В. Р. Кияткин, Правила вывода с метапеременными и логические уравнения в предтабличной модальной логике PM1, *Сиб. матем. журн.*, 2000, том 41, номер 1, 88–97

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 510.6

ПРАВИЛА ВЫВОДА С МЕТАПЕРЕМЕННЫМИ И ЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЕДТАБЛИЧНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ PM1

В. Р. Кияткин

Аннотация: Проблема разрешимости логических уравнений для некоторой логики λ вызывает интерес по крайней мере по двум причинам. Во-первых, с ней тесно связана проблема выводимости в логике λ, во-вторых, она сводится к проблеме разрешимости логики λ по допустимости для правил вывода с параметрами. Распознаваемость разрешимости логических уравнений впервые была установлена В. В. Рыбаковым для модальной логики $S4$, интуиционистской логики Int, для модальных логик S и GL, аксиоматизирующих доказуемость и других. Распознаваемость разрешимости логических уравнений с метапеременными в табличных и предтабличных локально конечных модальных логиках $PM2$–$PM5$, расширяющих логику $S4$, установлена автором. Настоящая работа положительно решает проблему распознаваемости для предтабличной модальной логики $PM1$. Библиогр. 3.

Модальная пропозициональная формула $\mathscr{F}$ от $x_1,\dots,x_n$ считается истинной на топобулевой алгебре A (обозначение $A\models\mathscr{F}(x_1,\dots,x_n)$), если на ней истинно тождество $\forall x_1,\dots,\forall x_n(\mathscr{F}(x_1,\dots,x_n)=1)$. Множество формул $\lambda(A)=\{\mathscr{F}\mid A\models\mathscr{F}\}$ называется *логикой алгебры* A. Хорошо известно, что для любой модальной логики $\lambda\supseteq S4$ существует топобулева алгебра B такая, что $\lambda=\lambda(B)$. Эта алгебра порождает многообразие топобулевых алгебр $\mathrm{var}(B)$, соответствующее логике λ (обозначение $\mathrm{var}(\lambda)$). Логику λ называют *табличной*, если существует конечная алгебра A такая, что $\lambda=\lambda(A)$, и *нетабличной* в противном случае. Собственно пропозициональные переменные будем отличать от переменных x_i для формул, называя их метапеременными или параметрами p_j. Когда же это различие несущественно, то те и другие переменные будем обозначать через y_l. Правило с метапеременными

$$\frac{\mathscr{A}_1(x_1,\dots,x_k,p_1,\dots,p_m),\dots,\mathscr{A}_n(x_1,\dots,x_k,p_1,\dots,p_m)}{\mathscr{B}(x_1,\dots,x_k,p_1,\dots,p_m)} \tag{1}$$

(обозначение $\mathscr{A}_1(\bar x,\bar p),\dots,\mathscr{A}_n(\bar x,\bar p)/\mathscr{B}(\bar x,\bar p)$, где $\bar x=(x_1,\dots,x_k)$ и $\bar p=(p_1,\dots,p_m)$) называется *допустимым в логике* λ, если для любых формул $\mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_k$ из того, что $\mathscr{A}_i(\mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_k,p_1,\dots,p_m)\in\lambda$ для всех $1\leqslant i\leqslant n$ следует $\mathscr{B}(\mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_k,p_1,\dots,p_m)\in\lambda$. Правило (1) эквивалентно однопосылочному правилу вида $\mathscr{A}(\bar x,\bar p)/\mathscr{B}(\bar x,\bar p)$, поскольку $\alpha\in\lambda$ и $\beta\in\lambda\Leftrightarrow\alpha\wedge\beta\in\lambda$. *Логическим уравнением* называют любую формулу вида $\mathscr{A}(x_1,\dots,x_k,p_1,\dots,p_m)$ (обозначение $\mathscr{A}(\bar x,\bar p)$). Всякий набор формул $\mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_k$, удовлетворяющий условию $\mathscr{A}(\overline{\mathscr{C}},\bar p)\in\lambda$, где $\overline{\mathscr{C}}=(\mathscr{C}_1,\dots,\mathscr{C}_k)$, называется *решением* этого уравнения в логике λ. Если все переменные формулы $\mathscr{A}$ являются параметрами, то проблема разрешимости уравнения $\mathscr{A}$ в логике λ — это проблема выводимости данной формулы в λ.

Теорема 1 [1]. *Логическое уравнение $\mathscr{A}(\bar{x},\bar{p})$ разрешимо в логике λ тогда и только тогда, когда в ней недопустимо правило с метапеременными $\mathscr{A}(\bar{x},\bar{p})/\bot$.*

Таким образом, проблема логических уравнений, по существу, сводится к распознаванию допустимости правил вывода с метапеременными.

Шкалой $\langle W,R\rangle$ называется непустое множество W с заданным на нем бинарным отношением R. Шкала $\langle W_1,R_1\rangle$ называется *открытой подшкалой шкалы* $\langle W_2,R_2\rangle$, если $W_1\subseteq W_2, R_2\cap W_1^2{=}R_1$ и $\forall a\in W_1,\forall b\in W_2(aR_2b\Rightarrow b\in W_1)$. Множество всех элементов шкалы $\langle W,R\rangle$, достижимых из фиксированного элемента $a\in W$, т. е. $\{b\in W\mid\langle a,b\rangle\in R\}$, назовем *верхним конусом элемента* a (обозначение $\nabla(a)$). Множество всех элементов шкалы $\langle W,R\rangle$, из которых достижим фиксированный элемент $a\in W$, т. е. $\{c\in W\mid\langle c,a\rangle\in R\}$, назовем *нижним конусом элемента* a (обозначение $\Delta(a)$). Множество $\{b\in\Delta(a)\mid b\neq a,\forall c(\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow(c=a)\vee(c=b)\}$ назовем *множеством непосредственных предшественников элемента* a (обозначение $\Lambda(a)$). Отображение φ шкалы $\langle W_1,R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2,R_2\rangle$ называется *p-морфизмом* если

(i) $(\forall a,b\in W_1)(aR_1b\Rightarrow\varphi(a)R_2\varphi(b))$,

(ii) $(\forall a,b\in W_1)(\varphi(a)R_2\varphi(b)\Rightarrow(\exists c\in W_1)(aR_1c\&(\varphi(c)=\varphi(b)))$.

Всякое подмножество элементов из W, не связанных друг с другом отношением R, называется *антицепью шкалы* $\langle W,R\rangle$. *Моделью* называют тройку $\langle W,R,V\rangle$, где $\langle W,R\rangle$ — шкала, а V — функция означивания переменных и метапеременных: $D\xrightarrow{V}2^W$, где $D=\mathrm{Dom}(V)=\{y_1,y_2,\dots\}$ — область определения функции V. Стандартным образом функция V распространяется на произвольные формулы:

$$V(\neg\mathscr{A})=W\setminus V(\mathscr{A}),\quad V(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})=V(\mathscr{A})\cap V(\mathscr{B}),$$

$$V(\Box\mathscr{A})=\{a\mid\forall b((\langle a,b\rangle\in R)\Rightarrow(b\in V(\mathscr{A})))\}.$$

Модель $\langle W_1,R_1,V_1\rangle$ называется *открытой подмоделью модели* $\langle W_2,R_2,V_2\rangle$, если

(i) $\langle W_1,R_1\rangle$ — открытая подшкала шкалы $\langle W_2,R_2\rangle$,

(ii) $\mathrm{Dom}(V_1)=\mathrm{Dom}(V_2)$ и $\forall y\in\mathrm{Dom}(V_1)(V_1(y)=V_2(y)\cap W_1)$.

Истинность формулы на элементе a модели $\langle W,R,V\rangle$ определяется индуктивно:

$$a\Vdash_V y\Leftrightarrow a\in V(y),\quad y\in\mathrm{Dom}(V),$$

$$a\Vdash_V\neg\mathscr{A}\Leftrightarrow a\nVdash_V\mathscr{A}\Leftrightarrow a\notin V(\mathscr{A}),$$

$$a\Vdash_V(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\Leftrightarrow(a\Vdash_V\mathscr{A})\wedge(a\Vdash_V\mathscr{B})\Leftrightarrow a\in V(\mathscr{A})\cap V(\mathscr{B}),$$

$$a\Vdash_V\Box\mathscr{A}\Leftrightarrow\forall b((\langle a,b\rangle\in R)\Rightarrow(b\Vdash_V\mathscr{A}))\Leftrightarrow a\in V(\Box\mathscr{A}).$$

Множество $V(a)=\{y_i\mid y_i\in\mathrm{Dom}(V),a\Vdash_V y_i\}$ будем называть *означиванием элемента* a *в модели* $\langle W,R,V\rangle$. Формула $\mathscr{A}$ истинна в модели тогда и только тогда, когда $\forall a\in W(a\Vdash_V\mathscr{A})$ (обозначение $\langle W,R,V\rangle\Vdash\mathscr{A}$). Формула $\mathscr{A}$ истинна на шкале тогда и только тогда, когда $\forall\ V\ (\langle W,R,V\rangle\Vdash_V\mathscr{A})$ (обозначение $\langle W,R\rangle\Vdash_V\mathscr{A}$). Отображение φ называется *p-морфизмом модели* $\langle W_1,R_1,V_1\rangle$ в модель $\langle W_2,R_2,V_2\rangle$, если

(i) φ является p-морфизмом шкалы $\langle W_1,R_1\rangle$ в шкалу $\langle W_2,R_2\rangle$,

(ii) $\mathrm{Dom}(V_1)=\mathrm{Dom}(V_2)$,

(iii) $\forall y\in\mathrm{Dom}(V_1),\forall a\in W_1(a\Vdash_{V_1}y\Leftrightarrow\varphi(a)\Vdash_{V_2}y)$.

Теорема 2 [2]. *Пусть отображение* φ *есть p-морфизм модели* $\langle W_1, R_1, V_1\rangle$ *на модель* $\langle W_2, R_2, V_2\rangle$. *Тогда для любой формулы* $\mathscr{F}$ *от пропозициональных переменных и метапеременных из* $\mathrm{Dom}(V_1)$

$$\forall a \in W_1 (a \Vdash_{V_1} \mathscr{F} \Leftrightarrow \varphi(a) \Vdash_{V_2} \mathscr{F}).$$

Правило с метапеременными $r = \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p})$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, истинно в модели $\langle W, R, V\rangle$ (обозначение $\langle W, R, V\rangle \Vdash r$) тогда и только тогда, когда для любого означивания V' такого, что $V'(p_j) = V(p_j), 1 \leqslant j \leqslant m$, из $\langle W, R, V'\rangle \Vdash \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})$ следует $\langle W, R, V'\rangle \Vdash \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p})$. Модель $\langle W_n, R_n, V_n\rangle$ называется *n-характеристической для логики* λ, если для любой формулы $\mathscr{A} = \mathscr{A}(y_1, \dots, y_n)$ от n переменных из $\mathrm{Dom}(V_n)$

$$\mathscr{A} \in \lambda \Leftrightarrow \langle W_n, R_n, V_n\rangle \Vdash \mathscr{A}.$$

Элемент a модели $\langle W_n, R_n, V_n\rangle$ называют *формульным*, если найдется формула $\mathscr{F}_a$ от n переменных из $\mathrm{Dom}(V_n)$ такая, что $\forall b \in W_n((b \Vdash_{V_n} \mathscr{F}_a) \Leftrightarrow (b = a))$. Означивание V называют *формульным в модели* $\langle W_n, R_n, V_n\rangle$, если для любого $y \in \mathrm{Dom}(V)$ существует формула $\mathscr{F}_y$ от n переменных из $\mathrm{Dom}(V_n)$ такая, что $V(y) = V_n(\mathscr{F}_y)$. Пусть C — конечная или бесконечная цепь с максимальным элементом. Максимальный элемент цепи $C = C_1$ назовем *элементом глубины* 1, если a — элемент глубины $d-1$, то максимальный элемент b цепи $C_d = C_{d-1} \setminus \{a\}$ назовем *элементом глубины* d. Известен следующий критерий допустимости для правил вывода с метапеременными.

Теорема 3 [2]. *Правило с метапеременными* $r = \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p})$, *где* $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ *и* $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, *допустимо в логике* λ *тогда и только тогда, когда правило* r *истинно в модели* $\langle W_n, R_n, V\rangle$ *для любой n-характеристической модели* $\langle W_n, R_n, V_n\rangle$ *логики* λ, *для любого* $n \geqslant m$ *и любого формульного означивания* V *такого, что* $\mathrm{Dom}(V) = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, $V(p_j) = V_n(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Логики, максимальные в классе нетабличных, называются *предтабличными*. Существует в точности пять ($PM1$–$PM5$) предтабличных расширений модальной логики $S4$ [3]. В частности, модальная логика $PM1{=}\{\mathscr{F} \mid \forall \ell{=}0, 1, \dots (A_\ell \Vdash \mathscr{F})\}$, где $A_\ell = \langle \{a_{(\ell,k)} \mid 0 \leqslant k \leqslant \ell + 1\}, R_\ell\rangle$ — рефлексивная и транзитивная шкала и $\langle a_{(\ell,k+1)}, a_{(\ell,k)}\rangle \in R_\ell$ (т. е. A_ℓ — цепь длины $\ell + 2$).

Теорема 4 [2]. *Следующая модель является n-характеристической для модальной логики* $PM1$:

$$T(n) = \langle \{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid 1 \leqslant d < \infty, \xi_i \subseteq \Omega, \xi_j \neq \xi_{j+1}, 1 \leqslant j \leqslant d{-}1\}, R_n, V_n\rangle,$$

$$\Omega = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad \Omega = \mathrm{Dom}(V_n),$$

$$\langle a_{\xi_1,\dots,\xi_s}, a_{\zeta_1,\dots,\zeta_t}\rangle \in R_n \Leftrightarrow \forall k(1 \leqslant k \leqslant t \Rightarrow (\xi_k = \zeta_k) \wedge (s \geq t{+}1)),$$

$$V_n(y_i) = \{a_{\xi_1,\dots,\xi_d} \mid y_i \in \xi_d\}.$$

Любой элемент этой модели формульный.

Модель $T(n)$ есть прямое объединение 2^n подмоделей — компонент. Все элементы модели $T(n)$ индексируются с помощью всевозможных различных подмножеств $\xi_1, \dots, \xi_{2^n}$ множества Ω, пронумерованных каким-нибудь способом. Элемент a_{ξ_i} считаем максимальным в своей компоненте B_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Его глубина d равна 1. Полагаем, что $a_{\xi_i} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_i$, т. е. $\xi_i = V(a_{\xi_i})$ — означивание элемента a_{ξ_i} в модели $T(n)$. Для каждого элемента a_{ξ_i} в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i,\xi_1}, \dots, a_{\xi_i,\xi_{i-1}}, a_{\xi_i,\xi_{i+1}}, \dots, a_{\xi_i,\xi_{2^n}}$. В компоненте B_i они образуют множество элементов глубины $d = 2$. Полагаем, что $a_{\xi_i\xi_j} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_j$, т. е. $\xi_j = V(a_{\xi_i,\xi_j})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i,ξ_j}, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$ и $j \neq i$. Затем для каждого элемента a_{ξ_i,ξ_j} в качестве множества $\Lambda(a_{\xi_i,\xi_j})$ его непосредственных предшественников берем антицепь элементов $a_{\xi_i,\xi_j,\xi_1}, \dots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{j-1}}, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{j+1}}, \dots, a_{\xi_i,\xi_j,\xi_{2^n}}$. Они образуют множество элементов глубины $d = 3$ в компоненте B_i. Полагаем, что $a_{\xi_i\xi_j\xi_k} \Vdash_{V_n} y_s$ тогда и только тогда, когда $y_s \in \xi_k$, т. е. $\xi_k = V(a_{\xi_i,\xi_j,\xi_k})$ будет означиванием элемента a_{ξ_i,ξ_j,ξ_k} для $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ и $k \neq j$. Этот процесс продолжаем указанным способом, двигаясь от максимального элемента и увеличивая глубину $d = 3, 4, 5, \dots$. Таким образом, всякая компонента B_i получается последовательным достраиванием множеств непосредственных предшественников для каждого элемента. По существу, компонента B_i представляет из себя пучок бесконечных цепей с максимальным элементом. При этом любые два соседних элемента одной цепи имеют различное означивание. Модель $T(n)$ — это некоторая совокупность таких пучков. Если в этой модели положить $\Omega = \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{p_1, \dots, p_l\}$, $q + l = n$, то полученную n-характеристическую модель будем обозначать через $T(q + l) = \langle W_{q+l}, R_{q+l}, V_{q+l}\rangle$.

Зафиксируем какое-нибудь правило вывода $r = \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})/\mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p})$ вида (1), где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$. Зададим на шкале $\langle W_n, R_n\rangle$ модели $T(n)$ некоторое означивание V переменных из множества $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и метапеременных из множества $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ (т. е. $\mathrm{Dom}(V) = X \cup P$). Полученную модель обозначим через $T = \langle W_n, R_n, V\rangle$. Возьмем произвольную полную цепь C из модели T. Для каждого элемента $a_d \in C$ глубины d определим некоторое множество $\eta(a_d) = P(a_d) \cup X(a_d) \cup F(a_d)$, где $P(a_d) = \{p_j \mid p_j \in P, a_d \Vdash_V p_j\}, X(a_d) = \{x_i \mid x_i \in X, a_d \Vdash_V x_i\}$, $F(a_d) = \{f_t \mid f_t \in F, a_d \Vdash_V f_t\}$, F — множество всех подформул φ формул $\mathscr{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ и $\mathscr{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$, а также формул вида $\Diamond\varphi$, полученных из них. Пусть $\overline{\overline{F}} = l$. Тогда для элемента a_d глубины d будет однозначно определена последовательность $(\eta(a_1), \dots, \eta(a_d))$, где $\{a_1, \dots, a_d\}$ — верхний конус a_d. Множество $\pi(a_d) = \{\eta(a_1), \dots, \eta(a_d)\}$, состоящее из элементов этой последовательности, назовем *r-потенциалом* (или просто *потенциалом*) элемента a_d. Поскольку $\pi(a_{d+1}) = \{\pi(a_d), \eta(a_{d+1})\}$, мощности потенциалов соседних элементов различаются не более чем на 1. Следовательно, потенциал монотонно (может быть, нестрого) возрастает с увеличением глубины. Так как $\overline{\overline{P \cup X \cup F}} = k + m + l$, мощности потенциалов ограничены числом 2^{k+m+l}. Пару $\tau(a_d) = (\eta(a_d), \pi(a_d))$ назовем *r-типом* (или просто *типом*) элемента a_d на цепи C в модели T, где $\pi(a_d)$ — потенциал элемента a_d. Для любого фиксированного потенциала π существует ровно $\overline{\overline{\pi}}$ типов элементов. Отсюда произвольная цепь модели T может содержать максимум $\Theta = 1+2+3+\dots+2^{k+m+l} = (1+2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ различных типов элементов. Множество M элементов модели T назовем *полным*, если для любого подмножества $\beta \subseteq P$ найдется по крайней мере один элемент $a \in M$ такой, что $\{p_j \mid a \Vdash_{V_n} p_j\} = \beta$, т. е. чье означивание на параметрах совпадает с β. Например, нижний конус любого элемента модели $T(n)$ и множество непосредственных предшественников любого элемента из $T(n)$ являются полными множествами.

Теорема. *Правило вывода с метапеременными*

$$r = \frac{\mathscr{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}{\mathscr{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)}$$

допустимо в логике $PM1$ тогда и только тогда, когда оно истинно в любой конечной модели $\mathscr{T}$ такой, что

1) $\mathscr{T}$ является открытой подмоделью модели T_s, которая получается из s-характеристической модели $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s\rangle$ для логики $PM1$ при $s \leqslant m+k$ заданием некоторого означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j), 1 \leqslant j \leqslant m$;

2) модель $\mathscr{T}$ содержит все максимальные элементы модели T_s;

3) любая цепь модели $\mathscr{T}$ содержит не более $(1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$ элементов, где k — мощность множества переменных $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, m — мощность множества метапеременных $P = \{p_1, \dots, p_m\}$, l — мощность множества F всех подформул φ формул $\mathscr{A}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$ и $\mathscr{B}(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_m)$, а также формул вида $\Diamond\varphi$, полученных из них;

4) для любого элемента $a \in \mathscr{T}$ если множество $\Lambda(a)$ его непосредственных предшественников неполно, то для каждого подмножества β из P в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдется соответствующий ему элемент c_β такой, что $\{p_j \mid c_\beta \Vdash_{V^*} p_j\}=\beta$ и его r-потенциал $\pi(c_\beta)$ равен r-потенциалу $\pi(a)$.

Доказательство. Пусть правило вывода r недопустимо в логике $PM1$. По теореме 3 найдутся некоторая s-характеристическая модель $T(s) = \langle W_s, R_s, V_s\rangle$, формульное означивание V', удовлетворяющее условию $\mathrm{Dom}(V') = X \cup P = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_1, \dots, p_m\}$, $V'(p_j) = V_s(p_j), 1 \leqslant j \leqslant m$, и элемент $a_0 \in W_s$ такие, что

$$\forall a \in W_s(a \Vdash_{V'} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0 \nVdash_{V'} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

т. е. $\langle W_s, R_s, V'\rangle \nVdash r$. Докажем, что существует модель $\mathscr{T}$ с указанными свойствами такая, что $\mathscr{T} \nVdash r$.

Предложение 1. *Если $s > k + m$, то правило r будет ложно в некоторой $(k+m)$-характеристической модели $T(k+m) = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V_{k+m}\rangle$ при некотором означивании V'' таком, что $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$.*

Указанную $(k+m)$-характеристическую модель мы получим, преобразуя модель $T_1 = \langle W_s, R_s, V'\rangle$. Произведем преобразование отождествления элементов одной и той же конечной глубины модели T_1. Начнем с элементов глубины 1. Пусть максимальный элемент $a_{\xi_i} \in T_1$ таков, что его означивание есть $V'(a_{\xi_i}) = \alpha \cup \beta$, где $\alpha \subseteq X$ и $\beta \subseteq P$. Возьмем все остальные максимальные элементы a_{ξ_j} модели T_1, удовлетворяющие условию $V'(a_{\xi_j}) = \alpha \cup \beta$, и отождествим их с элементом a_{ξ_i}, т. е. сольем последовательно один за другим с a_{ξ_i}. Элемент a_{ξ_i} назовем *элементом слияния*. Далее перейдем к следующему максимальному элементу и выполним преобразование отождествления, затем — к следующему и т. д., пока не останутся только элементы слияния. В результате максимальных элементов в модели будет не больше 2^{k+m}. Если это число строго меньше 2^{k+m}, то добьемся точного равенства. Для этого отменим отождествление необходимого количества тех или иных элементов так, чтобы для всякого $\beta \subseteq P$ осталось ровно 2^k элементов a_{ξ_j}, чье означивание на параметрах в точности совпадает с β, т. е. $V(a_{\xi_j}) \cap P = \beta$. В итоге в результирующей модели останется ровно 2^{k+m} максимальных элементов, т. е. столько же, сколько их в модели $T(k+m)$. Очевидно, ровно столько же будет и компонент. Возьмем одну из компонент полученной модели. Пусть a_{ξ_q} — ее максимальный элемент, а

$V(a_{\xi_q}) = \alpha_1 \cup \beta_1$ — его означивание ($\alpha_1 \subseteq X, \beta_1 \subseteq P$). Элементы глубины 2 этой компоненты образуют множество $\Lambda(a_{\xi_q})$ непосредственных предшественников элемента a_{ξ_q}. Произведем над ними преобразование отождествления. Эта процедура позволит нам оставить в множестве $\Lambda(a_{\xi_q})$ результирующей модели для каждого $\beta_t \subseteq P$, $\beta_t \neq \beta_1$, ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах и $2^k - 1$ элементов с означиванием β_1, т. е. точно столько, сколько их в модели $T(k+m)$. Возьмем какой-нибудь элемент $a_{\xi_q \xi_s}$ преобразованного множества $\Lambda(a_{\xi_q})$. Пусть $V(a_{\xi_q \xi_s}) = \alpha_2 \cup \beta_2$ — его означивание ($\alpha_2 \subseteq X$, $\beta_2 \subseteq P$). Рассмотрим множество $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$ непосредственных предшественников элемента $a_{\xi_q \xi_s}$ в полученной модели. Они образуют множество элементов глубины 3. Произведем над ними процедуру отождествления. Это даст нам возможность оставить в множестве $\Lambda(a_{\xi_q \xi_s})$ непосредственных предшественников в результирующей модели для каждого $\beta_2 \subseteq P$, $\beta_t \neq \beta_2$, ровно 2^k элементов с означиванием β_t на параметрах и $2^k - 1$ элементов с означиванием β_2, т. е. точно столько, сколько их в модели $T(k+m)$. Такие же преобразования проведем для каждого оставшегося элемента $a_{\xi_q \xi_j}$ из множества $\Lambda(a_{\xi_q})$. Далее переходим к элементам глубины 4, 5, 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь. Точно такие же преобразования производим со всеми остальными компонентами модели T_1. Результирующую модель обозначим через $\widetilde{T}$. По построению модель $\widetilde{T}$ имеет фрейм, совпадающий с фреймом модели $T(k+m)$, и $V''(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, т. е. фактически $\widetilde{T} = \langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle$. Отметим, что для любой полной цепи модели T_1 некоторый ее дубликат (относительно означивания V'') содержится в модели $\widetilde{T}$. Определим отображение φ модели T_1 на модель $\widetilde{T}$. Произвольному элементу модели T_1 поставим в соответствие его элемент слияния из модели $\widetilde{T}$, если отождествление не отменялось, и сам этот элемент из $\widetilde{T}$, если отождествление для него отменялось. Очевидно, что отображение φ является p-морфизмом. Тогда по теореме 2

$$\forall a \in W_{k+m}(a \Vdash_{V''} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a'_0 \nVdash_{V''} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a'_0 = \varphi(a_0)$, т. е. $\langle W_{k+m}, R_{k+m}, V'' \rangle \nVdash r$, что и требовалось доказать.

Вернемся к модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ и трансформируем ее поэтапно в модель $\mathscr{T}$. Доказанное предложение 1 позволяет считать, что $s \leqslant k+m$. Введем некоторое преобразование цепей, которое назовем *прореживанием*. Пусть a — максимальный элемент произвольной цепи C какой-либо компоненты модели T_1. Все элементы того же r-типа, что и a, образуют некоторую подцепь цепи C с данным элементом a в качестве максимального. Элемент a назовем *представителем* данного типа на C. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента a, сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента a). В преобразованной таким образом цепи возьмем элемент b глубины 2. Все элементы одинакового с ним типа также образуют некоторую подцепь. Удаляем все элементы этой подцепи, кроме самого элемента b, также сохраняя его означивание (прореживаем по типу элемента b). Во вновь полученной цепи производим такую же процедуру с элементом глубины 3, затем глубины 4 и т. д. В результате получим прореженную цепь C^*, состоящую только из представителей типов, вместе с их означиванием из цепи C. Поскольку различных типов элементов всего $\Theta = (1 + 2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$, то и длина цепи C^* не превосходит Θ. Для любого элемента $a \in C$ через $m(a)$ обозначим представителя его типа на цепи C^*.

Предложение 2. $\forall a \in C \quad (\tau(a) = \tau(m(a)))$, *в частности, представитель любого типа сохраняет свой тип на прореженной цепи* C^*.

Доказательство ведем индукцией по глубине элемента a_d. Пусть для удобства нижний индекс элемента указывает его глубину. Если $d = 1$, то утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно также для всех элементов глубины $d < l$. Возьмем на цепи C элемент a_{l+1} глубины $l + 1$. Если он не максимальный в подцепи однотипных элементов, то на цепи C найдется элемент a_q того же типа, но глубины $q \leqslant l$. По индукционному предположению $\tau(a_q) = \tau(m(a_q))$. Поскольку $\tau(a_{l+1}) = \tau(a_q)$ и $\tau(m(a_q)) = \tau(m(a_{l+1}))$, то $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$. Пусть a_{l+1} максимальный в подцепи однотипных элементов на C, т. е. именно он, сохранив свое означивание, под именем $m(a_{l+1})$ займет соответствующее место на цепи C^*. По определению $\pi(a_{l+1}) = \{\pi(a_l), \eta(a_{l+1})\}$, где $\eta(a_{l+1}) = F(a_{l+1}) \cup P(a_{l+1}) \cup X(a_{l+1})$. Очевидно, что $F(a_{l+1}) = \{f_t \mid f_t \in F, a_{l+1} \Vdash_{V'} f_t\}$ определяется только множествами $P(a_{l+1}) = \{p_j \mid p_j \in P, a_{l+1} \Vdash_{V'} p_j\}$, $X(a_{l+1}) = \{x_i \mid x_i \in X, a_{l+1} \Vdash_{V'} x_i\}$ и $\pi(a_l)$. Аналогично $\pi(m(a_{l+1})) = \{\pi(m(a_l)), \eta(m(a_{l+1}))\}$, и точно так же $F(m(a_{l+1}))$ определяется только множествами $P(m(a_{l+1})) \cup X(m(a_{l+1}))$ и $\pi(m(a_l))$. По построению элементы a_l и a_{l+1} имеют одинаковое означивание, т. е. $P(a_{l+1}) = P(m(a_{l+1}))$ и $X(a_{l+1}) = X(m(a_{l+1}))$. По индукционному предположению $\pi(a_l) = \pi(m(a_l))$. Отсюда $\tau(a_{l+1}) = \tau(m(a_{l+1}))$, что и требовалось.

Возьмем произвольную компоненту модели $T_1 = \langle W_s, R_s, V' \rangle$ с максимальным элементом a. Произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(a)$ по типу элемента a. В преобразованной компоненте рассмотрим множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a. Для каждого $b \in \Lambda(a)$ произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(b)$ по типу элемента b. В полученной компоненте рассмотрим каждое множество $\Lambda(b)$. Для всякого $c \in \Lambda(b)$ произведем прореживание всех цепей нижнего конуса $\Delta(c)$ по типу элемента c и т. д. Указанное преобразование продолжаем, двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели T_1. Таким образом будет прорежена каждая цепь модели T_1. Полученную в итоге модель обозначим через $T_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$. Докажем, что

$$\forall f \in F \ (T_1 \Vdash f \Leftrightarrow T_2 \Vdash f).$$

Действительно, пусть для некоторой формулы $f_1 \in F$ и некоторого элемента $a \in T_1 \quad a \nVdash_{V'} f_1$. По предложению 2 элемент $b = m(a)$ из T_2 имеет тот же тип, что и элемент a. Тогда $b \nVdash_{V_2} f_1$. Обратно, пусть для некоторой формулы $f_2 \in F$ и некоторого элемента $c \in T_2 \quad c \nVdash_{V_2} f_2$. Возьмем любой элемент $d \in T_1$ такой, что $m(d) = c$. По предложению 2 типы элементов d и c равны, т. е. $d \nVdash_{V'} f_2$. Из этого утверждения следует, что

$$\forall a \in W_2 (a \Vdash_{V_2} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0'' \nVdash_{V_2} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_0'' = m(a_0)$, т. е. $\langle W_2, R_2, V_2 \rangle \nVdash r$. В полученной конечной модели T_2, двигаясь по направлению от максимальных элементов вглубь, произведем преобразование отождествления элементов множества $\Lambda(a)$ для каждого $a \in T_2$, описанное в утверждении 1, не отменяя ни одно из них. Полученную результирующую модель обозначим через $\mathscr{T} = \langle W_3, R_3, V_3 \rangle$. По построению все максимальные элементы модели T_1 остались таковыми в модели $\mathscr{T}$. Все блоки модели $\mathscr{T}$ представляют собой пучки конечных цепей длины не более $\Theta = (1+2^{k+m+l})2^{k+m+l-1}$

с максимальными элементами. Все элементы из множества $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников любого элемента $a \in \mathscr{T}$ имеют различное означивание. Очевидно, что модель $\mathscr{T}$ является открытой подмоделью модели $T(k+m)$ при некотором означивании V^* таком, что $V^*(p_j) = V_{k+m}(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Отображение ψ, ставящее в соответствие всякому элементу модели T_2 его элемент слияния из модели $\mathscr{T}$, является p-морфизмом. Отсюда следует, что

$$\forall a \in W_3(a \Vdash_{V_3} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \text{ но } a_0''' \nVdash_{V_3} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_0''' = \psi(a_0'')$, т. е. $\mathscr{T} \nVdash r$. Таким образом, условия 1–3 из формулировки настоящей теоремы справедливы для модели $\mathscr{T}$.

Докажем справедливость условия 4. Пусть элемент $a \in \mathscr{T}$ таков, что множество $\Lambda(a)$ его непосредственных предшественников неполно. Это значит, что в ходе прореживания из модели T_1 был удален некоторый непосредственный предшественник $\tilde{a}$ элемента a со всем своим нижним конусом $\Delta(\tilde{a})$. Пусть β — произвольное подмножество из P. Означивание V' в модели T_1 таково, что $V'(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Это значит, что нижний конус любого элемента в модели T_1 является полным множеством. Поэтому в $\Delta(\tilde{a}) \subset T_1$ найдется элемент b, чье означивание на параметрах равно β. Тогда в $\nabla(a) \subset T_1$ обязательно найдется элемент c, максимальный среди элементов того же типа, что и b. При этом, с одной стороны, $\pi(c) \subseteq \pi(a) \subseteq \pi(b)$ ввиду монотонности потенциала, с другой стороны, $\pi(c) = \pi(b)$ как потенциалы однотипных элементов. В итоге $\pi(c) = \pi(a)$ и согласно предложению 2 условие 4 теоремы тоже выполнено.

Обратно, пусть некоторая модель $\mathscr{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ удовлетворяет условиям настоящей теоремы, т. е. является открытой подмоделью некоторой s-характеристической модели $\langle W_s, R_s, V_s \rangle$, $s \leqslant m+k$, с заданным на ней означиванием V^* таким, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. При этом $W \subset W_s$, $\overline{\overline{W}} < \infty$, $R = R_s \upharpoonright W$, $V''' = V^* \upharpoonright W$, $V'''(p_j) = V^*(p_j) \upharpoonright W$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть $\mathscr{T} \nVdash r$. Тогда найдется элемент $a_1 \in W$ такой, что

$$\forall a \in W(a \Vdash_{V'''} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_1 \nVdash_{V'''} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}).$$

Докажем, что тогда $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \nVdash r$ для некоторого формульного означивания V^* такого, что $V^*(p_j) = V_s(p_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Достроим модель $\mathscr{T}$ до модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$ и докажем формульность V^*. С этой целью введем преобразования, в некотором смысле обратные преобразованиям прореживания и отождествления. Пусть a есть произвольный элемент модели $\mathscr{T}$ и α — его означивание на параметрах. Первое преобразование относится к случаю, когда множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a неполно. Пусть $\beta \subset P$ — недостающее подмножество. По условию теоремы в верхнем конусе $\nabla(a)$ найдется элемент c такой, что $\pi(c) = \pi(a)$ и его означивание на параметрах совпадает с β. Добавим в множество $\Lambda(a)$ модели $\mathscr{T}$ элемент b с означиванием, совпадающим с означиванием элемента c, т. е. $\eta(b) = \eta(c)$. Полученное расширение модели обозначим через $\widehat{\mathscr{T}} = \langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V}''' \rangle$. Потенциалы элементов соседствующих элементов a и b могут различаться по мощности лишь на 1. Поскольку $\eta(b) = \eta(c)$, $\eta(c) \in \pi(c)$ и $\pi(c) = \pi(a)$, то $\eta(b) \in \pi(a)$ и, значит, $\pi(b) = \pi(a) = \pi(c)$. Отсюда следует, что типы элементов c и b в модели $\widehat{\mathscr{T}}$ равны. По этой причине из того, что $c \Vdash_{V'''} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p}))$, следует $b \Vdash_{\widehat{V}'''} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p}))$, т. е. в модели $\widehat{\mathscr{T}}$ сохранятся истинность посылки и ложность следствия правила r. Тогда $\widehat{\mathscr{T}} \nVdash r$. Произведем такое же преобразование для всех оставшихся недостающих подмножеств из P. В преобразованной таким образом модели множество $\Lambda(a)$

непосредственных предшественников элемента a уже будет полным. Введенное преобразование назовем *пополнением множества* $\Lambda(a)$. Второе преобразование относится к случаю, когда множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a будет полным. Возьмем любой элемент b из этого множества. Пусть означивание b на параметрах равно β. Добьемся, если это необходимо, чтобы общее количество элементов с таким же означиванием на параметрах в $\Lambda(a)$ было 2^t в случае $\alpha \neq \beta$ и $2^t - 1$ в случае $\alpha = \beta$, где $t = s - m$, т. е. в точности столько, сколько их в модели $T = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Для этого добавим в $\Lambda(a)$ необходимое количество элементов, означивание которых совпадает с означиванием элемента b. Полученное расширение модели обозначим через $\widetilde{\mathscr{T}} = \langle \widetilde{W}, \widetilde{R}, \widetilde{V}''' \rangle$. Заметим, что все добавленные элементы будут иметь тот же тип в модели $\widetilde{\mathscr{T}}$, что и элемент b, поскольку будут иметь тот же потенциал. Отображение ϱ модели $\widetilde{\mathscr{T}}$ на модель $\mathscr{T}$, переводящее каждый добавленный элемент в элемент b, а остальные элементы в самих себя, очевидно, является p-морфизмом. Отсюда по теореме 2

$$\forall a \in \widetilde{W}(a \Vdash_{\widetilde{V}'''} \mathscr{A}(\bar{x}, \bar{p})), \quad \text{но} \quad a_1' \nVdash_{\widetilde{V}'''} \mathscr{B}(\bar{x}, \bar{p}),$$

где $a_1' = \varrho(a_1)$, т. е. $\widetilde{\mathscr{T}} \nVdash r$. Произведем указанное преобразование для каждого $b \in \Lambda(a)$. В преобразованной таким образом модели множество $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a будем называть *абсолютно полным*. Введенное преобразование назовем *абсолютным пополнением множества* $\Lambda(a)$.

Возьмем произвольную компоненту модели $\mathscr{T}$ с максимальным элементом a. Рассмотрим элементы глубины 2. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества $\Lambda(a)$ непосредственных предшественников элемента a. В преобразованной модели множество $\Lambda(a)$ будет абсолютно полным, как в модели T_3. Возьмем в этом новом множестве произвольный элемент b и перейдем к элементам глубины 3. Произведем, если необходимо, преобразования пополнения и абсолютного пополнения множества $\Lambda(b)$ непосредственных предшественников элемента b. В преобразованной модели множество $\Lambda(b)$ также будет абсолютно полным. Произведем указанную процедуру для каждого $b \in \Lambda(a)$. В преобразованной таким образом модели возьмем произвольный элемент c глубины 3 и перейдем к элементам глубины 4. Указанный выше процесс продолжим, переходя к элементам глубины 5, глубины 6 и т. д., двигаясь по направлению от максимального элемента вглубь. Аналогично преобразуем и все остальные компоненты модели $\mathscr{T}$. По условию теоремы модель $\mathscr{T}$ содержит все максимальные элементы модели T_3. В результате произведенных преобразований модель $\mathscr{T} = \langle W, R, V''' \rangle$ окажется достроенной до модели $T_3 = \langle W_s, R_s, V^* \rangle$. Из доказанных выше свойств преобразований пополнения и абсолютного пополнения следует, что $\langle W_s, R_s, V^* \rangle \nVdash r$.

Докажем формульность означивания V^*. Для любого $\eta \subseteq X \cup P \cup F$ построим формулы

$$\varphi(\eta) = \Big(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \Big),$$

$$\psi(\eta) = \Diamond \Big(\bigwedge_{x_i \in \eta} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \notin \eta} \neg x_i \Big) \wedge \Diamond \Big(\bigwedge_{p_j \in \eta} p_j \wedge \bigwedge_{p_j \notin \eta} \neg p_j \Big) \wedge \Diamond \Big(\bigwedge_{f_t \in \eta} f_t \wedge \bigwedge_{f_t \notin \eta} \neg f_t \Big).$$

Пусть $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \ldots, \eta_d\})$ — некоторый тип элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$, где $\eta_i \subseteq X \cup P \cup F$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Определим формулу $f(\tau) = \varphi(\eta_d) \wedge (\psi(\eta_1) \wedge \cdots \wedge$

$\psi(\eta_d))$. Покажем,что $f(\tau)$ истинна только на элементах типа τ. Пусть $\tau_1 \neq \tau_2$ и a — элемент типа τ_1. Тогда $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$. Действительно, если у этих типов разные потенциалы, то найдется некоторое η_s из потенциала типа τ_2 такое, что $a \not\Vdash_{V^*} \psi(\eta_s)$, где $\psi(\eta_s)$ — подформула формулы $f(\tau_2)$. Если же потенциалы одинаковые, то в них найдется некоторое η_q такое, что $a \not\Vdash_{V^*} \varphi(\eta_q)$, где $\varphi(\eta_q)$ — подформула формулы $f(\tau_2)$. В обоих случаях $a \not\Vdash_{V^*} f(\tau_2)$. Таким образом, множество M_τ элементов модели $\langle W_s, R_s, V^* \rangle$ типа τ формульно: $M_\tau = V^*(f_\tau)$. Возьмем произвольную переменную или метапеременную $y_i \in X \cup P$. Пусть $y_i \in \tau$, т. е. $y_i \in \eta_d$ в типе $\tau = (\eta_d, \{\eta_1, \ldots, \eta_d\})$. Для любого элемента a данного типа τ $\quad a \Vdash_{V^*} f(\tau)$ и, следовательно, $a \Vdash_{V^*} y_i$. Иными словами, $M_\tau \subseteq V^*(y_i)$ для любого τ такого, что $y_i \in \tau$. С другой стороны, любое $a \in V^*(y_i)$ содержится в M_τ для подходящего τ. Это означает, что

$$V^*(y_i) = M_{\tau_1} \cup \cdots \cup M_{\tau_u} = V^*(f(\tau_1)) \cup \cdots \cup V^*(f(\tau_u)) = V^* \left(\bigvee_{j=1}^{u} f(\tau_j) \right),$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_u$ — все типы такие, что $y_i \in \tau_j$, $1 \leqslant j \leqslant u$. Обозначим формулу $\bigvee\limits_{j=1}^{u} f(\tau_j) = \mathscr{F}_i$, тогда $V^*(y_i) = V^*(\mathscr{F}_i)$. Это доказывает, что означивание V^* формульное. Тогда по теореме 3 правило r с метапеременными ложно в логике $PM1$. Из теоремы 5 непосредственно следует

Теорема 6. *Предтабличная модальная логика $PM1$ разрешима по допустимости для правил вывода с метапеременными. В предтабличной модальной логике $PM1$ разрешимость логических уравнений алгоритмически распознаваема.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбаков В. В.* Уравнения в свободной топобулевой алгебре // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 172–204.

2. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. New York; Amsterdam: Elsevier scientific publ., 1996.

3. *Максимова Л. Л.* Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 28–56.

Статья поступила 18 марта 1998 г.

г. Красноярск