ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 513.01

Г. Н. Перлатов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ ГЕОМЕТРИИ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К НЕЗАВИСИМОСТИ АКСИОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ, ПОРЯДКА И КОНГРУЕНТНОСТИ, II

Работа является продолжением статьи [1].

Переходим к доказательству выполнимости аксиомы II_4^* в модели $\tilde{R}$. Так как все треугольники ABC, плоскости которых не проходят через точку O, являются регулярными, то для доказательства II_4^* достаточно показать, что у любого треугольника ABC, плоскость которого проходит через O, два угла нерегулярны. Возможны два случая: 1) все три вершины треугольника ABC лежат на разных центральных идеальных отрезках; 2) две вершины треугольника ABC лежат на одном и том же центральном идеальном отрезке.

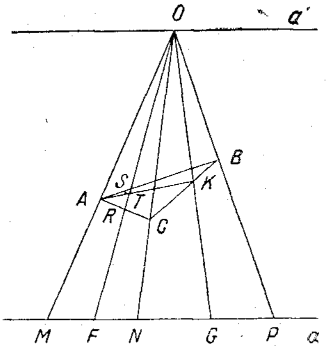

Рис. 1

Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B, и C расположены соответственно на центральных идеальных отрезках OO_M, OO_P, OO_N (рис. 1), причем отрезок OO_N проходит в плоскости треугольника ABC пространства R_Σ между отрезками OO_M и OO_P. Возможны два варианта: 1) либо точка C, расположенная на OO_N, и точка O находятся по разные стороны от AB; 2) либо точки C и O находятся по одну сторону от AB.

Рассмотрим первый вариант первого случая (рис. 1). Докажем нерегулярность угла A. Пусть F — произвольная реальная точка на отрезке MN реальной прямой a. OF пересекает AC и AB в точках R и S (по аксиоме II_4'). На отрезке NP прямой a возьмем произвольную идеальную точку G, что всегда можно сделать на основании свойств идеальных элементов [2]. OG пересекает BC в точке K, и AK пересекает RS в точке T по II_4', примененной в плоскости пространства R_Σ. Точки R, S и T, как точки центрального идеального отрезка OO_F, принадлежат плоскости модели $\tilde{\alpha}$, точки B и C принадлежат $\tilde{\alpha}$ по условию, а K не принадлежит $\tilde{\alpha}$ по построению, так как проектируется из O в идеальную точку реальной плоскости α.

Следовательно, II_4' для угла A не имеет места. Аналогично доказывается нерегулярность угла B.

Рассмотрим второй вариант первого случая. Пусть (рис. 2) точка C расположена по одну сторону с точкой O относительно AB. Пусть OC пересекает a в точке N. По аксиоме II_4' в плоскости простран-

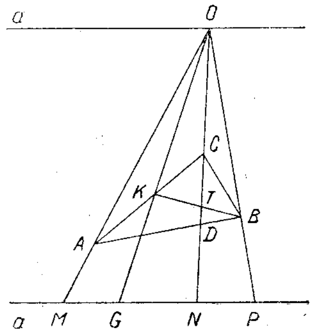

Рис. 2

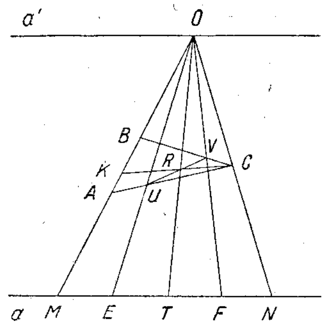

Рис. 3

ства R_Σ ON пересекает AB в точке D. Докажем нерегулярность угла B. Возьмем идеальную точку G на отрезке MN. OG пересекает AC в точке K, и BK пересекает CD в точке T на основании II_4'. Точки C, D, T и A принадлежат плоскости модели $\tilde{\alpha}$, а точка K, по построению, не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла B. Аналогично доказывается и нерегулярность угла A.

Рассмотрим второй случай. Пусть вершины A и B треугольника ABC лежат на одном центральном идеальном отрезке (рис. 3). Докажем нерегулярность угла C. На сторонах угла AC и BC возьмем произвольные точки U и V плоскости $\tilde{\alpha}$, которые проектируются в реальные точки E и F прямой a на плоскости α. На отрезке EF возьмем произвольную идеальную точку T [2]. По аксиоме II_4', OT пересекает UV в R, и CR пересекает AB в некоторой точке K. По условию и построению, точки A, B, K, U, V принадлежат $\tilde{\alpha}$, а точка R не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла C.

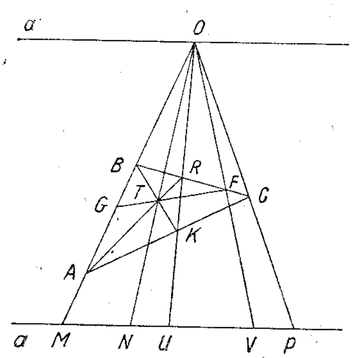

Рис. 4

Докажем теперь нерегулярность угла B. Пусть вершины A и B треугольника ABC лежат на центральном идеальном отрезке OO_M (рис. 4), а вершина C — на отрезке OO_P. Пусть точка K стороны AC принадлежит $\tilde{\alpha}$, т. е. проектируется из O в реальную точку U. На отрезке MU возьмем произвольную идеальную точку N. Тогда ON, по аксиоме II_4', пересекает BK в точке T, и AT пересекает BC в точке R, OR пересекает a в точке U. На отрезке UP прямой a возьмем произвольную реальную точку V. По аксиоме II_4', OV пересекает RC в точке F. По II_4, примененной к треугольнику BRA, FT пересекает отрезок AB в точке G. По условию и построению, точки A, C, K, G и F принадлежат

$\tilde{\alpha}$, а точка T не принадлежит $\tilde{\alpha}$, чем доказывается нерегулярность угла B.

Таким образом, при всех вариантах расположения треугольника ABC относительно точки O, лежащей в плоскости этого треугольника, по крайней мере два угла этого треугольника являются нерегулярными, чем доказывается аксиома II_4^*.

Так как треугольник ABC является регулярным тогда и только тогда, когда точки A, B и C лежат на трех различных центральных идеальных отрезках, не принадлежащих одной плоскости пространства R_Ω, то выполняется аксиома I_5'. Так как треугольник $A_1B_1C_1$, достижимый относительно треугольника ABC, является регулярным тогда и только тогда, когда регулярен треугольник ABC, то выполняется аксиома II_4^{**}.

Перейдем к рассмотрению аксиом конгруентности в R. Определим сначала длину отрезка AB. Если AB расположен в реальной плоскости α или на прямой, параллельной некоторой реальной плоскости, то в качестве длины отрезка AB примем ту длину, которую имеет AB как отрезок евклидова пространства R_Ω. Пусть отрезок AB не параллелен никакой реальной плоскости. Если A и B лежат на различных центральных идеальных отрезках OO_C и OO_D, $OM \parallel O_C O_D$ и P_2 и P_1 — соответственно точки пересечения AB с OM и $O_C O_D$, то длину AB определим, как в мероопределении Кэли — Клейна с вырожденным абсолютом, распавшимся на пару параллельных прямых, по формуле $AB = \frac{k}{2} \ln (P_1P_2BA)$ [3]. Если точки A и B расположены на одном центральном идеальном отрезке OO_C, то положим $AB = \frac{k}{2} \ln (O_C OBA)$. Два отрезка AB и CD будем называть конгруентными, если они имеют одинаковую длину. Выполнимость линейных аксиом конгруентности III_{2-3} доказывается в R так же, как выполнимость этих аксиом в интерпретации гиперболической геометрии Кэли — Клейна [3].

Аксиома IV_1^* выполняется потому, что реальные треугольники ABC, лежащие в реальных плоскостях пространства R_Ω, т. е. треугольники пространства R_Ω, будут особыми треугольниками в модели R, ибо в R_Ω выполняется аксиома IV*. Докажем выполнимость IV_2^*. Треугольники, компланарные особым треугольникам в модели R, будут треугольниками, расположенными в параллельных плоскостях в пространстве R_Ω. Если прямая a_1 и точка вне ее K_1 достижимы относительно треугольника $A_1B_1C_1$, компланарного особому треугольнику ABC, то из точки O прямая a_1 и точка K_1 проектируются в R_Ω на плоскость треугольника ABC в прямую a и точку K, принадлежащие также модели R, а потому аксиома IV* выполняется одновременно в плоскостях R_Ω треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. выполняется аксиома IV_2^*. Теорема 1 доказана.

Следствие. Аксиома II_4' независима от аксиом I_{1-4}, I_5', I_5^{**}, I_{6-8}, II_{1-3}, II_4'', II_4^*, II_4^{**}, II_{5-7}, III_{2-3}, IV_1^*, IV_2^*.

Доказательство. В модели R_1, построенной при доказательстве теоремы 1, выполняются аксиомы I_{1-4}, I_5', I_5^{**}, I_{6-8}, II_{1-3}, II_4'', IV_1^*, II_4^{**}, IV_2^*, II_{5-7}, III_{2-3} и не выполняется аксиома II_4', так как существуют нерегулярные углы.

§ 2. Независимость аксиомы II_4' от аксиом принадлежности, линейных аксиом порядка и линейных аксиом конгруентности III_{2-3}

В следствии из теоремы 1 была установлена независимость ослабленной аксиомы Паша II_4' от аксиом принадлежности, линейных аксиом порядка, линейных аксиом конгруентности III_{2-3} при условии ослабления одной из аксиом принадлежности (при замене аксиомы I_5 аксиомой I_5'). Сходный результат может быть установлен без ослабления аксиом принадлежности, при дополнительном выполнении ослабленной аксиомы III_1 и некотором ослаблении аксиомы IV_2^*. Ослабления аксиом III_1 и IV_2^* формулируются следующим образом.

Аксиома III_1'. *Если A, B — точки на прямой b и A' — точка на той же прямой или на другой прямой b', то всегда можно найти по крайней мере одну сторону прямой b' от точки A' и на этой стороне точку B' такую, что отрезок AB конгруентен отрезку $A'B'$.*

Аксиома IV_3^*. *Из двух любых треугольников, компланарных особому треугольнику и некомпланарных между собой, по крайней мере один является особым.*

Выполняется следующая

Теорема 2. *Аксиомы* II_4^* и II_4^{**} *невыводимы из аксиом* I_{1-8}, II_{1-3}, II_{5-7}, II_4'', III_1', III_{2-3}, IV_1^*, IV_3^*.

Доказательство. Для доказательства теоремы построим следующую модель. Рассмотрим произвольное неполное координатное поле Ω и трехмерное пространство R_Ω с координатами из Ω. Пусть Σ — произвольное расширение координатного поля Ω и R_Σ — соответствующее ему трехмерное пространство. Будем предполагать, что для пространств R_Ω и R_Σ выполняются аксиомы I_{1-8}, II_{1-4}, III_{1-4} и V_1. При этих условиях можно доказать, что в пространстве R_Σ существуют идеальные прямые, не содержащие ни одной реальной точки, т. е. не содержащие точек R_Ω [2]. Возьмем в пространстве R_Σ произвольную прямую a, не содержащую точек R_Ω, и удалим эту прямую со всеми ее точками из R_Σ. Все оставшиеся точки R_Σ будем считать точками модели R_1. Прямыми пространства R_1 будем считать все прямые пространства R_Σ, кроме прямой a, удалив из этих прямых те же точки, что и из прямой a. Плоскостями модели R_1 будем считать плоскости пространства R_Σ, выбросив из них точки, удаленные из прямой a. Отношения принадлежности, порядка и конгруентности будем понимать в модели R_1 в обычном смысле.

Докажем выполнимость аксиом принадлежности в модели R_1. Аксиомы I_{1-2} выполняются для модели R_1 потому, что точки, участвующие в формулировках этих аксиом, являются, вместе с тем, и точками пространства R_Σ, для которого выполняются I_{1-2}. Аксиома I_3 выполняется, ибо среди точек произвольной прямой модели R_1 содержатся все точки некоторой прямой пространства R_Ω. Аксиомы I_{4-5} выполняются, так как три точки A, B, C модели R_1, не лежащие на одной прямой, являются, вместе с тем, тремя точками пространства R_Σ, не лежащими на одной прямой, а в R_Σ выполняются I_{4-5}. Аксиома I_6 выполняется потому, что все точки прямой модели R_1 принадлежат некоторой прямой из R_Σ. Докажем выполнимость I_7 в модели R_1. Пусть две плоскости α и β модели R_1 имеют общую точку A. Докажем, что α и β имеют, по крайней мере, еще одну общую точку, принадлежащую R_1. Рассматривая α и β как плоскости из R_Ω, на основании I_7 в R_Ω заключаем, что α и β имеют общую прямую в R_Ω, которая не может быть исключительной прямой a, так как содержит точку A из R_Ω, а потому α и β содержат общую прямую и в R_1. I_8 выполняется в R_1, так как I_8 выполняется в R_Ω и R_Ω содержится в R_1.

Линейные аксиомы порядка II_{1-3}, II_{5-7} выполняются в R_1 на том основании, что точки, лежащие на прямой в R_1, будут точками, лежащими на прямой в R_Ω, а в R_Ω выполняются аксиомы II_{1-3}, II_{5-7}.

Докажем, что в R_1 выполняется аксиома II_4''. Возможны три случая: 1) плоскость угла AOB, для которого проверяется выполнимость II_4'', не содержит точек R_Ω, не принадлежащих модели R_1; 2) плоскость угла AOB содержит одну такую точку M (точку пересечения этой плоскости с исключительной прямой a); 3) плоскость угла AOB содержит прямую a. В первом случае все углы плоскости AOB регулярны, т. е. выполняется не только II_4'', но и более сильная аксиома II_4'. Во втором случае точку D и прямую DK, фигурирующие в определении аксиомы II_4'' [1], выбираем так, чтобы прямая DK не проходила через точку M. В третьем случае возможны два варианта: 1) угол AOB расположен по одну сторону прямой a; 2) угол AOB расположен по разные стороны a. В первом варианте угол AOB регулярен, так как отрезки, соединяющие точки, лежащие на сторонах угла, не пересекают прямую a, т. е. не содержат точек, удаленных из R_Ω при построении R_1. Во втором варианте отрезок OF на луче OB угла AOB и точку D на стороне OA угла AOB, фигурирующие в определении II_4'' [1], можно выбрать так, чтобы при произвольной точке K на отрезке OF отрезок DK не пересекал прямую a. Тогда, в силу II_4', примененной к плоскости угла AOB, рассматриваемой как плоскость R_Ω, луч OC пересекает отрезок DK в некоторой точке G из R_Ω, которая будет также и точкой R_1, т. е. выполняется II_4''.

Проверим выполнимость в R_1 аксиомы III_1'. Возможны два случая: 1) прямая b', о которой идет речь в формулировке III_1', рассматриваемая как прямая R_Ω, не содержит точек, не принадлежащих R_1; 2) прямая b' содержит одну точку M, не принадлежащую R_1 (точку пересечения b' с исключительной прямой a). В первом случае для прямых b и b' выполняется аксиома III_1, ибо III_1 выполняется в R_Ω, а потому выполняется и III_1'. Во втором случае отрезок $A'B'$ на прямой b', конгурентный отрезку AB на прямой b, можно отложить по ту сторону точки A' на прямой b', которая не содержит точки M. Аксиомы III_{2-3} выполняются в R_1, так как они выполняются в R_Ω и не содержат никаких требований о существовании точек или отрезков.

Аксиома IV_1^* выполняется потому, что все треугольники модели R_1, плоскости которых в R_Ω параллельны прямой a, являются особыми, так как эти плоскости в R_Ω и в R_1 ничем не отличаются друг от друга. Треугольники компланарны в R_1, если их плоскости параллельны в R_Ω. Если плоскость α параллельна прямой a в R_Ω и плоскости β и γ параллельны плоскости α в R_Ω, то по крайней мере одна из плоскостей β или γ параллельна прямой a в R_Σ. Следовательно, по крайней мере один из двух треугольников, компланарных особому треугольнику, является особым, т. е. выполняется IV_3^*.

Докажем невыполнимость в R_1 аксиомы II_4^*. Предварительно докажем, что угол AOB, плоскости которого в R_Σ принадлежит прямая a, является нерегулярным в R_1, если стороны угла AO и BO пересекают прямую a в плоскости R_Σ. Пусть (рис. 5) AO и BO пересекают a соответственно в точках C и D. Возьмем на отрезке AB произвольную точку K. Тогда, по II_4' в плоскости R_Σ, луч OK пересекает отрезок CD в точке F. Пусть E — произвольная точка отрезка AC. По II_4 в плоскости R_Σ, примененной к треугольнику OKB, EF пересекает отрезок KB или OB в точке G. EF не может пересечь KB, так как E и G расположены по разные стороны от a в плоскости R_Σ, а потому G лежит на луче OB. Но в таком случае в модели R_1 луч OK пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла AOB в точке K и не пересекает отрезка EG с концами на сторонах того же угла, т. е. угол AOB не является регулярным.

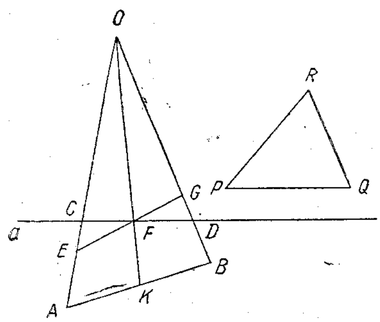

Рис. 5

Рассмотрим теперь в плоскости угла AOB (рис. 5) треугольник PQR, в котором в плоскости R_Σ сторона PQ параллельна a и вершина R расположена с прямой a по разные стороны от PQ. В треугольнике PQR углы при вершинах P и Q будут регулярными, так как они расположены по одну сторону от прямой a, а угол при вершине R, по доказанному, будет нерегулярным, т. е. для этого треугольника не будет выполняться II_4^*.

Докажем невыполнимость в модели R_1 аксиомы II_4^{**}. С этой целью рассмотрим плоскость α в R_Σ, пересекающую прямую a в точке M. В модели R_1 эта плоскость будет содержать все точки плоскости R_Σ, кроме точки M. Треугольник ABC в плоскости α, на продолжении одной из сторон которого лежит точка M, является регулярным, а треугольник $A_1B_1C_1$, расположенный в той же плоскости α, т. е. достижимый относительно треугольника ABC и такой, что точка M расположена внутри $A_1B_1C_1$, является нерегулярным, так как углы при всех трех его вершинах нерегулярны. Нерегулярность углов при вершинах треугольника $A_1B_1C_1$ следует из того, что внутри всех этих углов в плоскости R_Σ содержится точка M, не принадлежащая R_1, а при вышеизложенном доказательстве нерегулярности угла AOB было существенным лишь наличие внутри угла AOB в плоскости R_Σ точки F, не содержащейся в R_1. Следовательно, аксиома II_4^{**} не выполняется в R_1. Теорема 2 доказана.

Следствие. Аксиома II_4' независима от аксиом I_{1-8}, II_{1-3}, II_{5-7}, II_4'', III_1', III_{2-3}, IV_1^*, IV_3^*.

Доказательство. Аксиома II_4' невыводима из аксиом I_{1-8}, II_{1-3}, II_{5-7}, II_4'', III_1', III_{2-3}, IV_1^*, IV_3^*, так как из этих аксиом, по теореме 2, невыводима аксиома II_4^*, являющаяся частью аксиомы II_4'.

Доказательство теоремы 2 может быть проведено путем удаления из расширения R_Σ не идеальной прямой, а идеальной точки или идеальной плоскости. Все эти модели имеют ту общую особенность, что они строятся путем удаления из расширения R_Σ точек с нарушением однородности в отношении прямых и плоскостей.

Некоторая связь, обнаруженная между аксиомами II_4' и III_1, представляется естественной, так как обе аксиомы выражают свойство однородности прямых пространства в отношении упорядочения точек на этих прямых. Связь между упорядочением с помощью аксиом конгруентности и упорядочением с помощью аксиом порядка устанавливается аксиомой Архимеда [4], а потому в неархимедовых пространствах представляется возможным выполнение линейных аксиом конгруентности III_{1-3} в сочетании с нарушением аксиомы II_4'.

г. Калуга

Поступило
21 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы аксиоматики геометрии, относящиеся к независимости аксиом принадлежности, порядка и конгруентности, I. Изв. вузов, Матем., 1968, № 2, с. 75—84.
2. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы однородности и расширения пространства в связи с аксиоматикой Гильберта, II. Изв. вузов, Матем., 1963, № 4, с. 140—149.
3. Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. II. М., Гостехиздат, 1956.
4. Перлатов Г. Н. Некоторые вопросы аксиоматики, связанные с однородностью и расширением пространства. Автореф. канд. диссерт., М., 1965.