



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. V. Kislyakov, Quantitative aspect of correction theorems. II, *Žap. Nauchn. Sem. POMI*, 1994, Volume 217, 83–91

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

January 15, 2025, 08:44:56



С. В. Кисляков

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АСПЕКТ ТЕОРЕМ ОБ ИСПРАВЛЕНИИ. II

1. Как и в написанной довольно давно первой статье автора на ту же тему (см. [1]), речь здесь пойдет об оценках в классической теореме Меньшова, гласящей, что всякая измеримая функция изменением на множестве произвольно малой меры может быть превращена в функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье. Пусть \mathbb{T} – единичная окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, m – нормированная мера Лебега на \mathbb{T} . Обозначим через U пространство таких функций f на \mathbb{T} , что $\sum_{k \leq j \leq n} \hat{f}(j)z^j \rightarrow f$ равномерно по z , когда $n \rightarrow \infty$, а $k \rightarrow -\infty$. В U вводится естественная норма

$$\|f\|_U = \sup \left\{ \left| \sum_{k \leq j \leq n} \hat{f}(j)\zeta^j \right| : \zeta \in \mathbb{T}, k, n \in \mathbb{Z}, k \leq n \right\}.$$

Основной результат из [1] утверждает, что для любой функции F из $C(\mathbb{T})$ и любого ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, найдется такая функция G из U , что $m\{F \neq G\} \leq \varepsilon$ и $\|G\|_U \leq \text{const}(1 + \log \varepsilon^{-1})\|F\|_\infty$. В [1] отмечалось, что множитель $1 + \log \varepsilon^{-1}$ нельзя заменить ни на что, растущее при $\varepsilon \rightarrow \infty$ медленнее, поэтому тема казалась исчерпанной. Меня побудил вернуться к ней вопрос Б. С. Кашина: нельзя ли обеспечить еще и оценку $\|G\|_\infty \leq \text{const}\|F\|_\infty$ с постоянной, не зависящей от ε ? Оказалось, что можно не только добиться этого, но и получить другие существенные уточнения.

Теорема 1. Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$, $\delta > 0$, $F \in C(\mathbb{T})$, $E = \{t \in \mathbb{T} : F(t) \neq 0\}$. Тогда найдется такая функция G из U , что $|G| + |F - G| \leq (1 + \delta)|F|$, $m\{F \neq G\} \leq \varepsilon mE$ и $\|G\|_U \leq \text{const}(1 + \log \varepsilon^{-1})\|F\|_\infty$. Постоянная в последнем неравенстве универсальна (не зависит от $\varepsilon, \delta, F, E$ и т.п.).

Замечания. 1. Автору не известно, можно ли взять $\delta = 0$. Однако ввиду теоремы 2 в конце заметки число $\delta > 0$ можно рассматривать здесь как “плату за непрерывность”.

2. Доказательство даст функцию G , для которой отношение $G/|F|$ лежит в $C(\mathbb{T})$ (считаем, что $0/0 = 0$).

3. Если утверждение теоремы 1 справедливо хотя бы при одном $\varepsilon < 1$, то итерациями нетрудно восстановить логарифмическую

оценку в полном объеме. Иными словами, уточнения в сравнении с [1] столь велики, что “центр тяжести” сильно сместился в их сторону.

Изложенное ниже доказательство теоремы 1 в общем плане повторяет схему рассуждений из [1]. В основе всего, как и в [1], лежит теорема Карлесона о сходимости п.в. рядов Фурье функций из L^2 . Доказательство существования функции G неконструктивно — как и в [1], используется линейная двойственность. Технические детали, однако, несколько более тяжелы, чем в [1] — как раз в той степени, что автор посчитал оправданным написание заметки. Был и еще один побудительный мотив: насколько может судить автор, ни одно из прочих известных сейчас доказательств теоремы Меньшова не ведет к оценке $\|G\|_\infty \leq \text{const} \|F\|_\infty$ (после исправления равномерная норма оказывается примерно того же порядка, что и оценка сверху для U -нормы).

Настоящую заметку можно читать независимо от [1].

2. Основной этап доказательства теоремы 1 — это следующая лемма. В ней об η нужно думать как о “большом” числе, а о ρ — как о “малом”.

Лемма 1. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, $\|f\| \leq 1$, $B = \{f \neq 0\}$, $\eta > 0$, $\rho > 0$. Тогда функцию f можно представить в виде $f = g + h$, где $g \in U$, $\|g\|_U \leq \eta$, $|g| + |h| \leq (1 + \rho)|f|$, и справедлива оценка

$$\left(\int |h|^2 |f|^{-2} dm \right)^{1/2} \leq C_1 (mB)^{1/2} \exp(-\eta/C_2) \quad (1)$$

(C_1 и C_2 — универсальные постоянные).

Отложив ненадолго доказательство этой леммы, выведем из нее теорему 1 (ср. с § 2 в [1]). О функции F из этой теоремы мы предположим, что $\|F\|_\infty \leq 1$ (это не ограничивает общности). Лемма 1 будет применяться многократно, но всякий раз к функции f , удовлетворяющей неравенству $|f| \leq |F|$. В таком случае функция ω ,

$$\omega(\eta) = C_1 (mE)^{1/2} \exp(-\eta/C_2),$$

мажорирует правую часть в (1) (напомним, что $E = \{F \neq 0\}$).

Для начала мы зафиксируем две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$ и $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$, $\varepsilon_0 = 1$, и построим три последовательности непрерывных функций $\{G_n\}_{n \geq 0}$, $\{H_n\}_{n \geq 0}$, $\{I_n\}_{n \geq 0}$ и последовательность открытых множеств $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$, обладающие следующими свойствами:

- (а) $G_0 = I_0 = 0$;
 (б) $F = G_n + H_n + I_n$, $|G_n| + |H_n| + |I_n| \leq (1 + (1 - 2^{-n-1}\delta))|F|$;
 (в) $|H_n| \leq \varepsilon_n|F|$, $\text{supp } I_n \subset A_n \subset E$;
 (г) $\|G_{n+1} - G_n\|_U \leq \eta_n$;
 (д) $m(A_{n+1} \setminus A_n) \leq \left(\frac{\varepsilon_n \omega(\frac{\eta_n}{\varepsilon_n})}{\varepsilon_{n+1}}\right)^2$.

Построение. Положим $H_0 = F$, тогда при $n = 0$ утверждение (б) выполняется в силу (а), а утверждение (в) — поскольку $\varepsilon_0 = 1$. О (г) и (д) на нулевом шаге нет речи, поскольку в этих утверждениях участвуют функция G_1 и множество A_1 , которых пока еще нет.

Пусть теперь для некоторого k построены функции G_0, \dots, G_k , H_0, \dots, H_k , I_0, \dots, I_k и множества A_0, \dots, A_k , причем утверждения (б) и (в) выполняются при $n \leq k$, а (г) и (д) — при $n \leq k-1$. Применив лемму 1 к функции $\varepsilon^{-1}H_k$ в качестве “ f ” и числу $\varepsilon^{-1}\eta_k$ в качестве “ η ”, мы получим

$$H_k = g + h, \quad \text{где } g \in U, \|g\|_U \leq \eta_k, |g| + |h| \leq (1 + \rho)|H_k|,$$

$$\left(\int |h|^2 |F|^{-2} dm\right)^{1/2} \leq \varepsilon_k \omega(\eta_k \varepsilon_k^{-1})$$

(функция F появилась в интеграле в последнем неравенстве в силу (в) для $n = k$). Пусть $e = \{|h| > \varepsilon_{k+1}|F|\}$ (так что $e \subset E$). Положим $A_{k+1} = A_k \cup e$, $H_{k+1} = h|h|^{-1} \min(|h|, \varepsilon_{k+1}|F|)$, $I_{k+1} = I_k + (h - H_{k+1})$, $G_{k+1} = G_k + g$. Тогда (г) и (д) выполняются для $n = k$: (г) потому, что $\|g\|_U \leq \eta_k$, а (д) потому, что $me \leq \varepsilon_{k+1}^{-2} \int_e |h|^2 |F|^{-2} \leq (\varepsilon_k \varepsilon_{k+1}^{-1} \omega(\eta_k \varepsilon_k^{-1}))^2$. Поскольку функция $h - H_{k+1}$ сосредоточена на множестве e , мы получаем, что $\text{supp } I_{k+1} \subset A_{k+1}$, а неравенство $|H_{k+1}| \leq \varepsilon_{k+1}|F|$ справедливо по построению. Таким образом, проверено утверждение (в) для $n = k+1$. В утверждении (б) для $n = k+1$ сомнение может вызвать лишь неравенство. Но легко видеть, что $|h - H_{k+1}| = |h| - |H_{k+1}|$, поэтому

$$|G_{k+1}| + |H_{k+1}| + |I_{k+1}| \leq |G_k| + |I_k| + |g| + |h - H_{k+1}| + |H_{k+1}| \leq$$

$$\leq |G_k| + (1 + \rho)|H_k| + |I_k| \leq (1 + (1 - 2^{-k-1}\delta))|F| + \rho|H_k|.$$

Поскольку $|H_k| \leq \varepsilon_k|F|$, нужной оценки можно добиться, выбрав с самого начала ρ достаточно малым. Наконец, заметим, что $H_{k+1} \in C(\mathbb{T})$. Шаг индукции завершен.

Теперь конкретизируем последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\eta_n\}$: выберем $\eta_n = K2^{-n}$ (число K , $K > 0$, может быть любым), $\varepsilon_n = 4^{-n}$. Из (г) следует, что последовательность $\{G_n\}$ сходится в U , и для

её предела G справедлива оценка $\|G\|_U \leq 2K$. Из (6) получается, что $|G_n| + |F - G_n| \leq (1 + \delta)|F|$, что в пределе даёт неравенство $|G| + |F - G| \leq (1 + \delta)|F|$. Поскольку $H_n \rightarrow 0$ равномерно, а все функции I_n сосредоточены на множестве $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$, из равенства $F = G_n + H_n + I_n$ следует, что $G = F$ на $\mathbb{T} \setminus A$. Наконец, в силу (д)

$$mA \leq mE \left[4C_1^2 \sum_{n \geq 0} \exp(-C_2^{-1} K 2^n) \right].$$

При $K \geq 1$ выражение в квадратных скобках мажорируется величиной $C \exp(C_2^{-1} K)$ с некоторой универсальной постоянной C (ибо члены ряда убывают быстрее геометрической прогрессии). Вместе с уже полученной оценкой $\|G\|_U \leq 2K$ это даёт все, что нужно. •

3. Осталось доказать лемму 1. Для этого понадобятся некоторые сведения о функционалах на пространстве U . Пусть $P_r(z)$ ($z \in \mathbb{T}$, $0 \leq r < 1$) — ядро Пуассона, $\Phi \in U^*$. При каждом фиксированном ζ , $\zeta \in \mathbb{T}$, функция $z \mapsto P_r(\zeta - z)$ лежит в U , поэтому определена свертка $(P_r * \Phi)(\zeta) = \Phi(P_r(\zeta - z))$. Из основного результата статьи [2] вытекает, что почти всюду на окружности существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (P_r * \Phi)(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_*(\zeta).$$

Сходимость имеет место также и в L^p , $0 < p < 1$. Кроме того, равномерно по $r < 1$

$$m\{|P_r * \Phi| > \lambda\} \leq c\lambda^{-1} \|\Phi\|_{U^*}, \quad \lambda > 0,$$

где c — универсальная константа. В частности,

$$m\{|\Phi_*| > \lambda\} \leq c\lambda^{-1} \|\Phi\|_{U^*} \quad (2)$$

и

$$\left(\int |\Phi_*|^p dm \right)^{1/p} \leq c_p \|\Phi\|_{U^*}, \quad 0 < p < 1. \quad (3)$$

(Заметим, что именно в перечисленных результатах скрывается использование теоремы Карлесона).

Каждая конечная мера μ задаёт естественным образом линейный непрерывный функционал Φ_μ на \mathbb{T} :

$$\Phi_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu, \quad f \in U.$$

Ясно, что $(\Phi_\mu)_*$ совпадает с плотностью абсолютно непрерывной части меры μ . Пусть U_a^* — это замыкание множества всех функционалов вида $\Phi_{\alpha m}$, $\alpha \in L^1(m)$, по норме пространства U^* . Известно (см., например, обзорную статью [4]), что каждый функционал Φ из U^* однозначно раскладывается в сумму $\Phi = \Phi^a + \Phi^s$, где $\Phi^a \in U_a^*$, а $\Phi^s = \Phi_\mu$ для некоторой сингулярной меры μ ; при этом $\|\Phi\| = \|\Phi^a\| + \|\Phi^s\|$. Очевидно, что $\Phi_* = \Phi_*^a$.

Пусть β — функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Умножение на β есть непрерывный оператор из U в U ; обозначим его через T_β .

Лемма 2. Для любого функционала Φ из U^* имеем $(T_\beta^* \Phi)_* = \beta \Phi_*$.

Доказательство. Запишем как выше $\Phi = \Phi^a + \Phi^s$. Так как $(\Phi^s)_* = (T_\beta^* \Phi^s)_* = 0$, лемму достаточно доказать для Φ из U_a^* . Более того, так как в силу (3) отображение $\Phi \mapsto \Phi_*$ задает непрерывный оператор из U^* в L^p , $0 < p < 1$, достаточно проверить утверждение леммы на каком-нибудь плотном в U_a множестве. Но оно очевидно для функционалов вида $\Phi_{\alpha m}$, где $\alpha \in L^1$. •

Теперь приступим непосредственно к доказательству леммы 1. Существует сколь угодно малые положительные α , для которых $m\{|f| = \alpha\} = 0$ (но последнее равенство может нарушаться лишь для не более чем счетного множества значений α). Зафиксировав α с $m\{|f| = \alpha\} = 0$, положим $V = \{|f| > \alpha\}$. Замыкание открытого множества V содержится в E и $m\partial V = 0$.

Мы проверим, что существуют такие функции g , $g \in U$, и ψ , $\psi \in C(\bar{V})$, что $g|_{(\mathbb{T} \setminus V)} = 0$, $f|_{\bar{V}} = g|_{\bar{V}} + \psi$, $|g| + |\psi| \leq (1 + \rho)|f|$ на множестве \bar{V} и справедливы оценки

$$\|g\|_U \leq \eta, \quad \left(\int_{\bar{V}} |\psi|^2 |f|^2 dm \right)^{1/2} \leq C_1 (m\bar{V})^{1/2} \exp(-\eta/C_2)$$

(C_1 и C_2 не зависят от f , η и α). Пусть это сделано. На границе ∂V функция ψ совпадает с f , поэтому функция h , равная f на $\mathbb{T} \setminus V$ и ψ на \bar{V} , непрерывна. Ясно, что $|g| + |h| \leq (1 + \rho)|f|$ всюду (ибо g вне V обращается в ноль). Если α достаточно мало, то мера множества $E \setminus V$ мала. Поэтому разность интегралов

$$\int_E |h|^2 |f|^{-2} dm \quad \text{и} \quad \int_V |\psi|^2 |f|^{-2} dm$$

можно сделать сколь угодно малой, и мы приходим к оценкам из формулировки леммы 1.

Таким образом, лемма 1 следует из приведенного выше утверждения, и осталось доказать его. Это будет сделано с использованием линейной двойственности. Пусть $U_0 = \{g \in U : g|_{(T \setminus V)} = 0\}$. Это — замкнутое подпространство в U . В прямой сумме $X_1 = U_0 \oplus L^2(\bar{V})$ введем норму, единичный шар B_1 которой совпадает с множеством $\{(g, \psi) : \|g\|_U \leq \eta, (\int_{\bar{V}} |\psi|^2 |f|^{-2} dm)^{1/2} \leq t\}$. Рассмотрим еще пространство X_2 , равное как множество прямой суммы $C(\bar{V}) \oplus C(\bar{V})$, но с нормой, единичный шар B_2 которой есть $\{(g, \psi) : |g| + |\psi| \leq |f|\}$. Поскольку на \bar{V} функция $|f|$ отделена от нуля, X_1 и X_2 — банаховы пространства. Пусть $X = X_1 \cap X_2$ (шар пространства X есть $B_1 \cap B_2$). Пространство $C(\bar{V})$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x(t)|/|f(t)| : t \in \bar{V}\}$ обозначим через Y . Тогда норма оператора $T : X \rightarrow Y$, $T(g, \psi) = g + \psi$, не превосходит единицы.

Лемма 1'. Если в определении шара B_1 положить

$$t = C_1(mV)^{1/2} \exp(-\eta/C_2)$$

с подходящими универсальными постоянными C_1 и C_2 , то оператор T^* будет изометрическим вложением.

Из леммы 1' следует нужное нам утверждение, ибо если T^* — изометрическое вложение, то для любого $\rho > 0$ множество $T((1 + \rho)B)$ содержит единичный шар пространства Y , а, значит, и функцию $f|_{\bar{V}}$.

Доказательство Леммы 1'. Каждый функционал F на пространстве Y задается некоторой борелевской мерой ν на \bar{V} по формуле $x \mapsto \int x |f|^{-1} d\nu$, при этом $\|F\| = \|\nu\|$. Нам надо проверить, что $\|F\| \leq \|T^*F\|$ (обратное неравенство очевидно). Без ограничения общности считаем, что $\|T^*F\| = 1$. Рассмотрев естественное изометрическое вложение $X \rightarrow X_1 \oplus X_2$, $x \mapsto (x, x)$ (за норму в $X_1 \oplus X_2$ берется функция $\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$) и дважды применив теорему Хана-Банаха, мы найдем, что

$$\langle (g, \psi), T^*F \rangle = \frac{1}{\eta} \Phi(g) + \frac{1}{t} \int_{\bar{V}} \psi u dm + \langle (g, \psi), \Gamma \rangle,$$

где $\Phi \in U^*$, $\Gamma \in X_2^*$, а u — функция, при этом

$$1 = \|T^*F\| = \|\Phi\|_{U^*} + \left(\int_{\bar{V}} |u|^2 |f|^2 \right)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2^*}. \quad (4)$$

Функционал Γ задается парой мер (λ_1, λ_2) на \bar{V} :

$$\langle (g, \psi), \Gamma \rangle = \int_{\bar{V}} g|f|^{-1} d\lambda_1 + \int_{\bar{V}} \psi|f|^{-1} d\lambda_2,$$

при этом

$$\|\Gamma\|_{X_2} = \text{var}(|\lambda_1| \vee |\lambda_2|) \quad (5)$$

(\vee – операция взятия верхней грани в решетке мер).

Окончательно, для меры ν , порождающей функционал F , получаем формулу

$$\int_{\bar{V}} (g + \psi)|f|^{-1} d\nu = \frac{1}{\eta} \Phi(g) + \frac{1}{t} \int_{\bar{V}} \psi u dm + \int_{\bar{V}} g|f|^{-1} d\lambda_1 + \int_{\bar{V}} \psi|f|^{-1} d\lambda_2,$$

верную для (g, ψ) из X .

Взяв в этой формуле $g = 0$, придем к равенству

$$d\nu = \frac{1}{t} u|f| dm + d\lambda_2. \quad (6)$$

Теперь положим $\psi = 0$, а в качестве g подставим функцию βP_r , где P_r – ядро Пуассона, β – функция класса C^∞ с компактным носителем, лежащая в V (βP_r , разумеется, лежит в U_0). Устремив r к 1, получим ввиду Леммы 2

$$|f|^{-1} \beta x = \frac{1}{\eta} \beta \Phi_* + |f|^{-1} y \quad \text{п.в. на } V$$

(x и y – плотности абсолютно непрерывных частей мер ν и λ_2). Варьируя носитель функции β и вспоминая, что $m\partial V = 0$, находим

$$x = \frac{1}{\eta} |f| \Phi_* + y \quad \text{п.в. на } \bar{V}. \quad (7)$$

Пусть $W \subset \bar{V}$ – борелевское множество меры нуль, такое что сингулярная часть меры ν сосредоточена на W . Пусть $\lambda > 0$ (выбор этого числа уточним несколько позже). Положим $e = \{\zeta \in \bar{V} : |\Phi_*(\zeta)| > \lambda\}$. Ввиду оценки (2) имеем $me \leq c\lambda^{-1} \|\Phi\|_{U_*}$. Очевидно, $\|\nu\| = \int_{e \cup W} d\nu + \int_{\bar{V} \setminus (e \cup W)} |x| dm$. Воспользовавшись в первом интеграле формулой (6), а во втором – формулой (7), получим, учитывая, что $|f| \leq 1$:

$$\|\nu\| \leq \frac{1}{t} \int_e |u| |f| dm + \int_{e \cup W} d|\lambda_2| + \int_{\bar{V} \setminus (e \cup W)} |y| dm + \frac{1}{\eta} \int_{\bar{V} \setminus e} |\Phi_*| dm.$$

К первому интегралу в правой части применим неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \int_e |u||f| dm &\leq (me)^{1/2} \left(\int |u|^2 |f|^2 dm \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\frac{c\|\Phi\|_{U^*}}{\lambda} \right)^{1/2} \left(\int |u|^2 |f|^2 dm \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Сумма следующих двух интегралов мажорируется числом $\int_{\bar{V}} d(|\lambda_1| \vee |\lambda_2|)$ (поскольку они взяты по дизъюнктивным множествам, а y — плотность абсолютно непрерывной части меры λ_1). В силу (5) это число есть $\|\Gamma\|_{X_2}$. Чтобы оценить последний интеграл, введем функцию распределения $\alpha(\tau) = m\{\zeta \in \bar{V} \setminus e : |\Phi_*(\zeta)| > \tau\}$, тогда $\alpha(\tau) \leq c\tau^{-1}\|\Phi\|_{U^*}$ в силу (2), $\alpha(\tau) = 0$ при $\tau > \lambda$ и $\alpha(\tau) \leq mV$ при всех τ . Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{V \setminus e} |\Phi_*| dm &= \int_0^\lambda \alpha(\tau) d\tau \leq \int_0^\varepsilon mV d\tau + c\|\Phi\|_{U^*} \int_\varepsilon^\lambda \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \varepsilon mV + c\|\Phi\|_{U^*} \log(\lambda\varepsilon^{-1}). \end{aligned}$$

Минимум последнего выражения достигается при $\varepsilon = c\|\Phi\|_{U^*}/mV$ (таким образом, при выборе числа λ нужно будет следить за тем, чтобы оно было больше $c\|\Phi\|_{U^*}/mV$).

Собрав оценки вместе, получим

$$\begin{aligned} \|\nu\| &\leq \frac{1}{\eta} c\|\Phi\|_{U^*} \left(1 + \log \frac{\lambda mV}{c\|\Phi\|_{U^*}} \right) + \\ &+ \frac{1}{t} \left(\frac{c\|\Phi\|_{U^*}}{\lambda} \right)^{1/2} \left(\int |u|^2 |f|^2 dm \right)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2}. \end{aligned}$$

Число λ выберем так, чтобы коэффициент при $\|\Phi\|_{U^*}$ в первом члене справа стал равен 1:

$$\frac{\lambda mV}{c\|\Phi\|_{U^*}} = \exp\left(\frac{\eta}{c} - 1\right).$$

(При $\eta > c$, разумеется, будет $\lambda > c\|\Phi\|_{U^*}/mV$, как и требовалось). Тогда

$$\|\nu\| \leq \|\Phi\|_{U^*} + \frac{(mV)^{1/2}}{t} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta}{2c}\right) \left(\int_{\bar{V}} |u|^2 |f|^2 dm \right)^{1/2} + \|\Gamma\|_{X_2},$$

и в силу (4) при $t = (mV)^{1/2} \exp(\frac{1}{2} - \eta/2c)$ получается $\|\nu\| \leq 1$, как и требовалось.

В заключении приведем вариант теоремы 1, который может быть доказан близкими рассуждениями (особенно похожи вычисления; сопровождающие их слова отличаются существенной). Пусть U^∞ — пространство таких функций f , для которых частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k \leq j \leq n} \hat{f}(j) \zeta^j$ равномерно ограничены (оно снабжено естественной нормой).

Теорема 2. Пусть $F \in L^\infty(\mathbb{T})$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $E = \{t \in \mathbb{T} : F(t) \neq 0\}$. Тогда найдется такая функция G из U^∞ , что $|G| + |F - G| \leq |F|$ п.в., $m\{F \neq G\} \leq \varepsilon mE$ и $\|G\|_U \leq \text{const}(1 + \log \varepsilon^{-1}) \|F\|_\infty$, с некоторой универсальной постоянной const .

Число " δ " из теоремы 1 здесь исчезает, поскольку в новой ситуации оператор, соответствующий оператору T из Леммы 1', сам окажется сопряженным (к изометрическому вложению). Еще одно существенное отличие состоит в том, что, вообще говоря, а priori неясно, есть ли в пространстве U^∞ хотя бы одна функция, обращающаяся в нуль на $\mathbb{T} \setminus E$ (а в доказательстве теоремы 1 такие функции были предъявлены и существенно использованы — это произведения βP_r). Впрочем, способы борьбы с этой трудностью хорошо известны, см., например, лемму п.2 в [3]. Мы опускаем детали.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ 92 (1979), 182–191.
2. С. А. Виноградов, *Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов*. — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР 130 (1981), 7–40.
3. S. V. Khrushchev (Hruščev), S. A. Vinogradov, *Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series*. — Lecture Notes Math. 864 (1981), 171–213.

Kislyakov S. V. Quantitative aspect of correction theorems. II.

Let $0 < \varepsilon \leq 1$, $F \in C(\mathbb{T})$, $E = \{F \neq 0\}$, $\delta > 0$. Then there exists a function G with uniformly convergent Fourier series such that $|G| + |F - G| \leq (1 + \delta)|F|$, $m\{F \neq G\} \leq \varepsilon mE$, and $\sup\{|\sum_{k \leq j \leq l} \hat{G}(j) \zeta^j| : \zeta \in \mathbb{T}, k \leq l\} \leq \text{const} \|F\|_\infty (1 + \log \varepsilon^{-1})$.