-1 метода, см. в [2].

§2. Вычисление общего наибольшего делителя (ОНД) матричных полиномов

Постановка задачи. Пусть для заданной последовательности матричных полиномов (полиномиальных матриц) $F_i(\lambda) \in F_m^{m\times m}$, $i = 1, \ldots, p$, следует найти матрицу $C(\lambda) \in F_m^{m\times m}$, являющуюся левым ОНД матричных полиномов $\{F_i(\lambda)\}$, так что выполняются соотношения

$$F_i(\lambda) = P_i(\lambda)C(\lambda), \quad i = 1, \ldots, p,$$

где $C(\lambda)$ является регулярной матрицей, а последовательность полиномиальных матриц $\{P_r(\lambda)\}$ не имеет общего нетривиального левого делителя.

Алгоритм решения задачи состоит в выполнении следующих операций.

(1) Формируется полиномиальная $m \times mp$ матрица $\Phi(\lambda) = [F_1^T(\lambda), \ldots, F_p^T(\lambda)]$.

(2) Вычисляется ∇V-разложение $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda) V(\lambda), \tag{2.1}$$

где $\nabla(\lambda)$ – регулярная $m \times m$ полиномиальная матрица, $V(\lambda) := [V_1(\lambda), \ldots, V_p(\lambda)]$ – полиномиальная $m \times mp$ матрица с блоками $V_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, p$ размеров $m \times m$; так что имеют место равенства

$$F_i(\lambda) = V_i^T(\lambda) \nabla^T(\lambda), \quad i = 1, \ldots, p. \tag{2.2}$$

Докажем, что

$$C(\lambda) = \nabla^T(\lambda), \quad P_i(\lambda) = V_i^T(\lambda) \tag{2.3}$$

суть искомые матрицы.

Действительно, из (2.1) и (2.2) имеем равенство

$$\begin{bmatrix} F_1(\lambda) \\ \ldots \\ F_p(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T(\lambda) \\ \ldots \\ V_p^T(\lambda) \end{bmatrix} \nabla^T(\lambda) = V^T(\lambda) \nabla^T(\lambda).$$

Отсюда следует, что $C(\lambda) = \nabla^T(\lambda)$ есть общий левый делитель каждой из матриц $F_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, p$. Матрица $V^T(\lambda)$ не имеет конечного регулярного спектра, так как по свойствам ∇V-разложения матрица $V(\lambda)$ в (2.1) составлена из строк унимодулярной матрицы. Отсюда последовательность матриц $\{P_i(\lambda)\} = \{V_i^T(\lambda)\}$ не имеет общих левых нетривиальных делителей. Справедливость (2.3) установлена.

Замечания. 1. Рассмотренный алгоритм применим к вычислению левого ОНД последовательности $m_i \times n$, $m_i \geqslant n$, матриц $F_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, p$, имеющих один и тот же полный столбцовый ранг. В этом случае в равенстве (2.2) матрицы $V_i(\lambda)$ имеют те же размеры, что и $F_i^T(\lambda)$, $i = 1, \ldots, p$, так что $C(\lambda) = \nabla^T(\lambda)$ есть регулярная полиномиальная $n \times n$ матрица; каждая из матриц $P_i(\lambda)$ имеет размеры $m_i \times n$.

2. Алгоритм вычисления ОНД последовательности $\{F_i(\lambda)\}$ можно рассматривать как алгоритм вычисления регулярной матрицы $C(\lambda)$, любая правая собственная пара (λ_*, x_*) которой

является правой собственной парой каждой из матриц $F_i(\lambda)$ и, наоборот, любая правая собственная пара (λ_*, x_*), общая для матриц $F_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, p$, является правой собственной парой для $C(\lambda)$.

2.2. Применения алгоритма. Рассмотрим применения алгоритма п. 2.1 к решению некоторых задач алгебры.

2.2.1. Вычисление несократимой факторизации рациональной матрицы. Пусть $R(\lambda) = P(\lambda)Q^{-1}(\lambda)$ есть заданная рациональная $m \times m$ матрица. Требуется найти несократимую факторизацию

$$R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda) \tag{2.4}$$

и установить равенства $P(\lambda) = S(\lambda)C(\lambda)$, $Q(\lambda) = T(\lambda)C(\lambda)$. Здесь $T(\lambda)$ – регулярная полиномиальная матрица, уравнение $\begin{bmatrix} S(\lambda) \\ T(\lambda) \end{bmatrix} x = 0$ не имеет ненулевых решений.

Для решения задачи применим алгоритм п. 2.1, полагая $F_1(\lambda) = Q(\lambda)$, $F_2(\lambda) = P(\lambda)$. Результатом применения ∇V-разложения к матрице $\Phi(\lambda) = [Q^T(\lambda), P^T(\lambda)]$ будут равенства: $\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda)$, $V(\lambda) = [V_1(\lambda), V_2(\lambda)]$, так что $Q(\lambda) = V_1^T(\lambda)\nabla^T(\lambda)$, $P(\lambda) = V_2^T(\lambda)\nabla^T(\lambda)$. Отсюда находим $P(\lambda)Q^{-1}(\lambda) = V_2^T(\lambda)V_1^{-T}(\lambda)$. В качестве искомых берем матрицы: $C(\lambda) := \nabla^T(\lambda)$, $S(\lambda) := V_2^T(\lambda)$, $T(\lambda) := V_1^T(\lambda)$, так что $R(\lambda) = S(\lambda)T^{-1}(\lambda)$, $Q(\lambda) = T(\lambda)C(\lambda)$, $P(\lambda) = S(\lambda)C(\lambda)$.

Замечание. Описанный выше алгоритм может быть применен к рациональной $m \times n$ матрице $R(\lambda) = P(\lambda)Q^{-1}(\lambda)$, где $P(\lambda)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица полного столбцового ранга, $Q(\lambda)$ – регулярная полиномиальная $n \times n$ матрица.

2.2.2. Выделение из регулярного пучка $A - \lambda B$ делителя, собственные пары которого являются общими для матриц A и B. Для решения предлагаются два способа.

Первый способ состоит в последовательном применении алгоритма ∇V-разложения к матрицам $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$:

$$\Phi_1(\lambda) = [F_1^{(1)}(\lambda), F_2^{(1)}(\lambda)] = \nabla^{(1)}(\lambda)V^{(1)}(\lambda),$$

где $F_1^{(1)} := A - \lambda I$, $F_2^{(1)} := B - \lambda I$;

$$\Phi_2(\lambda) = [F_1^{(2)}(\lambda), F_2^{(2)}(\lambda)] = \nabla^{(2)}(\lambda)V^{(2)}(\lambda),$$

где $F_1^{(2)}(\lambda) = \nabla^{(1)}(\lambda)$, $F_2^{(2)}(\lambda) = A - \lambda B$. Докажем, что матрица $\nabla^{(2)}(\lambda)$ является искомой. Действительно, по свойствам алгоритма п. 2.1 собственные пары матрицы $\nabla^{(1)}(\lambda)$ являются общими для матриц $A - \lambda I$, $B - \lambda I$. Собственные пары матрицы $\nabla^{(2)}(\lambda)$ являются общими для $\nabla^{(1)}(\lambda)$ и пучка $A - \lambda B$. Из сказанного следует, что собственные пары $\nabla^{(2)}(\lambda)$ совпадают с общими собственными парами матриц $A - \lambda I$, $B - \lambda I$ и $A - \lambda B$.

Второй способ состоит в формировании матрицы $\Phi_3(\lambda) = [A - \lambda I, B - \lambda I, A - \lambda B]$ и применения к ней алгоритма ∇V-разложения:

$$\Phi_3(\lambda) = \nabla(\lambda) V^{(3)}(\lambda), V_3^{(3)} = [V_1(\lambda), V_2(\lambda), V_3(\lambda)],$$

где $\nabla(\lambda)$ является искомой матрицей, так как по свойствам алгоритма п. 2.1 (см. замечание 2) правые собственные пары матрицы $\nabla(\lambda)$ совпадают с общими правыми собственными парами трех матриц $A - \lambda B$, $A - \lambda I$, $B - \lambda I$.

Замечание. Спектр $\nabla(\lambda)$, т.е. спектр левого общего наибольшего делителя матриц $A - \lambda B$, $A - \lambda I$ и $B - \lambda I$, состоит из собственных значений, равных нулю и единице.

§3. Обратная задача на собственные значения полиномиальной матрицы

3.1. Постановка задачи. Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная регулярная $m \times m$ матрица степени $s \geqslant 1$. В частности, $F(\lambda) = A - \lambda I$, $F(\lambda) = A - \lambda B$. Обозначим (λ_i, x_i) собственную пару $F(\lambda)$.

Рассмотрим обратную задачу на собственные значения матрицы $F(\lambda)$ в следующей постановке. Пусть μ_{i*}, $i = 1, \ldots, r$, заданные числа. Требуется матрицу $F(\lambda)$ преобразовать в матрицу $F_1(\lambda)$, заменив в спектре $F(\lambda)$ известную группу собственных значений λ_{i*}, $i = 1, \ldots, r$, $r \geqslant 1$, на заданные числа μ_{i*}, $i = 1, \ldots, r$, при этом следует сохранить собственные векторы x_i, соответствующие собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_{i*}$. Ниже приводится алгоритм преобразования $F(\lambda)$ в $F_1(\lambda)$ и устанавливается связь между собственными парами матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$.

3.2. Алгоритм решения обратной задачи. Рассмотрим раздельно случаи $r = 1$ и $r > 1$.

Случай $r = 1$. Матрицу $F(\lambda)$ следует преобразовать в матрицу $F_1(\lambda)$: заменить в $\sigma_r[F]$ известное собственное значение $\lambda = \lambda_*$ на заданное $\lambda = \mu_*$, сохранив неизменными собственные пары (λ_i, x_i) для $\lambda_i \neq \lambda_*$. Будем различать две ситуации: $\lambda = \lambda_*$ есть простое собственное значение и $\lambda = \lambda_*$ есть t-кратное собственное значение матрицы $F(\lambda)$.

3.2.1. В ситуации, когда $\lambda = \lambda_*$ есть простое собственное значение $F(\lambda)$ и $\mu_* \neq \lambda_i$, алгоритм решения состоит в выполнении следующих шагов.

(1) Используя алгоритм вычисления делителей полиномиальной матрицы из п. 1.2, находятся правый $\nabla(\lambda)$ и левый $V_2(\lambda)$ делители $F(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \nabla(\lambda)V_2(\lambda). \tag{3.1}$$

Здесь $\nabla(\lambda)$ есть регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица, спектр которой состоит из одной точки $\lambda = \lambda_*$; $V_2(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times m$ матрица, спектр которой совпадает со спектром матрицы $F(\lambda)$, за исключением $\lambda = \lambda_*$ ($\lambda = \lambda_* \notin \sigma_r[V_2]$).

Для представления $F(\lambda)$ в виде (3.1) выполняются следующие операции:

(1.1) Формируется полиномиальная $m \times 2m$ матрица $\Phi(\lambda) = [(\lambda - \lambda_*)I_m, F(\lambda)]$.

(1.2) Вычисляется ∇V-разложение $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \nabla(\lambda)V(\lambda), \quad V(\lambda) = [V_1(\lambda), V_2(\lambda)].$$

(2) Из спектра матрицы $\nabla(\lambda)$ исчерпывается собственное значение $\lambda = \lambda_*$ с заменой его на $\lambda = \mu_*$. Для этого выполняются следующие операции.

(2.1) Вычисляется постоянная матрица $\nabla(\lambda_*)$ и ее ΔW-0-разложение[2]:

$$\nabla(\lambda_*)U = [*, 0], \tag{3.2}$$

где U – ортогональная матрица, звездочкой $*$ обозначена $m \times (m-1)$ постоянная матрица полного столбцового ранга, 0 – нулевой столбец.

(2.2) Вычисляется полиномиальная матрица $C(\lambda) = \Delta(\lambda)U$.

(2.3) Компоненты последнего столбца матрицы $C(\lambda)$ умножаются на рациональную дробь $q(\lambda) = \frac{\lambda - \mu_*}{\lambda - \lambda_*}$.

[2] Под $\Delta W-0$-разложением постоянной матрицы понимается ее нормализованное разложение (QR-разложение с перестановками, см., например, [2]).

Результатом операции (2) будет матрица

$$\nabla_1(\lambda) = \nabla(\lambda) U \operatorname{blockdiag}\{I_{m-1}, q(\lambda) e_m\}, \tag{3.3}$$

где e_m есть последний столбец единичной матрицы I_m.

(3) Вычисляется матрица

$$F_1(\lambda) = \nabla_1(\lambda) V_2(\lambda). \tag{3.4}$$

Докажем, что $F_1(\lambda)$ есть искомая матрица. Сначала установим, что $\nabla_1(\lambda)$ есть регулярная полиномиальная матрица, спектр которой состоит из одной точки $\lambda = \mu_*$.

Действительно, из свойств ΔW-0-разложения (3.2) следует, что (λ_*, u_*) есть собственная пара матрицы $\nabla(\lambda)$. (Здесь u_* – последний столбец ортогональной матрицы U.) Компоненты последнего столбца матрицы $C(\lambda)$ имеют своим общим делителем одночлен $(\lambda - \lambda_*)$. Отсюда с учетом (3.3) и свойств матрицы $\nabla(\lambda)$ следует, что $\nabla_1(\lambda)$ является регулярной полиномиальной матрицей, спектр которой состоит из одной точки $\lambda = \mu_*$, при этом (μ_*, u_*) есть собственная пара матрицы $\nabla_1(\lambda)$.

Далее, из свойств алгоритма п. 1.2 следует, что спектр матрицы $V_2(\lambda)$ совпадает со спектром матрицы $F(\lambda)$, за исключением точки $\lambda = \lambda_*$. Справедливость равенства (3.4) доказана.

Установим связь между собственными парами матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$. Имеют место следующие соотношения.

Собственные пары (λ_i, x_i) и $(\lambda_i, x_i^{(1)})$, $\lambda_i \neq \lambda_*$, матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ совпадают. Справедливость следует из равенств (3.1) и (3.4).

Собственному значению $\lambda = \lambda_*$ матрицы $\nabla(\lambda)$ и собственному значению $\lambda = \mu_*$ матрицы $\nabla_1(\lambda)$ соответствует один и тот же собственный вектор u_*: $\nabla(\lambda_*) u_* = 0$, $\nabla_1(\mu_*) u_* = 0$. Справедливость следует из равенства (3.3) с учетом приведенных выше свойств ΔW-0-разложения.

Собственные пары (λ_*, x_*) и $(\mu_*, x_*^{(1)})$ соответственно матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям:

$$F(\lambda_*) x_* = 0, \quad V_2(\lambda_*) x_* = u_*, \quad \det V_2(\lambda_*) \neq 0;$$
$$F_1(\mu_*) x_*^{(1)} = 0, \quad V_2(\mu_*) x_*^{(1)} = u_*, \quad \det V_2(\mu_*) \neq 0.$$

3.2.2. Рассмотрим обратную задачу для ситуации, когда $\lambda = \lambda_*$ есть t-кратное собственное значение матрицы $F(\lambda)$ с совпадающей геометрической и алгебраической кратностью, $(t > 1)$. Другими словами, t-кратному собственному значению $\lambda = \lambda_*$ соответствует t линейно независимых собственных векторов матрицы $F(\lambda)$. Задача состоит в исчерпывании точки $\lambda = \lambda_*$ из $\sigma_r[F]$ и замене ее а) на заданное число $\mu_* \neq \lambda_i$, имеющее ту же кратность t, что и λ_*; б) на заданные числа $\mu_{k*} \neq \lambda_i$, $k = m-t+1, \dots, m$.

Алгоритм решения обратной задачи аналогичен алгоритму п. 3.2.1 и состоит в выполнении следующих шагов.

(1) Используя из 1.2 алгоритм вычисления делителей полиномиальной матрицы, находится разложение

$$F(\lambda) = \nabla(\lambda) V_2(\lambda), \tag{3.5}$$

где $\nabla(\lambda)$ – регулярная матрица, спектр которой состоит из t-кратного собственного значения $\lambda = \lambda_*$, спектр $V_2(\lambda)$ совпадает со спектром $F(\lambda)$, за исключением точки $\lambda = \lambda_*$ $(\lambda = \lambda_* \notin \sigma_r[F])$. Здесь в отличие от алгоритма п. 3.2.1 в качестве матрицы $\Phi(\lambda)$ следует взять матрицу вида:

$$\Phi(\lambda) = [(\lambda - \lambda_*)^t I_m, F(\lambda)].$$

(2) Из спектра матрицы $\nabla(\lambda)$ исчерпывается собственное значение $\lambda = \lambda_*$ с заменой его на $\lambda = \mu_*$ в варианте а) или на t различных заданных чисел μ_{*k}, $k = m-t+1, \dots, m$, в варианте б).

Для этого выполняются следующие операции.

(2.1) Вычисляется матрица $\nabla(\lambda_*)$ и ее ΔW-0-разложение

$$\nabla(\lambda_*) U = [*, 0], \tag{3.6}$$

где U – ортогональная матрица, 0 – нулевая $m \times t$ матрица, звездочкой $*$ обозначена постоянная $m \times (m-t)$ матрица полного столбцового ранга.

(2.2) Вычисляется полиномиальная матрица

$$C(\lambda) = \nabla(\lambda) U.$$

(2.3) В варианте а) компоненты последних t столбцов матрицы $C(\lambda)$ умножаются каждый на рациональную дробь $q(\lambda) = \frac{\lambda - \mu_*}{\lambda - \lambda_*}$.

В варианте б) последние t столбцов матрицы $C(\lambda)$ с номерами $k = m-t+1,\dots,m$ умножаются соответственно на дроби $q_k = \frac{\lambda-\mu_{k*}}{\lambda-\lambda_*}$. Результатом операции (2) являются матрицы

$$\nabla_1(\lambda) = \nabla(\lambda)U\mathrm{blockdiag}\{I_{m-t}, q(\lambda)e_{m-t+1},\dots,q(\lambda)e_m\}; \qquad (3.7)$$

$$\nabla_1(\lambda) = \nabla(\lambda)U\mathrm{blockdiag}\{I_{m-t}, q_{m-t+1}(\lambda)e_{m-t+1},\dots,q_m(\lambda)e_m\}$$

соответствующие вариантам а) и б).

(3) Вычисляется матрица

$$F_1(\lambda) = \nabla_1(\lambda)V_2(\lambda). \qquad (3.8)$$

Установим, что матрица $F_1(\lambda)$ является искомой. Действительно, из свойств ΔW-0 разложения (3.6) следует, что (λ_*, u_{*k}), $k = m-t+1,\dots,m$, есть собственные пары матрицы $\nabla(\lambda)$ из равенства (3.5). Здесь u_{*k} обозначает столбец с номером k ортогональной матрицы U. Компоненты последних t столбцов матрицы $C(\lambda)$ имеют каждый своим общим делителем одночлен $(\lambda-\lambda_*)$, так что из (3.7) и свойств матрицы $\nabla(\lambda)$, входящей в (3.5), следует, что $\nabla_1(\lambda)$ в (3.8) является регулярной полиномиальной матрицей, спектр которой состоит из t-кратного собственного значения $\lambda = \mu_*$ в варианте а); из t различных собственных значений $\lambda = \mu_{*k}$, в варианте б). При этом имеется t линейно независимых векторов u_{*k}, $k = 1,\dots,t$, соответствующих в варианте а) t-кратному собственному значению $\lambda = \mu_*$; соответствующих в варианте б) собственным значениям $\lambda = \mu_{*k}$, $k = m-t+1,\dots,m$. Свойства спектра матрицы $V_2(\lambda)$ при переходе от (3.5) к (3.7) сохраняются. Этим завершается обоснование свойств матриц, входящих в (3.8).

Установим связь между собственными парами матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$. Имеют место следующие соотношения.

Собственные пары (λ_i, x_i) и $(\lambda_i, x_i^{(1)})$ для $\lambda_i \neq \lambda_*$ матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ совпадают. Справедливость следует из равенств (3.5), (3.8) и свойств входящих в них матриц.

В варианте а) t-кратному собственному значению $\lambda = \lambda_*$ матрицы $\nabla(\lambda)$ и t-кратному собственному значению $\lambda = \mu_*$ матрицы $\nabla_1(\lambda)$ отвечают соответственно собственные пары (λ_*, u_{k*}) и (μ_*, u_{k*}), $k = m-t+1,\dots,m$.

В варианте б) t-кратному собственному значению $\lambda = \lambda_*$ матрицы $\nabla(\lambda)$ и собственным значениям $\lambda = \mu_{k*}$ матрицы $\nabla_1(\lambda)$ отвечают собственные векторы u_{k*}, $k = m-t+1, \ldots, m$: $\nabla(\lambda_*)u_{k*} = 0$, $\nabla_1(\mu_{k*})u_{k*} = 0$.

В варианте а) собственные пары (λ_*, x_{k*}) и $(\mu_*, x_{k*}^{(1)})$ матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям: $F(\lambda_*)x_{k*} = 0$, $V_2(\lambda_*)x_{k*}^{(1)} = u_{k*}$, $\det V_2(\lambda_*) \neq 0$, $k = m-t+1, \ldots, m$.

В варианте б) собственные пары (λ_*, x_{k*}) и $(\mu_{k*}, x_{k*}^{(1)})$ матриц $F(\lambda)$ и $F_1(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered}
F(\lambda_*)x_{k*} = 0, \quad V_2(\lambda_*)x_{k*} = u_{k*}, \quad \det V_2(\lambda_*) \neq 0, \\
F_1(\mu_{k*})x_{k*}^{(1)} = 0, \quad V_2(\mu_{k*})x_{k*}^{(1)} = u_{k*}, \quad \det V_2(\mu_{k*}) \neq 0, \\
k = m-t+1, \ldots, m.
\end{gathered}$$

Случай $r > 1$. Матрицу $F(\lambda)$ следует преобразовать в матрицу $F_1(\lambda)$: заменить в $\sigma_r[F]$ известные собственные значения λ_{i*} кратности $t_i \geqslant 1$ на заданные числа μ_{i*} кратности t_i, $i = 1, \ldots, r$, сохранив неизменными собственные пары (λ_i, x_i) для $\lambda_i \neq \lambda_{i*}$.

Рассмотрим два алгоритма решения обратной задачи.

3.2.3. Первый алгоритм аналогичен алгоритмам из пп. 3.2.1 и 3.2.2 и требует выполнения следующих шагов.

(1) Используя алгоритм п. 1.2, вычисляются правый $\nabla(\lambda)$ и левый $V_2(\lambda)$ делители $F(\lambda)$, так что

$$F(\lambda) = \nabla(\lambda)V_2(\lambda).$$

Здесь $\sigma_r[\nabla]$ состоит из собственных значений $\lambda = \lambda_{i*}$ с соответствующими им кратностями t_i; $\sigma_r[V_2]$ состоит из собственных значений $\lambda = \lambda_i$, за исключением $\lambda = \lambda_{i*}$. Для этого в качестве матрицы $\Phi(\lambda)$ берется $\Phi(\lambda) = \Big[\prod\limits_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_{i*})^{t_i} I_m, F(\lambda)\Big]$.

(2) Используя алгоритм ΔW-0-разложения, из спектра матрицы $\nabla(\lambda)$ последовательно исчерпываются все собственные значения $\lambda = \lambda_{i*}$ с заменой их на числа μ_{i*}, $i = 1, \ldots, r$. Для этого, начиная с $i = 1$, для $i = 1, \ldots, r$ выполняются следующие операции.

(2i) Вычисляется постоянная матрица $\nabla^{(i-1)}(\lambda_{1*})$ и ее ΔW-0-разложение

$$\nabla^{(i-1)}(\lambda_{1*})U^{(i)} = [*, 0], \quad \nabla^{(0)} := \nabla(\lambda).$$

Здесь $U^{(i)}$ – ортогональная матрица, 0 – нулевая $m \times (m - t_i)$ матрица $*$ обозначает постоянную $m \times t_i$ матрицу полного столбцового ранга.

(2ii) Вычисляется матрица $C^{(i)}(\lambda) := \nabla^{(i-1)}(\lambda)U^{(i)}$.

(2iii) Последние t_i столбцы матрицы $C^{(i)}(\lambda)$ умножаются на рациональную дробь $q_i(\lambda) = \frac{\lambda-\mu_{i*}}{\lambda-\lambda_{i*}}$.

В результате выполнения операций (2i)–(2iii) будет вычислена матрица

$$\nabla^{(i)} = \nabla^{(i-1)}U^{(i)}\text{blockdiag}\{I_{m-t_i}, q_{m-t_i+1}(\lambda)e_{m-t_i+1}, \ldots, q_m(\lambda)e_m\}.$$

Результатом шага (2) является полиномиальная матрица

$$\nabla_1(\lambda) = \nabla^{(r)}(\lambda).$$

(3) Вычисляется искомая матрица

$$F_1(\lambda) = \nabla_1(\lambda)V_2(\lambda).$$

Обоснование алгоритма п. 3.2.3 проводится аналогично выше приведенному обоснованию алгоритмов пп. 3.2.1 и 3.2.2.

3.2.4. Второй алгоритм решения обратной задачи для случая $r > 1$ состоит в последовательном исчерпывании собственных значений $\lambda = \lambda_{i*}$ из спектра матрицы $F(\lambda)$ и замене их на заданные числа μ_{i*}. Алгоритм не требует предварительного вычисления чисел t_i, т.е. кратности собственного значения $\lambda = \lambda_{i*}$, в отличии от алгоритма п. 3.2.3 не сохраняет неизменными собственные векторы матрицы $F(\lambda)$ при преобразовании ее в искомую матрицу $F_1(\lambda)$. Алгоритм состоит из r однотипных шагов и основан на применении алгоритма $\Delta W{-}0$-разложения.

Для фиксированного $i = 1, \ldots, r$, начиная с $i = 1$, находится матрица $F^{(i)}(\lambda)$, $F^{(0)}(\lambda) = F(\lambda)$ выполнением следующих операций.

(1i) Вычисляется $F^{(i)}(\lambda_{i*})$ и ее $\Delta W{-}0$-разложение

$$F^{(i)}(\lambda_{i*})U^{(i)} = [*, 0],$$

где $U^{(i)}$ – ортогональная матрица, 0 – нулевая $m \times (m - t_i)$ матрица.

(1ii) Вычисляется матрица $C^{(i)}(\lambda) = F^{(i)}(\lambda)U^{(i)}$.

(1iii) Последние t_i столбцы матрицы $C^{(i)}(\lambda)$ умножаются последовательно на рациональные дроби $q_i(\lambda) = \frac{\lambda-\mu_{i*}}{\lambda-\lambda_{i*}}$.

Результатом выполнения операций (1i)–(1iii) будет полиномиальная матрица $F^{(i+1)}(\lambda)$, спектр которой отличается от спектра матрицы $F^{(i)}(\lambda)$ отсутствием собственного значения $\lambda = \lambda_{i*}$ кратности t_i, который заменяется собственным значением $\lambda = \mu_{i*}$ той же кратности. На шаге с номером r будет получена искомая матрица $F_1(\lambda) = F^{(r)}(\lambda)$. Справедливость следует из свойств $\Delta W{-}0$-разложения.

Литература

1. V. N. Kublanovskaya, *Rank division algorithms and their applications.* — J. Numer. Algebra Appl., No. 1, **2** (1992), 198–213.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 7–329.
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* — М., Наука (1988).

Kublanovskaya V. N. The solution of spectral problems for polynomial matrices.

For polynomial matrices of full rank, including matrices of the form $A-\lambda I$ and $A-\lambda B$, numerical methods for solving the following problems are suggested: find the divisors of a polynomial matrix whose spectra coincide with the roots of known divisors of its characteristic polynomial; compute the greatest common divisor of a sequence of polynomial matrices; solve the inverse eigenvalue problem for a polynomial matrix. The methods proposed are based on the ΔW and ΔV factorizations of polynomial matrices. Applications of these methods to the solution of certain algebraic problems are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 10 января 2003 г.