В. Н. Чубариков, Многомерные проблемы теории простых чисел,
Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 4, 174–263

https://www.mathnet.ru/cheb118

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.3

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

В. Н. Чубариков (г. Москва)

СОДЕРЖАНИЕ

[1] Данная статья подготовлена по материалам докторской диссертации, которую В. Н. Чубариков выполнил в 1985г. в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Обозначения

$c, c_1, c_2, \cdots$ — положительные абсолютные постоянные.

$c(a, b, \ldots, d)$ — некоторое положительное число зависящее от $a, b, \ldots, d$.

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – сколь угодно малые положительные постоянные величины.

Используются устоявшиеся обозначения для теоретико – числовых функций. $n, l, m, r, n_1, \ldots, n_r$ – натуральные числа;

$m = (n_1 + 1) \ldots (n_r + 1)$;

Ω – единичный m – мерный куб.

Штрих в знаках сумм означает, что на переменные суммирования накладываются некоторые ограничения, обычно это условия взаимной простоты значений этих переменных с некоторым целым числом. Нумерация формул в каждой главе своя.

$\{x\}$ – дробная часть числа x.

$p, p_1, \ldots, p_{11}, \ldots, p_{1r}, \ldots$ – простые числа.

При цитировании нумерация формул берется в квадратные скобки, например [(17)].

При положительном B записи $A \ll B$, $A = O(B)$ означают, что $|A| \leqslant cB$.

$\|x\| = \min\Big(\{x\}, 1 - \{x\}\Big)$ – расстояние до ближайшего целого числа.

Введение

Многомерными проблемами теории простых чисел мы называем проблемы аналитической теории чисел, которые, в основном, сводятся к изучению кратных тригонометрических сумм с простыми числами, то есть сумм вида

$$S = \sum_{p_1 \le P_1} \ldots \sum_{p_r \le P_r} \exp 2\pi i t F(p_1, \ldots p_r), \tag{1}$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}, \tag{2}$$

$\alpha(t_1, \ldots, t_r)$ – действительные числа, $(p_1, \ldots p_r)$ — простые числа.

Эти проблемы являются конкретной реализацией задачи установления различного рода закономерностей распределения значений функций от нескольких переменных, определенных на дискретном множестве - одной из центральных задач теории чисел. Подобный взгляд на задачу изучения закономерностей поведения функций данного типа выражен И. М. Виноградовым во Введении к монографии “Метод тригонометрических сумм в теории чисел”. Далее И. М. Виноградов пишет: *“Из весьма разнообразных более частных видов этой в столь общей формулировке поставленной проблемы*[1]*, получаемых при тех или иных ограничениях, налагаемых как на функцию $f(x_1,\dots,x_r)$ так и на совокупность Ω*[2]*, мы выделим три достаточно большие и весьма важные для теории чисел проблемы”* (см. [2], стр.5).

1. Весьма важной является проблема распределения значений показательной функции

$$f(x_1,\dots,x_r)=e^{2\pi i F(x_1,\dots,x_r)},$$

где $F(x_1,\dots,x_r)$ – вещественная функция; наиболее существенным в этой проблеме является установление верхней границы модуля суммы

$$S=\sum_{\Omega} f(x_1,\dots x_r)=\sum_{\Omega} e^{2\pi i F(x_1,\dots,x_r)}$$

всех значений $f(x_1,\dots x_r)$ в том случае, когда число T точек совокупности Ω конечно (см. [2] , стр.5).

2. С рассмотренной проблемой 1 самым тесным образом связана проблема распределения значений дробной части

$$f(x_1,\dots x_r)=\{F(x_1,\dots x_r)\}$$

вещественной функции $F(x_1,\dots x_r)$ (см.[2], стр.13).

3. Особый интерес представляет законы распределения значений функции $f(x_1,\dots x_r)$, принимающей для точек $x_1,\dots x_r$ совокупности Ω целочисленные значения. Здесь в отношении каждого данного целого N возникает вопрос: для скольких точек совокупности Ω это N будет служить значением функции $f(x_1,\dots x_r)$; иными словами: каково будет число $I(N)$ решений неопределенного уравнения

$$f(x_1,\dots x_r)=N. \qquad [(17)]$$

[1]т.е. задачи распределения значении функции.

[2]т.е. область определения функции $f(x_1,\dots,x_r)$.

В некоторых случаях здесь речь идет только об установлении неравенства $I(N) > 0$, показывающего, что уравнении [(17)] разрешимо; в других случаях оказывается возможным установить для $I(N)$ асимптотическую формулу; наконец иногда вопрос сводится о разыскании точного выражения для $I(N)$, и т.д. см. [2], стр. 15.

Следует отметить, что вообще говоря, сформулированные И. М. Виноградовым проблемы 1,2,3, представляют интерес в том случае когда $f(x_1, \ldots x_r)$ и Ω несут в себе те или иные арифметические свойства. Выбирая соответствующим образом функцию $f(x_1, \ldots x_r)$ и область Ω, мы приходим к таким классическим задачам, как проблемы Гольдбаха, Варинга, Гольдбаха-Варинга, Гильберта-Камке, оценки сумм Г. Вейля и т.д.

В данной диссертации мы изучаем проблемы 1 и 2 в случае, когда функция $F(x_1, \ldots x_r)$ является многочленом с произвольной действительными коэффициентами и координаты x_s, $1 \leq s \leq r$ совокупности Ω точек $(x_1, \ldots x_r)$ пробегают значения последовательных простых чисел. Проблема 3 исследуется в случае, когда $f(p_1, \ldots p_r) = (f_1, \ldots, f_r)$ является вектор-функцией вида

$$f_s = f_s(p_1, \ldots p_r) = p_1^s + \ldots + p_r^s, \quad 1 \leq s \leq n$$

(проблема Гильберта-Камке в простых числах);
также вектор-функцией вида

$$F_{t_1,\ldots,t_r}(p_{11}, \ldots, p_{1r}, \ldots, p_{1k}, \ldots, p_{rk}) = F_{t_1,\ldots,t_r}(p) = \\ = \sum_{j=1}^{k} p_{1,j}^{t_1} \ldots p_{r,j}^{t_r} \quad (0 \leq t_1 \leq n_1, \ldots, 0 \leq t_r \leq n_r, t_1 + \ldots + t_r \geq 1)$$

(многомерная аддитивная задача с простыми числами).

Первый этап наших исследований состоит оценки в оценке тригонометрических сумм с простыми числами, то есть оценки при $r = 1$ сумма S становится однократной тригонометрической суммой с простыми числами. Оценки однократных сумм с простыми числами впервые получены И. М. Виноградовым в 1937 г. Для оценки сверху модуля такой суммы И. М. Виноградов сводит ее к небольшому количеству двойных сумм W,

$$W = \sum_d \xi(d) \sum_m \eta(m) \exp 2\pi i F(md).$$

Схема И. М. Виноградова оценки величин W и более общих сумм S вида

$$S = \sum_x \sum_j \exp 2\pi i f(x, j), \tag{3}$$

где неизвестные x и y пробегают некоторую последовательность натуральных чисел, изменяющихся в пределах соответственно от $M+1$ до $M+X$ и от $N+1$

до $N+Y$ таковы. Применяя неравенство Коши, получим

$$|S|^2 \leq X \sum_{v=N+1}^{N+Y} \sum_{v_1=N+1}^{N+Y} T(v, v_1),$$

где

$$T = T(v, v_1) = \sum_{u=M+1}^{M+X} e^{2\pi i \varphi(u)}, \quad \varphi(u) = \varphi(u, v) - \varphi(u, v_1)$$

переменная u пробегает все целые числа от $M+1$ до до $M+X$ (“метод сглаживания”). В тех случаях, когда для однократной суммы $T = T(v, v_1)$ при любых фиксированных значениях v, v_1 известны удовлетворительные оценки, таким способом можно получить нетривиальную оценку суммы (3) и, сумм с простыми числами. В частности, если $F(x)$ многочлен то оценка сумм с простыми числами сводится к оценке сумм Г. Вейля.

Подобным образом решение проблемы об установлении верхней границы модуля кратных тригонометрических сумм с простыми числами связана с исследованиями по теории кратных тригонометрических сумм, созданной А. А. Карацубой и его школой (см. [47]-[67]).

В настоящей работе путем двукратного применения метода мы сводим оценку суммы (1) к оценке кратной тригонометрической суммы W, переменные суммирования в которой пробегают сплошные промежутки целых значений:

$$W = \sum_{x_1=1}^{P_1} \sum_{x_2=1}^{P_2} \ldots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp 2\pi i t F(x_1, x_2 \ldots x_r)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \ldots x_r) =& F_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) - F_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) - \\ & - F_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, a_r) - F_1(a_1, \ldots, a_{r-1}, x_r), \\ F_1(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) =& \sum_{t_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{\substack{t_{r-1}=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_{r-1}} \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_{r-1}^{t_{r-1}} x_r^{t_r} \end{aligned}$$

где $a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ – некоторые фиксированные целые числа. Коэффициенты при одночленах $x_1^{t_1} \ldots x_{r-1}^{t_{r-1}} x_r^{t_r}$ $t_1 + \ldots + t_{r-1} \geq 1$, $t_r \geq 1$, у многочленов $F(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r)$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r)$ совпадают; это и позволяет применить оценки кратных тригонометрических сумм, найденные в статье [61].

Важно отметить, что в случае, когда длины промежутков изменения одних переменных существенно отличаются от длин промежутке: изменения других переменных, а также если коэффициенты при одночленах $p_1^{t_1} \ldots p_{r-1}^{t_{r-1}} p_r^{t_r}$, $t_1 + \ldots + t_{r-1} \geq 1$ $t_r \geq 1$ близки к рациональным числам с малыми знаменателями, то кратные тригонометрические суммы с простыми числами буд по существу, суммами меньшей кратности и тогда имеющихся оценок сумм W недостаточно для нетривиальной оценки суммы S. В этом случае сумму S мы оцениваем методом, близким к методу работы [63].

Изложенная выше схема рассуждений позволяет получать также оценки кратных тригонометрических сумм, в которых переменные суммирования пробегают произвольные последовательности цели чисел. Для нетривиальной оценки таких сумм, вообще говоря, достаточно,чтобы последовательность была “густой”, имела “небольшую” кратность повторения своих членов и, кроме того, нетривиально оценивалась соответствующая однократная тригонометрических сумма. Следует подчеркнуть,что и в этом случае существенным моментом в рассуждениях является использование результатов теории кратных тригонометрических сумм (см.[61],[63]).

Проблема 2 в нашей постановке, т.е. задача о распределении значений дробной части функции $F(p_1, \ldots, p_r)$ применением леммы И. М. Виноградова “о стаканчиках” сводится к рассмотренной выше проблеме.

По проблеме 3 мы, как было отмечено выше, рассматриваем здесь две задачи. Первая — это вопрос о количестве представлений системы натуральных чисел $N_n, \ldots, N_1$ в виде

$$\begin{cases} N_n = p_1^n + \ldots + p_r^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_1 = p_1 + \ldots + p_r, \end{cases} \tag{4}$$

где $(p_1, \ldots, p_r)$ – простые числа, то есть проблема Гильберт Камке в простых числах. Исследованием этой задачи занимались К. К. Марджанишвили и Хуа Ло-кен (см.[12]). Вывод асимптотической формулы для числа решений системы (4) были посвящены работы К. К. Марджанишвили [32] и главы X и XI монографии Хуа Ло-кена [44]. Однако вопрос о нетривиальности этой асимптотической формулы, а вместе с тем и о наличии самих представлений до последнего времени оставался открытым. В диссертации мы решаем этот вопрос. Кроме того, получаем следующие оценки сверху и снизу для наименьшего числа слагаемых r в представлении (4), начиная с которого асимптотическая формула будет нетривиальна:

$$2^n - 1 \le r \le n^3 2^{2n+20}.$$

Вторую задачу, связанную с проблемой 3, мы называем многомерной аддитивной задачей в простых числах.

Она формулируется так. Требуется установить при растущих значениях правых частей $\overline{N}$ нетривиальную асимптотическую формулу для числа решений $I(\overline{N})$ системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} p_{1,j}^{t_1} \ldots p_{r,j}^{t_r} = N(t_1, \ldots, t_r), \tag{5}$$

$$(0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \ldots + t_r \ge 1)$$

в простых числах $p_{s,j}$, $1 \le s \le r$, $1 \le j \le k$, справедливую для всех $k \ge k_0$ и при возможно меньшем значении k_0.

Постановка подобных аддитивных задач содержится в [58].

В настоящей работе установлена асимптотическая формула для величины $I(\overline{N})$ и для величины k_0 получены оценки

$$2^l - 1 \le k_0 \le rmn^5 2^{4(n+r)},$$

где $l = \max(n_1, \dots, n_r)$, $n = n_1 + \ldots, +n_r$, $m = (n_1 + 1)\ldots, (n_r + 1)$.

В диссертации найдены также необходимые и достаточные условия двух типов для разрешимости системы уравнений (5). Первые условия связаны с разрешимостью некоторых линейных систем сравнений по модулям, равным степеням простых чисел. Другие условия, так называемые условия порядка, связаны с рангом матрицы Якоби, соответствующей решению в действительных числах некоторой системы уравнений.

В настоящей диссертации мы используем метод И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм с простыми числами, “метод сглаживания”, “круговой метод” Харди–Литтлвуда–Рамануджана в форме тригонометрических сумм, методы и результаты теории кратных тригонометрических сумм [38], а также основные идеи работ К. К. Марджанишвили [32], Хуа Ло-кена [44], А. А. Карацубы [18],[22] и Г. И. Архипова [48], примененные ими к решению аддитивных задач теории чисел.

Основные результаты диссертации полностью опубликованы в работах автора [67] – [75]. Мы используем также результаты совместных работ [53] – [66]. История и обзор результатов по проблемам, близким к теме исследования настоящей диссертации содержатся в монографиях [4], [22], [45].

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Первая глава “Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами” содержит вывод оценок сумм с многочленом общего вида в экспоненте.

Вторая и четвертая главы содержат приложения результатов первой главы. Во второй главе получены теоремы о распределении дробных долей многочленов от нескольких переменных, каждая из которых пробегает последовательные значения простых чисел. В четвертой главе выводится асимптотическая формула для числа решений системы уравнений в многомерной аддитивной задаче с простыми числами и даются необходимые и достаточные условия, при которых эта формула нетривиальна.

Несколько особняком стоит глава 3. Она посвящена исследованию нетривиальности асимптотической формулы К. К. Марджанишвили и Хуа Ло – кена для системы в простых числах, подобной системе проблемы Гильберта – Камке.

Более подробно изложение результатов диссертации содержится во вводной части к каждой из глав.

1 Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами

Настоящая глава посвящена оценкам кратных тригонометрических сумм с многочленом общего вида в экспоненте, переменные суммирования в которых принимают значения простых чисел. Наши результаты обобщают на r - кратный случай оценки И. М. Виноградова сумм с простыми числами ([1]-[4]) и являются новыми приложениями теории кратных тригонометрических сумм, разработанной в ([47]-[70]) на основе p - адического метода А. А. Карацубы (см.[22], глава XI, задачи). Полученные оценки по точности близки к соответствующим оценкам статьи ([61]). Здесь мы пользуемся методом сглаживания И. М. Виноградова [6] и результатами работ [47]-[70].

В §1 сформулированы известные леммы; в §2 доказывается леммы об оценках кратных тригонометрических сумм с простым числами; в §3 формулируются и доказываются теоремы 1, 2 об оценке краткой тригонометрической суммы с простыми числами.

Обозначения. $r, n_1, \ldots, n_r,\ P_1, \ldots, P_r$ – натуральные числа, $m = (n_1 + 1)\cdots(n_r+1),\ \nu \max(n_1, \ldots, n_r) = 1,\ P_1 = \min(P_1, \ldots, P_r)$. Ω единичный m-мерный куб с координатами $\alpha(t_1, \ldots, t_r)$, удовлетворяющими условиям

$$-(\tau(t_1, \ldots, t_r))^{-1} \le \alpha(t_1, \ldots, t_r) < 1 - (\tau(t_1, \ldots, t_r))^{-1},$$
$$\tau(t_1, \ldots, t_r) = P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r} P_1^{-\frac{1}{6}}, \quad (0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_r \le n_r)$$

$F(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен с действительными коэффициентами $\alpha(t_1, \ldots, t_r)$.

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r}, \tag{6}$$

$p_1, \ldots, p_r$ – простые числа.

Через $S = S(A) = S_t(A)$ обозначим тригонометрическую сумму, в которой переменные суммирования пробегают значения простых чисел, т.е. сумму вида

$$S = \sum_{p_1 \le P_1} \cdots \sum_{p_r \le P_r} \exp 2\pi i t F(p_1, \ldots, p_r), \tag{7}$$

где координаты $\alpha(t_1, \ldots, t_r)$ точки A являются коэффициентами многочлена (6).

$[a, b, \ldots, c]$ – наименьшее общее кратное чисел $a, b, \ldots, c,\ L_s = \log P_s,\ s = 1, \ldots, r$

$$L = \log P, \quad P = \max(P_1, \ldots, P_r)$$

Определение 1. *Точку A с координатами $\alpha(t_1, \dots t_r)$, $0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \leqslant t_r \le n_r$ назовем точкой первого класса Ω_1, если $\alpha = \alpha(t_1, \dots, t_r)$ можно представить в виде*

$$a = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \le a < q,$$
$$|\beta| \le m^{-1} P_1^{-t_1} \cdots P_r^{-t_r} P_1^{0,1\nu} \tag{8}$$

$$0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \dots + t_r \ge 1,$$

и наименьшее общее кратное Q чисел $q(t_1, \dots, t_r)$, $0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r$, $t_1 + \dots + t_r \ge 1$, не превосходит $P_1^{0,1\nu}$. Остальные точки куба Ω назовем точками второго класса Ω_2.

Определение 2. *D – приближением числа α, отвечающим $\tau \ge 1$, назовем представление α в виде*

$$a = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a, q) = 1, \quad q \le \tau, \quad |\beta| \le (q\tau)^{-1}.$$

1.1 Известные леммы

Лемма 1. *Точки $A = (\alpha(1), \dots, \alpha(n))$ единичного куба разобьем на два класса в соответствии с определением 1. К точкам первого класса отнесем точки, у которых $Q \le P^{0,1\nu}$ и $|\beta(s)| \le \nu P^{-s+0,1\nu}$. Остальные точки единичного куба отнесем ко второму классу. Для точек второго класса положим*

$$\Delta_1 = P^{-\rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{n^2 \ln n}, \quad \mu = 1,$$

где γ_1 – некоторая положительная постоянная;

А для точек первого класса положим

$$\Delta_1 = Q^{-0,5\nu+\varepsilon}, \quad \mu = (m, Q)^{0,5\nu}.$$

или такие

$$\Delta_1 = Q^{-0,5\nu+\varepsilon} \delta_0^{-0,5\nu}, \quad \mu = 1.$$

где

$$\delta_0 = \max(|\beta(1)|P, \dots, |\beta(n)|P^n).$$

Тогда при $k \le \Delta_1^{-2}$ будем иметь

$$|S(A)| = \left| \sum_{p \le P} \exp 2\pi i k F(p) \right| \ll H P \Delta_1 \mu,$$

$$H = (\ln P)^{\frac{\ln \ln P}{\ln(1+\varepsilon_0)}},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n, \varepsilon, \varepsilon_0$.

Доказательство см.[4], гл.7, теорема 1, стр.122.

Лемма 2. *Для точек A первого класса Ω_1 при $k \le Q^{2\nu}$ справедлива оценка*

$$|T(A)| = \left| \sum_{x_1 \le P_1} \cdots \sum_{x_r \le P_r} \exp 2\pi i k F(x_1, \ldots, x_r) \right| \ll$$
$$\ll P_1 \cdots P_r Q^{-\nu+\varepsilon} \mu, \quad \mu = (k, Q)^\nu.$$

Если, кроме того, положить

$$S(t_1, \ldots, t_r) = P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r} \beta(t_1, \ldots, t_r), \quad \delta_0 = \max_{t_1 + \cdots + t_r \ge 1} |\delta(t_1, \ldots, t_r)|$$

то при $\delta_0 > 1$ и $k \le (Q\delta_0)^{2\nu}$ справедлива оценка

$$|T(A)| \ll P_1 \cdots P_r (Q\delta_0)^{-\nu+\varepsilon}$$

постоянные в знаках $\ll$ зависят только от $n_1, \ldots, n_r, \varepsilon$.

Доказательство см. в [61], лемма 15, стр. 760.

Лемма 3. *Пусть точка A принадлежит второму классу Ω_2, и пусть $s = 2, \ldots, r$ – натуральные числа, удовлетворяющие условиям*

$$-1 < \frac{\log P_s}{\log P_1} - \mu_s \le 0$$
$$\kappa = n_1 + \mu_2 n_2 + \cdots + \mu_r n_r,$$

$$\Delta_r = P_1^{-\rho_r}, \quad \rho_r^{-1} 32 m\kappa \log 8m\kappa.$$

тогда при $k \le \Delta_r^{-2}$ имеем оценку

$$|T(A)| = \left| \sum_{x_1 \le p_1} \cdots \sum_{x_r \le p_r} \exp 2\pi i k F(x_1, \ldots, x_r) \right| \ll$$
$$\ll e^{32\kappa} P_1 \cdots P_{r\Delta_r}.$$

постоянная в зоне $\ll$ зависит только от $n_1, \ldots, n_r$.

Доказательство см. в [61], теорема 2, стр. 764.

Лемма 4. *Пусть $F(x_1, \ldots, x_r)$ – многочлен с целыми коэффициентами, $F(0, \ldots, 0) = 0$ и все коэффициенты его в совокупности просты с q. Тогда имеем*

$$|S(q, F(x_1, \ldots, x_r))| = \left| \sum_{x_1=1}^{q} \cdots \sum_{x_r=1}^{q} \exp 2\pi i \frac{F(x_1, \ldots, x_r)}{q} \right| \ll q^{r-\nu+\varepsilon}$$

Постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n_1, \ldots, n_r, \varepsilon$.

Доказательство см. в [58], лемма 8 a), стр.58.

Лемма 5. *$F(x_1,\dots,x_r)$ – многочлен с действительными коэффициентами, $F(0,\dots,0)=0$ и максимум модулей всех коэффициентов его равен α. Тогда имеем*

$$|I_r| = \left|\int_0^1\cdots\int_0^1 \exp 2\pi i F(x_1,\dots,x_r)dx_1\cdots,dx_r\right| \le$$
$$\le \min(1, 32^r\alpha^{-\nu}(\ln(\alpha+1)+2)^{r-1}).$$

Доказательство см. в [58], лемма 2, стр.54.

Лемма 6. *Пусть $F(x_1,\dots,x_r)$ - действительная дифференцируемая функция при $0\le x_j\le P_j$, $j=1,\dots,r$, причем внутри интервала изменения переменных функция*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F(x_1,\dots,x_r),\quad j=1,\dots,r,$$

кусочно монотонная и знакопостоянная по каждой переменной x_s, $s=1,\dots,r$, при любых фиксированных значениях остальных переменных, и число промежутков монотонности и знакопостоянства не превосходит l.

Пусть, далее, при $0<\delta<1$ выполняют неравенства

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}F(x_1,\dots,x_r)\right| < \delta,\quad j=1,\dots,r$$

Тогда имеем равенство

$$\sum_{x_1=1}^{P_1}\cdots\sum_{x_r=1}^{P_r}\exp 2\pi i F(x_1,\dots,x_r) =$$
$$= \int_0^{P_1}\cdots\int_0^{P_r}\exp 2\pi i F(x_1,\dots,x_r)dx_1\cdots dx_r +$$
$$+\theta l P_1\cdots P_r(P_1^{-1}+\cdots+P_r^{-1})\left(3+\frac{2\delta}{1-\delta}\right),\quad |\theta|\le 1.$$

Доказательство см. в [58], стр. 73, лемма 16.

Лемма 7. *Пусть все коэффициенты многочлена $f(x_1,\dots,x_l)$,*

$$f(x_1,\dots,x_l) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_l=0}^{n_l}\alpha(t_1,\dots,t_l)x_1^{t_1}\cdots x_l^{t_l},$$

представлены в виде

$$\alpha(t_1,\dots,t_l) = \alpha = \frac{a}{q}+\beta,$$

где β – действительное число, a и q — целые числа, $a\ge 0$, $q\ge 1$, $(a,q)=1$. Пусть, далее,

$$Q = \underset{t_1+\cdots+t_l\ge 1}{H.O.K.}\ q,\ \delta = P_1^{t_1}\cdots P_l^{t_l}\beta,\quad \Delta = \max_{t_1+\cdots+t_l\ge 1}|\delta|,$$

где $P_1, \dots, P_l \geq 1$.

Определим многочлен $g(x_1, \dots, x_l)$ *равенством*

$$f(x_1 + y_1, \dots, x_l + y_l) = g(x_1, \dots, x_l),$$

где $y_1, \dots, y_l$ *– целые числа,* $|y_s| \leq P_s$, $s = 1, \dots, l$. *Обозначим через* $\alpha_0 = \alpha_0(t_1, \dots, t_l)$ *коэффициенты многочлена* $g(x_1, \dots, x_l)$.

Тогда можно указать целые числа $a_0, q_0, (a_0, q_0) = 1$ *и действительные числа* β_0, *такие, что при всех* $t_1, \dots, t_l$ *имеют место соотношения*

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{q_0} + \beta_0,$$

причем $Q_0 = Q$, $\Delta \ll \Delta_0 \ll \Delta$, *и числа* Q_0 *и* Δ_0 *определяются так же, как* Q *и* Δ, *но с заменой* α, a, q, β *соответственно на* $\alpha_0, a_0, q_0, \beta_0$. *Постоянная в знаках* $\ll$ *зависит только от* $n_1, \dots, n_l$.

Доказательство см. в [63], лемма 19, стр.759.

Лемма 8. *Пусть* $f(x)$ *– многочлен с действительными коэффициентами* $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$, $A > 0$, $\mu = \mu(A, f)$ *– мера тех точек* x *отрезка* $[0, 1]$ *для которых* $|f(x)| \leq A$.

Тогда имеем, что

$$\mu \leq \min(1, 4e(A\alpha^{-1})^{\frac{1}{n}}),$$

где

$$\alpha = \max(|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|).$$

Доказательство см. в [22], задача 1, гл. II, стр.48.

1.2 Леммы об оценках кратных тригонометрических сумм с простыми числами

В §2 и §3 мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Буквой E обозначим множество целочисленных наборов $(t_1, \dots, t_r)$, $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r$, $t_1 + \dots + t_r \geq 1$. Через E_0 обозначим те наборы из E, для которых выполняются условия $t_r \geq 1$, $t_1 + \dots + t_{r-1} \geq 1$; через E_1- те наборы, для которых $t_r = 0$, $t_1 + \dots + t_{r-1} \geq 1$; и наконец, через E_2 все остальные наборы E, т.е. наборы $(t_1, \dots, t_r)$, удовлетворяющие условиям $t_r \geq 1$, $t_1 = \dots = t_{r-1} = 0$.

Рассмотрим далее D – приближения чисел $\alpha = \alpha(t_1, \dots, t_r)$ $0 \leq t_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq t_r \leq n_r$, $t_1 + \dots + t_r \geq 1$, отвечающие

$$\tau = \tau(t_1, \dots, t_r) = P_1^{t_1 - \frac{1}{6}} P_2^{t_2} \cdots P_r^{t_r},$$

т.е. рассмотрим соотношения

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\beta| \leq (q\tau)^{-1} \tag{9}$$

обозначим через Q, Q_0, Q_1, Q_2 наименьшие общие кратные чисел $q=q(t_1,\dots,t_r)$, для которых наборы $(t_1,\dots,t_r)$ принадлежат соответственно к E, E_0, E_1, E_2; кроме того, обозначим через δ максимум из величин

$$|\beta(t_1,\dots,t_r)|P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}$$

по всем наборам $(t_1,\dots,t_r)\in E$.

Лемма 9. *Пусть $Q_0 > P_1^{\nu/80}$. Тогда имеем*

$$|S(A)| \ll e^{8\kappa}P_1\cdots P_r\Delta_r^{1/4}$$

где величины κ и Δ_r определены в лемма 3. Постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n_1,\dots,n_r$.

Доказательство. Имеем неравенство

$$|S(A)| \le \sum_{x_r=1}^{P_r}\left|\sum_{p_1\le P_1}\cdots\sum_{p_{r-1}\le P_{r-1}}\exp 2\pi i t F_1(p_1,\dots,p_{r-1},x_r)\right|,$$

где

$$F_1(p_1,\dots,p_{r-1},x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)p_1^{t_1}\cdots p_{r-1}^{t_{r-1}}x_r^{t_r}$$

Возведем это неравенство в квадрат и воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$\begin{aligned}|S(A)|^2 &\le P_r\sum_{x_r=1}^{P_r}\left|\sum_{p_1\le P_1}\cdots\sum_{p_{r-1}\le P_{r-1}}\exp 2\pi i t F_1(p_1,\dots,p_{r-1},x_r)\right|^2\le\\ &\le P_r\sum_{p_1,p_1'\le P_1}\cdots\sum_{p_{r-1},p_{r-1}'\le P_{r-1}}\left|\sum_{x_r=1}^{P_r}\exp 2\pi i t(F_2(p_1,\dots,p_{r-1},x_r)-\right.\\ &\left.-F_2(p_1',\dots,p_{r-1}',x_r))\right|\le P_r\sum_{x_1,x_1'\le P_1}\cdots\sum_{x_{r-1},x_{r-1}'\le P_{r-1}}\times\\ &\times\left|\sum_{x_r=1}^{P_r}\exp 2\pi i t(F_2(x_1,\dots,x_{r-1},x_r)-F_2(x_1',\dots,x_{r-1}',x_r))\right|,\end{aligned}$$

где

$$F_2(x_1,\dots,x_{r-1},x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=1}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_{r-1},t_r)x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}x_r^{t_r}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и вновь воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$|S(A)|^4 \le P_1^2 \cdots P_{r-1}^2 P_r^2 \sum_{x_1,\, x_1' \le P_1} \cdots \sum_{x_{r-1}, x_{r-1}' \le P_{r-1}} \sum_{x_r, x_r' \le P_r} \times$$
$$\times \exp 2\pi i t(F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) - F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r') -$$
$$- F_2(x_1', \ldots, x_{r-1}', x_r) + F_2(x_1', \ldots, x_{r-1}', x_r').$$

Отсюда получаем неравенство

$$|S(A)|^4 \le P_1^2 \cdots P_r^2 \sum_{x_1' \leqslant P_1} \cdots \sum_{x_r' \leqslant P_r} \Big| \sum_{x_1 \le P_1} \cdots \sum_{x_r \le P_r} \times$$
$$\times \exp 2\pi i t(F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) - F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r') - F_2(x_1', \ldots, x_{r-1}', x_r))\Big|.$$

Пусть максимум модуля внутренней суммы достигается при $x_1' = a_1, \ldots, x_{r-1}' = a_{r-1},\ x_r' = a_r$. Тогда имеем

$$|S(A)|^4 \le P_1^3 \cdots P_{r-1}^3 P_r^3 |W|, \tag{10}$$

где

$$W = \sum_{x_1 \le P_1} \cdots \sum_{x_{r-1} \le P_{r-1}} \sum_{x_r \le P_r} \exp 2\pi i t \Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r),$$
$$\Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) = F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r) - F_2(x_1, \ldots, x_{r-1}, a_r) -$$
$$- F_2(a_1, \ldots, a_{r-1}, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \gamma(t_r, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r}.$$

Заметим, что при $(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r) \in E_0$ справедливы равенства

$$\gamma(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r) = \alpha(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r).$$

Следовательно многочлены $\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ и $F(x_1, \cdots x_r)$ имеют одно и то же значение Q_0, которое превосходит $P^{\nu/80}$. Кроме того, имеем

$$\gamma(0, \ldots 0, t_r) = - \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1 + \ldots + t_{r-1} \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \alpha(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r) a_1^{t_1} \cdots a_{r-1}^{t_{r-1}}, \tag{11}$$

где $1 \le t_r \le n_r$

$$\gamma(t_1, \ldots, t_{r-1}, 0) = - \sum_{t_r=1}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots t_{r-1}, t_r) a_r^{t_r} \tag{12}$$

$$(0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_{r-1} \le n_{r-1}, t_1 + \cdots + t_{r-1} \ge 1).$$

Оценим теперь сумму W. Обозначим через A_0 точку в m – мерном пространстве с координатами

$$\alpha_0 = \alpha_0(t_1, \ldots, t_r) = \begin{cases} \alpha(t_1, \ldots, t_r), \quad \text{если} \quad (t_1, \ldots, t_r) \in E_0, \\ 0, \quad \text{если} \quad (t_1, \ldots, t_r) \notin E_0, \end{cases}$$

а через B обозначим точку с координатами $\gamma(t_1, \ldots, t_r)$,

$$0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_r \le n_r, t_1 + \cdots + t_r \ge 1.$$

Возможны два случая:

а) точка A_0 относится ко второму классу,

б) точка A_0 относится к первому классу.

Рассмотрим случай а). Покажем, что в этом случае точка B относится ко второму классу. Действительно, если бы точка B принадлежала первому классу, то по определению 1 получили, что $\gamma = \gamma(t_1, \ldots, t_r)$ можно представить в виде

$$\gamma = \frac{b}{s} + \xi, \quad (b, s) = 1, 0 \le b \le s, |\xi| < m^{-1} P_1^{-t_1} \cdots P_r^{-t_r} P_1^{0.1\nu}$$
$$(0 \le t_1 \le n_1, \ldots 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \cdots + t_r \ge 1),$$

и наименьшее общее кратное Q' чисел $s = s(t_1, \ldots, t_r)$

$$(0 \le t_1 \le n_1, \ldots 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + \cdots + t_r \ge 1),$$

не превосходит $P_1^{0.1\nu}$. Но тогда координаты $\alpha_0 = \alpha_0(t_1, \ldots, t_r)$ точки A_0 можно представить в виде

$$\alpha_0 = \gamma = \frac{b}{s} + \xi, \ (b, s) = 1, \ 0 \le b < s, \ |\xi| < m^{-1} P^{-t_1} \cdots P_r^{-t_r} P_1^{0.1\nu} \tag{13}$$

если $(t_1, \ldots, t_r) \in E_0$ и $\alpha_0 = \dfrac{0}{1}$, если $(t_1, \ldots, t_r) \notin E_0$. Следовательно, Q'' – наименьшее общее кратное чисел $s = s(t_1, \ldots, t_r)$, $(t_1, \ldots, t_r) \in E_0$, не превосходит Q'. Отсюда имеем, что точка A_0 принадлежит к первому классу, что противоречит условию случая а). Таким образом, точка B принадлежит второму классу, и из леммы 3 находим

$$|W| \ll e^{32\kappa} P_1 \cdots P_r \Delta_r,$$

где величины κ и Δ_r определены в лемме 3.

Рассмотрим теперь случай б). Точка A_0 принадлежит первому классу и поэтому справедливы соотношения (11). Покажем, что $Q_0 \le P_1^{0.1\nu}$. В противном случае выполняется неравенство $Q_0 > P_1^{0.1\nu}$, и следовательно, $Q_0 \ne Q''$, так как $Q'' \le P_1^{0.1\nu}$. Отсюда имеем, что найдется такой набор $(t_1, \ldots, t_r) \in E_0$, что

$$s(t_1, \ldots, t_r) \ne q(t_1, \ldots, t_r).$$

Из этого и соотношений (11) и (13) получим

$$\frac{1}{sq} \le \left|\frac{a}{q} - \frac{b}{s}\right| \le |\beta| + |\xi| \le (q\tau)^{-1} + \tau^{-1} P_1^{0.1\nu - \frac{1}{6}},$$
$$s^{-1} \le \tau^{-1} + q\tau^{-1} P_1^{0.1\nu - \frac{1}{6}},$$
$$s \ge 0.5 P_1^{\frac{1}{6} - 0.1\nu}.$$

С другой стороны, имеем

$$s \le Q'' \le P_1^{0.1\nu}$$

При $\nu^{-1} \ge 2$ эти неравенства для величины s противоречивы, следовательно $Q_0 \le P_1^{0.1\nu}$. Представим коэффициенты $\gamma(0, \ldots, 0, t_r)$, $\gamma(t_1, \ldots, t_{r-1}, 0)$, определяемые (11), (12), в виде

$$\gamma(0, \ldots, 0, t_r) = \frac{a_1(t_r)}{q_1(t_r)} + \beta_1(t_r),$$

$$\frac{a_1(t_r)}{q_1(t_r)} = -\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \frac{a(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r)}{q(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r)} a_1^{t_1} \cdots a_{r-1}^{t_{r-1}},$$

$$\beta_1(t_r) = -\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \beta(t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r) a_1^{t_1} \cdots a_{r-1}^{t_{r-1}}, \quad 1 \le t_r \le n_r,$$

$$\gamma(t_1, \ldots, t_{r-1}, 0) = \frac{a_2(t_1, \ldots, t_{r-1})}{q_2(t_1, \ldots, t_{r-1})} + \beta_2(t_1, \ldots, t_{r-1}),$$

$$\frac{a_2(t_1, \ldots, t_{r-1})}{q_2(t_1, \ldots, t_{r-1})} = -\sum_{t_r=1}^{n_r} \frac{a(t_1, \ldots, t_r)}{q(t_1, \ldots, t_r)} a_r^{t_r},$$

$$\beta_2(t_1, \ldots, t_{r-1}) = -\sum_{t_r=1}^{n_r} \beta(t_1, \ldots, t_r) a_r^{t_r}.$$

$$(0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_{r-1} \le n_{r-1}, \quad t_1 + \cdots + t_{r-1} \ge 1).$$

Отсюда имеем, что $q_1(t_r) \,|\, Q_0$,

$$|\beta_1(t_r)| \le (n_1 + 1) \cdots (n_{r-1} + 1) P_r^{-t_r} P_1^{\frac{1}{6}}, \quad 1 \le t_r \le n_r,$$
$$q_2(t_1, \ldots, t_{r-1}) \,|\, Q_0,$$
$$|\beta_2(t_1, \ldots, t_{r-1})| \le (n_r + 1) P_1^{-t_1} \cdots P_{r-1}^{-t_{r-1}} P_1^{\frac{1}{6}},$$
$$(0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_{r-1} \le n_{r-1}, \quad t_1 + \cdots + t_{r-1} \ge 1)$$

Преобразуем сумму W подстановкой $x_s = Q_0 y_s + z_s$ где $1 \le z_s \le Q_0$, $-z_s Q_0^{-1} < y_s \le (P_s - z_s) Q_0^{-1}$, $s = 1, \ldots, r$. Получим

$$W = \sum_{z_1=1}^{Q_0} \cdots \sum_{z_r=1}^{Q_0} \exp(2\pi i t \Phi_1(z_1, \ldots, z_r)) W_1, \tag{14}$$

$$W_1 = \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_r} \exp(2\pi i t \Phi_2(Q_0 y_1 + z_1, \ldots, Q_0 y_r + z_r)),$$

$$\begin{gathered} \Phi_1(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \sum_{t_r=1}^{n_r} \frac{a(t_1, \ldots, t_r)}{q(t_1, \ldots, t_r)} z_1^{t_1}, \ldots, z_r^{t_r} + \\ \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \frac{a_2(t_1, \ldots, t_{r-1})}{q_2(t_1, \ldots, t_{r-1})} z_1^{t_1}, \ldots, z_{r-1}^{t_{r-1}} + \sum_{t_r=1}^{n_r} \frac{a_1(t_r)}{q_1(t_r)} z_r^{t_r} \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \Phi_2(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \beta(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r} + \\ + \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \beta(t_1, \ldots, t_{r-1}) x_1^{t_1} \ldots x_{r-1}^{t_{r-1}} + \sum_{t_r=1}^{n_r} \beta_1(t_r) x_r^{t_r}. \end{gathered} \tag{16}$$

Из оценок $\beta(t_1, \ldots, t_r)$, $\beta_2(t_1, \ldots, t_{r-1})$, $\beta_1(t_r), Q$ имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_s} t \Phi_2(Q_0 y_1 + z_1, \ldots, Q_0 y_r + z_r) \right| \le 0.5.$$

следовательно, к сумме W_1 применима лемма 6:

$$\begin{aligned} W_1 = \int_{-z_1 Q_0^{-1}}^{(P_1 - z_1) Q_0^{-1}} \cdots \int_{-z_r Q_0^{-1}}^{(P_r - z_r) Q_0^{-1}} \exp(2\pi i t \Phi_2(Q_0 y_1 + z_1, \ldots, Q_0 y_r + z_r)) \times \\ \times dy_1 \cdots dy_r + O(P_2 \cdots P_r Q_0^{-r+1}). \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных интегрирования $y_1, \ldots, y_r$:

$$x_s = (Q_0 y_s + z_s) P_s^{-1}, \quad s = 1, \ldots, r.$$

Получим равенство

$$W_1 = P_1 \cdots P_r Q_0^{-r} I_r + O(P_2 \cdots P_r Q_0^{-r+1}),$$

$$I_r = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp(2\pi i t \Phi_3(x_1, \ldots, x_r)) dx_1 \ldots dx_r,$$

$$\Phi_3(x_1,\ldots,x_r)=\Phi_2(P_1x_1,\ldots,P_rx_r).$$

Таким образом, для суммы W имеем оценку

$$|W|\le P_1\cdots P_rQ_0^{-r}\,|S(Q_0,Q_0\Phi_1(z_1,\ldots,z_r))|\cdot|I_r|+O(P_2\cdots P_rQ_0^{-r+1}),$$

где

$$S(Q_0,Q_0\Phi_1(z_1,\ldots,z_r))=\sum_{z_1=1}^{Q_0}\cdots\sum_{z_t=1}^{Q_0}\exp(2\pi it\Phi_1(z_1,\ldots,z_r)),$$

многочлен $\Phi_1(z_1,\ldots,z_r)$ определен равенством (15). Так как по условию леммы $Q_0>P_1^{\nu/80}$, то из леммы 4 находим

$$S(Q_0,Q_0\Phi_1(z_1,\ldots,z_r))|\ll Q_0^{r-\nu+\varepsilon}\ll Q_0^rP_1^{-\frac{\nu^2}{80}+\frac{\nu\varepsilon}{80}}\ll Q_0^r\Delta_r.$$

Следовательно, в случае б) справедлива оценка

$$|W|\ll P_1\cdots P_r\Delta_r.$$

После подстановки оценки $|W|$ в (10), получим

$$|S(A)|\ll e^{8\kappa}P_1\cdots P_r\Delta_r^{1/4}.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть Q_0,Q_2 - натуральные числа, определенные в начале §2, и пусть $Q_0\le P_1^{\nu/80}$, $Q_2>P_1^{3\nu/80}$.*

Тогда имеем оценку

$$|S(A)|\ll e^{8\kappa}P_1\cdots P_r\Delta_r^{\frac{1}{4}},$$

где κ и Δ_r определены в лемме 3. Постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n_1,\ldots,n_r$.

Доказательство. Очевидно, справедливо неравенство

$$|S(A)|\le\sum_{x_1\le P_1}\cdots\sum_{x_{r-1}\le P_{r-1}}\left|\sum_{p_r\le P_r}\exp 2\pi itF(x_1,\ldots,x_{r-1},p)\right|=$$
$$=\sum_{x_1\le P_1}\cdots\sum_{x_{r-1}\le P_{r-1}}\left|\sum_{p\le P_r}\exp 2\pi itF_1(x_1,\ldots,x_{r-1},p)\right|=T_1,$$

где

$$F_1(x_1,\ldots,x_{r-1},p)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=1}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)\times$$
$$\times\, x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}p^{t_r}=\sum_{t=1}^{n_r}f_t(x_1,\ldots,x_{r-1})p^t,$$

$$f_t(x_1,\dots,x_{r-1}) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}}^{n_{r-1}} \alpha(t_1,\dots,t_{r-1},t)x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}.$$

Преобразуем сумму T_1 подстановкой $x_s = Q_0y_s + z_s$,

$$1 \le z_s \le Q_0,\ -z_sQ_0^{-1} < y_s \le (P_s - z_s)Q_0^{-1},\quad s = 1,\dots,r-1.$$

Получим неравенство $T_1 \le T_2$, где

$$\begin{aligned} T_2 = \sum_{z_1=1}^{Q_0}\cdots\sum_{z_{r-1}=1}^{Q_0}\ \sum_{0\le y_1\le P_1Q_0^{-1}}\cdots\sum_{0\le y_{r-1}\le P_{r-1}Q_0^{-1}}\times \\ \times\left|\sum_{p\le P_r}\exp 2\pi itF_1(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_{r-1}+z_{r-1},p)\right|. \end{aligned} \tag{17}$$

Представим многочлен $F_1(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_{r-1}+z_{r-1},p)$ в виде

$$\begin{aligned} &F_1(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_{r-1}+z_{r-1},p) = \Phi(Q_0y_1,\dots,Q_0y_{r-1},p) = \\ &= \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=1}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_{r-1},t_r)(Q_0y_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}}p^{t_r} = \\ &= \sum_{t=1} g_t(Q_0y_1,\dots,Q_0y_{r-1})p^t, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &\alpha_1(t_1,\dots,t_{r-1},t_r) = \sum_{s_1=t_1}^{n_1}\cdots\sum_{s_{r-1}=t_{r-1}}^{n_{r-1}}\alpha(t_1,\dots,t_{r-1},t_r)\times \\ &\times\binom{s_1}{t_1}\cdots\binom{s_{r-1}}{t_{r-1}} z_1^{s_1-t_1}\cdots z_{r-1}^{s_{r-1}-t_{r-1}}. \end{aligned}$$

В силу леммы 6 существуют целые числа a_1, q_1, $(a_1,q_1)=1$ и действительные числа β_1 такие, что при всех $t_1,\dots,t_{r-1},t_r$,

$$0 \le t_1 \le n_1,\dots,0\le t_{r-1}\le n_{r-1},\quad 1\le t_r\le n_r,$$

имеют место соотношения

$$\alpha_1(t_1,\dots,t_{r-1},t_r) = \alpha_1 = \frac{a_1}{q_1} + \beta_1,$$

причем $Q_4' = Q_4$, $\delta \ll \delta_0' \ll \delta_0$, где

$$Q_4' = \underset{t_r\ge1}{H.O.K}\, q_1,\quad Q_4 = \underset{t_r\ge1}{H.O.K}\, q,$$

$$\delta_0' = \max_{t_r\geq 1} P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}|\beta_1|,$$
$$\delta_0 = \max_{t_r\geq 1} P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}|\beta|,$$

Обозначим через Q_j', $Q'(t_r)$ величины

$$Q_j' = \underset{(t_1,\dots,t_r)\in E_j}{H.O.K}\, q_1, \quad j=0,1,2,;$$
$$Q'(t_r) = \underset{t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1}{H.O.K}\, q_1(t_1,\dots,t_{r-1},t_r),$$
$$Q(t_r) = \underset{t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1}{H.O.K}\, q(t_1,\dots,t_{r-1},t_r).$$

Заметим, что

$$Q_0 = [Q(1),\dots,Q(n_r)],$$
$$Q_0' = [Q'(1),\dots,Q'(n_r)].$$

Из леммы 6, примененной к многочленам

$$f_t(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_{r-1}+z_{r-1}) \quad \text{и} \quad g_t(Q_0y_1,\dots,Q_0y_{r-1}), \quad t=1,\dots,n_r$$

следует, что $Q(t_r)=Q'(t_r)$. Поэтому $Q_0=Q_0'$. Так как $Q_4=[Q_0,Q_2']=[Q_0,Q_2]\geq P_1^{3\nu/80}$, то

$$Q_2'\geq Q_4Q_0^{-1}\geq P_1^{\nu/40}$$

Следовательно, для многочлена $\Phi(Q_0y_1,\dots,Q_0y_{r-1},p)$ справедливо соотношение

$$\Phi(Q_0y_1,\dots,Q_0y_{r-1},p) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{s=1}^{n_r}\Big(\frac{a_1(t_1,\dots,t_{r-1},s)}{q_1(t_1,\dots,t_{r-1},s)}+$$
$$+\beta(t_1,\dots,t_{r-1},s)\Big)(Q_0y_1)^{t_1}\dots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}}p^s\equiv$$
$$\equiv \Phi_1(y_1,\dots,y_{r-1},p)\ (mod\ 1),$$

где

$$\Phi(y_1,\dots,y_{r-1},p) = \sum_{s=1}^{n_1}\Big(\frac{a_1(0,\dots,0,s)}{q_1(0,\dots,0,s)}+\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},s)\times$$
$$\times (Q_0y_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}}\Big)p^s = \sum_{s=1}^{n_r}B_sp^s = \sum_{s=1}^{n_r}h_s(y_1,\dots,y_{r-1})p^s$$

Отсюда и из (17) имеем

$$T_2\leq Q_0^{r-1}\sum_{0\leq y_1\leq P_1Q_0^{-1}}\cdots\sum_{0\leq y_{r-1}\leq P_{r-1}Q_0^{-1}}\times$$
$$\times\left|\sum_{p\leq P_r}\exp 2\pi it\Phi_1(y_1,\dots,y_{r-1},p)\right| = Q_0^{r-1}T_3$$

Рассмотрим D-приближения дробных долей $h_s(y_1,\dots,y_{r-1})$, $s=1,\dots,n_r$, отвечающие $\tau(s)=P_r^{s-\frac{1}{6}}$

$$\begin{aligned}
&\{h_s(y_1,\dots,y_{r-1})\}=\frac{a_s(y_1,\dots,y_{r-1})}{q_s(y_1,\dots,y_{r-1})}+\beta_s(y_1,\dots,y_{r-1}),\\
&(a_s(y_1,\dots,y_{r-1}),\quad q_s(y_1,\dots,y_{r-1}))=1,\\
&1\le q_s(y_1,\dots,y_{r-1})\le\tau(s),\\
&|\beta_s(y_1,\dots,y_{r-1})|\le(q_s(y_1,\dots,y_{r-1})\tau(s))^{-1}.
\end{aligned}$$

Обозначим через $Q(\bar y)$ наименьшее общее кратное чисел

$$q_1(y_1,\dots,y_{r-1}),\dots,q_{n_r}(y_1,\dots,y_{r-1}),$$

а через $\delta(\bar y)$ – наибольшую из величин $|\beta_s(y_1,\dots,y_{r-1})|P_r^s, s=1,\dots,n_r$. Сумму T_3 разобьем на три суммы

$$T_3=S_1+S_2+S_3,$$

где

$$S_j=\sum_{0\le y_1\le P_1Q_0^{-1}}\cdots\sum_{0\le y_{r-1}\le P_{r-1}Q_0^{-1}}{}^{(j)}|S(y_1,\dots,y_{r-1})|,\quad j=1,2,3.$$

$$S(y_1,\dots,y_{r-1})=\sum_{p\le P_r}\exp 2\pi it\Phi_1(y_1,\dots,y_{r-1},p),$$

причем область суммирования по $y_1,\dots,y_{r-1}$ в каждой из сумм S_1,S_2,S_3 своя и определятся так.

Если $(B_1,\dots,B_{n_r})$ является точкой второго класса относительно параметра P_r, то соответствующий набор $(y_1,\dots,y_{r-1})$ отнесем к сумме S_1; если же эта точка является точкой первого класса, причем $Q(\bar y)\ge H=P_1^{3n\rho}$ или $\delta(\bar y)\ge H$, то соответствующий набор $(y_1,\dots,y_{r-1})$ отнесем к сумме S_2, и наконец, все остальные наборы $(y_1,\dots,y_{r-1})$ отнесем к сумме S_3, т.е. сумме S_3 отнесем такие наборы $(y_1,\dots,y_{r-1})$, для которых $Q(\bar y)<H$ и $\delta(\bar y)<H$. Оценим сумму S_1. Если набор $(y_1,\dots,y_{r-1})$ относится к сумме S_1, то в силу леммы 1 имеем оценку

$$|S(y_1,\dots,y_{r-1})|\ll HP_r^{1-\rho_1},\quad \rho_1=\frac{\gamma}{n_r^2\ln n_r},\quad H=(\ln P)^{\frac{\ln\ln P}{\ln(1+\varepsilon_0)}}$$

где $\gamma>0$ — некоторая постоянная.

Следовательно,

$$S_1\ll HP_1\cdots P_{r-1}P_r^{1-\rho_1}Q_0^{-r+1}\ll HP_1\cdots P_rQ_0^{-r+1}\Delta_r$$

Перейдем к оценке суммы S_2. Так как точка $(B_1,\dots,B_{n_r})$ принадлежит первому классу, то в силу определения 1 ее координаты B_s можно представить в виде

$$=\frac{b_s}{l_s}+\beta_s,\quad (b_s,l_s)=1,$$

$$B_s = |\beta_s| \le (n_r+1)^{-1} P_r^{-s+0,1\nu}, \quad s = 1, \ldots, n_r,$$
$$l = [l_1, \ldots, l_{n_r}] \le P_r^{0,1\nu}.$$

Покажем, что для точки $(B_1, \ldots B_{n_r})$ первого класса имеет место неравенство $Q(\bar{y}) \le P_r^{0,1\nu}$. Действительно, в противном случае имеем $Q(\bar{y}) \ne l$. Следовательно, найдется s, $1 \le s \le n_r$, такое, что $q_s(y_1, \ldots, y_{r-1}) \ne l_s$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1}) l_s} \le \left| \frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} - \frac{b_s}{l_s} \right| \le$$
$$\leqslant |\beta_s(y_1, \ldots, y_{r-1})| + |\beta_s| \le P_r^{-s+0.1\nu} + q_s^{-1}(y_1, \ldots, y_{r-1}) P_r^{-s+\frac{1}{6}},$$

$$l_s^{-1} \le q_s(y_1, \ldots, y_{r-1}) P_r^{-s+0.1\nu} + P_r^{-s+\frac{1}{6}} \le 2P_r^{0.1\nu-\frac{1}{6}}$$
$$l_s \ge 0.5 P_r^{\frac{1}{6}-0.1\nu}.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что

$$l_s \le l \le P_r^{0.1\nu}.$$

Таким образом, имеем неравенство $Q(\bar{y}) \le P_r^{0.1\nu}$. Покажем, что для всех s, $1 \le s \le n_r$, справедливы равенства

$$\frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} = \frac{b_s}{l_s}.$$

Действительно, в противном случае найдется такое s, $1 \le s \le n_r$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} \ne \frac{b_s}{l_s}.$$

Тогда с одной стороны, имеем

$$\frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} - \frac{b_s}{l_s} \Big| \ge \frac{1}{l_s q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} \ge P_r^{-0.2\nu},$$

а с другой стороны, имеем и такое неравенство

$$\left| \frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} - \frac{b_s}{l_s} \right| \le |\beta_s(y_1, \ldots, y_{r-1})| + |\beta_s| \le$$
$$\leqslant P_r^{-s+0.1\nu} + P_r^{-s+\frac{1}{6}} \le 2P_r^{-s+\frac{1}{6}} \le 2P_r^{-\frac{5}{6}}$$

Отсюда получим, что неравенства снизу и сверху для величины

$$\left| \frac{a_s(y_1, \ldots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \ldots, y_{r-1})} - \frac{b_s}{l_s} \right|$$

противоречивы.

Следовательно, при всех s, $s=1,\dots,n_r$ выполняются равенства

$$\frac{b_s}{l_s}=\frac{a_s(y_1,\dots,y_{r-1})}{q_s(y_1,\dots,y_{r-1})},\qquad \beta_s=\beta_s(y_1,\dots,y_{r-1}).$$

Отсюда находим

$$Q(\bar y)=l>H,\quad \delta(\bar y)=\delta=\max_{1\le s\le n_r}P_r^s|\beta_s|>H.$$

Таким образом, если набор $(y_1,\dots,y_{r-1})$ относится к сумме S_2, то в силу леммы 1 имеем

$$|S(y_1,\dots,y_{r-1})|\ll P_rH^{-0.5\nu+\varepsilon}\ll P_rP_1^{-\rho},$$
$$|S_2|\ll P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}P_rP_1^{-\rho}.$$

ценим сумму S_3. Имеем

$$|S_3|\le YP_r,$$

где Y – количество наборов $(y_1,\dots,y_{r-1})$, $0\le y_1\le P_1Q_0^{-1},\dots,0\le y_{r-1}\le P_{r-1}Q_0^{-1}$, для которых выполняются соотношения

$$\delta(\bar y)\le H=P_1^{3\rho n},\quad Q(\bar y)\le H$$

и точка $(B_1,\dots,B_{n_r})$ принадлежит первому классу.

Обозначим через Ω_0 множество точек $(B_1,\dots,B_{n_r})$, соответствующих наборам $(y_1,\dots,y_{r-1})$, которые относятся сумме S_3.

Перейдем к оценке величины Y. Обозначим через

$$\Omega_1=\Omega_1\left(\frac{b_1}{h_1},\dots,\frac{b_{n_r}}{h_{n_r}}\right)$$

область в n_r-мерном пространстве, которая определяется так.

Точка $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n_r})$ принадлежит Ω_1, если

$$\begin{gathered}\alpha_s=\frac{b_s}{h_s}+z_s,\quad 1\le h_s\le\tau(s),\\ (b_s,h_s)=1,\quad |z_s|\le(h_s\tau(s))^{-1},\\ \tau(s)=P_r^{s-\frac16},\quad s=1,\dots,n_r,\end{gathered}$$

$$[h_1,\dots,h_{n_r}]\le H. \tag{18}$$

Пусть

$$\Omega_1'=\Omega_1'\left(\frac{b_1'}{h_1'},\dots,\frac{b_{n_r}'}{h_{n_r}'}\right)$$

область, отличная от Ω_1 с условием $[h_1^{'}, \dots, h_{n_r}^{'}] \le H$. Тогда найдется такой номер s, $1 \le s \le n_r$, что

$$\frac{b_s}{h_s} \ne \frac{b_s^{'}}{h_s^{'}}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{b_s}{h_s} - \frac{b_s^{'}}{h_s^{'}} \right| \ge H^{-2}.$$

Поэтому расстояние между s – тыми координатами точек этих областей не меньше, чем

$$H^{-2} - 2(\tau(s))^{-1} \ge 0.5H^{-2}.$$

Но для любой точки множества Ω_0 ее s – для координата отличается от $\dfrac{a_1(0, \dots, 0, s)}{q_1(0, \dots, 0, s)}$ не более, чем

$$\sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} |\beta(t_1, \dots, t_{r-1}, s)| P_1^{t_1} \cdots P_{r-1}^{t_{r-1}} \ll P_r^{-s} P_1^{\frac{1}{6}} \ll P_1^{-\frac{5}{6}}.$$

Таким образом, множество Ω_0 пересекается не более, чем с одной областью Ω_1.

Если $Y \ne 0$, то для всех точек множества Ω_0 справедливы соотношения

$$\frac{a_s(y_1, \dots, y_{r-1})}{q_s(y_1, \dots, y_{r-1})} = \frac{b_s}{h_s}, \tag{19}$$

$$\left| \{h_s(y_1, \dots, y_{r-1})\} - \frac{b_s}{h_s} \right| \le P_r^{-s} H, \quad s = 1, \dots, n_r.$$

Так как $Q(\bar{y}) \le P_1^{3\rho n}$, $Q_2' > P_1^{\nu/40}$, $\rho < \nu^2/120$, то $Q_2' \ne Q(\bar{y})$ и следовательно, при некотором μ имеем

$$\frac{a_1(0, \dots, 0, \mu)}{q_1(0, \dots, 0, \mu)} \ne \frac{b_\mu}{h_\mu}, \quad q_1(0, \dots, 0, \mu) \ne 1.$$

Из (19) имеем $Y \le Y_1$, где Y_1 – количество тех наборов $(y_1, \dots, y_{r-1})$, для которых справедливо неравенство

$$\left| h_\mu(y_1, \dots, y_{r-1}) - \frac{b_\mu}{h_\mu} \right| \le P_r^{-\mu} H = \Delta. \tag{20}$$

Положим

$$B(y_1, \dots, y_{r-1}) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \beta_1(t_1, \dots, t_{r-1}, \mu) \times$$
$$\times (Q_0 y_1)^{t_1} \cdots (Q_0 y_{r-1})^{t_{r-1}}$$

$$\frac{a_1(0,\ldots,0,\mu)}{q_1(0,\ldots,0,\mu)} = \frac{a}{q}, \quad \frac{b_\mu}{h_\mu} = \frac{b}{h}.$$

Тогда неравенство (20) примет вид

$$\left| B(y_1,\ldots,y_{r-1}) - \frac{b}{h} + \frac{a}{q} \right| \le \Delta. \tag{21}$$

Определим теперь периодическую функцию $\chi(x)$ с периодом, равным единице, соотношениями

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{если} \quad |x| \le \Delta, \\ (2\Delta - |x|)\Delta^{-1}, \quad \text{если} \quad \Delta < |x| \le 2\Delta, \\ 0, \quad \text{если} \quad 2\Delta < |x| \le 0.5, \end{cases} \tag{22}$$

и функцию $\psi(x)$ равенством

$$\psi(x) = \chi\left(x + \frac{a}{q} - \frac{b}{h}\right).$$

Тогда из условия (21) получим

$$Y_1 \le \sum_{0 \le y_1 \le P_1 Q_0^{-1}} \cdots \sum_{0 \le y_{r-1} \le P_{r-1} Q_0^{-1}} \psi(B(y_1,\ldots,y_{r-1})) = Y_2.$$

Разложим $\psi(x)$ в ряд Фурье

$$\psi(x) = \Delta + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c(s) e^{2\pi i s x}, \quad c(0) = 0,$$

$$|c(s)| \le \min\left(\Delta, \frac{1}{\Delta s^2}\right), \quad |s| \ge 1.$$

Следовательно

$$Y_2 \ll P_1 \cdots P_{r-1} Q_0^{-r+1}\Delta + \sum_{1 \le s < M} \Delta |T(s)| +$$
$$+ \sum_{M \le s < M_1} \Delta^{-1} s^{-2} |T(s)| + P_1^{1-\rho} P_2 \cdots P_{r-1} Q_0^{-r+1},$$

где

$$T(s) = \sum_{0 \le y_1 \le P_1 Q_0^{-1}} \cdots \sum_{0 \le y_{r-1} \le P_{r-1} Q_0^{-1}} \exp 2\pi i s B(y_1,\ldots,y_{r-1}),$$
$$M = \Delta^{-1}, \quad M_1 = M P_1^{\rho}.$$

Оценим сумму $T(s)$.

Модули первых частных производных многочлена $sB(y_1,\dots,y_{r-1})$ не превосходят

$$\left|s\frac{\partial}{\partial y_j}B(y_1,\dots,y_{r-1})\right| \le |s|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_j=1}^{n_j}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} t_j|\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},\mu)|\times$$
$$\times Q_0(Q_0y_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_j)^{t_j-1}\cdots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}} \le$$
$$\le |s|\frac{n_jm}{n_r+1}Q_0P_1^{t_1}\cdots P_j^{t_j-1}\cdots P_{r-1}^{t_{r-1}}\cdots P_1^{-t_1}\cdots P_{r-1}^{-t_{r-1}}P_r^{-t_r}P_1^{\frac{1}{6}} \le$$
$$\le P_1^{0.5} \le 0.5, \quad j=1,\dots,r-1.$$

Следовательно, по лемме 6 имеем равенство

$$T(s)=\int_0^{P_1Q_0^{-1}}\cdots\int_0^{P_{r-1}Q_0^{-1}}\exp 2\pi isB(y_1,\dots,y_{r-1})dy_1\cdots dy_{r-1}+$$
$$+O(P_2\dots P_{r-1}Q_0^{-r+2}).$$

Преобразуем интеграл в выражении $T(s)$ подстановкой

$$z_j=P_j^{-1}Q_0y_j, \quad j=1,\dots,r-1.$$

Получим

$$T(s)=P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}I_{r-1}+O(P_2\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+2}),$$

где

$$I_{r-1}=\int_0^1\cdots\int_0^1\exp 2\pi isA(z_1,\dots,z_{r-1})dz_1\cdots dz_{r-1},$$

$$A(z_1,\dots,z_{r-1})=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_{r-1}\ge 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\delta(t_1,\dots,t_{r-1})z_1^{t_1}\cdots z_{r-1}^{t_{r-1}},$$

$$\delta(t_1,\dots,t_{r-1})=\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},\mu)P_1^{t_1}\cdots P_{r-1}^{t_{r-1}}.$$

Пусть

$$\delta=\max_{t_1+\dots+t_{r-1}\ge 1}|\delta(t_1,\dots,t_{r-1})|.$$

Тогда для величины δ имеем следующую оценку снизу

$$\delta \ge \frac{n_r+1}{m}\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}|\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},\mu)|P_1^{t_1}\cdots P_{r-1}^{t_{r-1}} \ge$$
$$\ge \frac{n_r+1}{m}\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}|\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},\mu)|(Q_0y_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}} \ge$$

$$\geq \frac{n_r+1}{m}\left(\left|\frac{a}{q}-\frac{b}{h}\right|-|\beta_1(0,\ldots,0,\mu)|-\left|\frac{a}{q}-\frac{b}{h}+\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\beta_1(t_1,\ldots,t_{r-1},\mu)(Q_0y_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1})^{t_{r-1}}\right|\right)\geq$$
$$\geq\frac{n_r+1}{m}\left(\frac{1}{Hq}-\frac{1}{q\tau(0,\ldots,0,\mu)}-\Delta\right)\geq\frac{n_r+1}{4mH\tau(0,\ldots,0,\mu)}$$

Отсюда по лемме 5 для суммы $T(s)$ находим

$$|T(s)|\ll P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}\min\left(1,|s|^{-\frac{1}{n}}H^{\frac{1}{n}}(\tau(0,\ldots,0,\mu))^{\frac{1}{n}}\right).$$

Следовательно

$$Y_2\ll P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}\Delta+P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}\Delta\sum_{1\leq s<M}m^{-\frac{1}{n}}H^{\frac{1}{n}}(\tau(0,\ldots,0,\mu))^{\frac{1}{n}}+$$
$$+P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}\Delta^{-1}\sum_{M\leq s\leq M_1}s^{-2-\frac{1}{n}}H^{\frac{1}{n}}(\tau(0,\ldots,0,\mu))^{\frac{1}{n}}+$$
$$+P_1^{1-\rho}P_2\cdots P_rQ_0^{-r+1}\ll P_1^{1-\rho}P_2\cdots P_rQ_0^{-r+1}.$$

Отсюда получаем, что $S_3\leq YP_r\ll P_1\cdots P_rQ_0^{-r+1}P_1^{-\rho}$,

$$T_3=S_1+S_2+S_3\ll P_1\cdots P_rQ_0^{-r+1}P_1^{-\rho},$$
$$|S(A)|\leq Q_0^{-r+1}T_3\ll P_1\cdots P_rP_1^{-\rho}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть величины Q и δ удовлетворяют условиям $Q\leq P_1^{0.1\nu}$, $\delta>m^{-1}P_1^{0.1\nu}$. Тогда*

$$|S(A)|\ll P_1\cdots P_rP_1^{-\rho},$$

где

$$\rho=\frac{\gamma}{n^2\ln n},\quad n=\max(n_1,\ldots,n_r),$$

$\gamma>0$ – некоторая постоянная. Постоянная же в знаке $\ll$ зависит только от $n_1,\ldots,n_r$.

Доказательство. Пусть $\delta=|\delta(t_1,\ldots,t_r)|$, $t_s\geq 1$. Тогда имеем неравенство

$$|S(A)|\leq\sum_{x_1\leq P_1}\cdots\sum_{x_{s-1}\leq P_{s-1}}\sum_{x_{s+1}\leq P_{s+1}}\cdots\sum_{x_r\leq P_r}\left|\sum_{p_s\leq P_s}\times\right.$$
$$\left.\times\exp 2\pi itF_1(x_1,\ldots,x_{s-1},p_s,x_{s+1},\ldots,x_r)\right|,\tag{23}$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_{s-1},p_s,x_{s+1},\ldots,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_s=0}^{n_s}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\times$$
$$\times\alpha(t_1,\ldots t_r)x_1^{t_1}\ldots x_{s-1}^{t_{s-1}}p_s^{t_s}x_{s+1}^{t_{s+1}}\cdots x_r^{t_r}.$$

Обозначим через q наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\dots t_r)$ с условиями $t_1 \geq 0,\dots,t_{s-1} \geq 0,\ t_s \geq 1, t_{s+1} \geq 0,\dots,t_r \geq 0$. Тогда $q \leq Q$. Представим переменные x_l в виде $x_l = qy_l + z_l,\ 1 \leq z_l \leq q,\ -z_l q^{-1} < y_l \leq (P_l - z_l)q^{-1}$, $l = 1,\dots,s-1,s+1,\dots,r$. Определим многочлен

$$\Phi_1(y_1,\dots,y_{s-1},p_s,y_{s+1},\dots,y_r)$$

в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(y_1,\dots,y_{s-1},p_s,y_{s+1},\dots,y_r) = \\
&= F_1(qy_1+z_1,\dots,qy_{s-1}+z_{s-1},p_s,qy_{s+1}+z_{s+1},\dots,qy_r+z_r) = \\
&= \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_s=1}^{n_s}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha_1(t_1,\dots,t_r)(qy_1)^{t_1}\cdots(qy_{s-1})^{t_{s-1}}\times \\
&\times p_s^{t_s}(qy_{s+1})^{t_{s+1}}\cdots(qy_r)^{t_r}
\end{aligned}$$

Тогда по лемме 7 существуют рациональные приближения чисел $\alpha_1 = \alpha_1(t_1,\dots,t_r)$ такие, что $\alpha_1 = \dfrac{a_1}{q_1} + \beta_1,\ (a_1,q_1) = 1,\ q' = \underset{t_s\geq 1}{H.O.K}\, q_1,\ \delta' = \max\limits_{t_s\geq 1}|\beta_1|P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}$ и выполняются соотношения

$$q = q^{'},\quad \delta \ll \delta^{'} \ll \delta.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(y_1,\dots,y_{s-1},p_s,y_{s+1},\dots,y_r) = \\
&= \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_s=1}^{n_s}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\left(\frac{a_1}{q_1}+\beta_1\right)(qy_1)^{t_1}\cdots p_s^{t_s}\cdots(qy_r)^{t_r} \equiv \\
&\equiv \Phi_1(y_1,\dots,y_{s-1},p_s,y_{s+1},\dots,y_r) \pmod 1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Phi = \Phi_1(y_1,\dots,y_{s-1},p_s,y_{s+1},\dots,y_r) = \\
&= \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_s=1}^{n_s}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\beta_1(t_1,\dots,t_r)(qy_1)^{t_1}\cdots p_s^{t_s}\cdots(qy_r)^{t_r} = \\
&= \sum_{l=1}^{n_s} B_l p_s^l.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{y}$ набор $(y_1,\dots,y_{s-1},y_{s+1},\dots,y_r)$.

Представим коэффициенты B_l многочлена Φ в виде

$$B_l = \frac{a_l(\bar{y})}{q_l(\bar{y})} + \beta_l(\bar{y}),\quad (a_l(\bar{y}),q_l(\bar{y})) = 1,\quad 1 \leq q_2(\bar{y}) \leq \tau(l),$$

$$|\beta_l(\bar{y})| \leq (q_l(\bar{y})\tau(l))^{-1},\quad \tau(l) = P_s^{l-\frac{1}{6}}$$

Введем еще обозначения:

$$Q(\bar{y}) = [q_1(\bar{y}), \dots, q_{n_s}(\bar{y})], \quad \delta(y) = \max_{1\le l\le n_s} |\beta_l(\bar{y})|P_s^l.$$

Из неравенства (23), после замены переменных суммирования x_l на qy_l+z_l, $l=1,\dots,s-1,s+1,\dots,r,$ найдем

$$|S(A)| \le q^{r-1} \sum_{0\le y_1\le P_1q^{-1}} \cdots \sum_{0\le y_{s-1}\le P_{s-1}q^{-1}} \sum_{0\le y_{s+1}\le P_{s+1}q^{-1}} \cdots \sum_{0\le y_r\le P_rq^{-1}} \times$$

$$\times \left| \sum_{p\le P_s} \exp 2\pi it\Phi(y_1,\dots,y_{s-1},p,y_{s+1},\dots,y_s) \right| = q^{r-1}T_1.$$

Разобьем сумму T_1 на три суммы:

$$T_1 = S_1+S_2+S_3,$$

где

$$S_j = \sum_{0\le y_1\le P_1q^{-1}} \cdots \sum_{0\le y_{s-1}\le P_{s-1}q^{-1}} \sum_{0\le y_{s+1}\le P_{s+1}q^{-1}} \cdots \sum_{0\le y_r\le P_rq^{-1}}{}^{(j)} |S(\bar{y})|, \;\; j=1,2,3.$$

$$S(\bar{y}) = \sum_{p\le P_s} \exp 2\pi it\Phi(y_1,\dots,y_{s-1},p,y_{s+1},\dots,y_s),$$

область суммирования по наборам $\bar{y} = (y_1,\dots,y_{s-1},p,y_{s+1},\dots,y_s)$ в каждой из сумм S_1,S_2,S_3 своя и определяется так. Если точка $(B_1,\dots,B_{n_s})$ является точкой второго класса относительно параметра P_s, то соответствующий набор $\bar{y}$ отнесем к сумме S_1, если же эта точка является точкой первой класса, причем либо $Q(\bar{y}) \ge H = P_1^{3n\rho}$, либо $\delta(\bar{y}) \ge H$, то соответствующий набор $\bar{y}$ отнесем к S_2, все остальные наборы $\bar{y}$ отнесем к сумме S_3. В случае, когда набор $\bar{y}$ относится либо к сумме S_1, к сумме S_2, для оценки $S(\bar{y})$ воспользуемся леммой 1.

Получим

$$|S(\bar{y})| \ll P_s^{1-\rho},$$

Отсюда имеем

$$|S_1|+|S_2| \ll P_1^{1-\rho}P_2\cdots P_rq_{-r+1}$$

Оценим сумму S_3. Очевидно имеем

$$|S_3| \le YP_s,$$

где Y – количество наборов $\bar{y} = (y_1,\dots,y_{s-1},y_{s+1},\dots,y_r)$,

$$0\le y_1\le P_1q^{-1}, \dots 0\le y_{s-1}\le P_{s-1}q^{-1},$$

$$0 \le y_{s+1} \le P_{s+1}q^{-1}, \dots, 0 \le y_r \le P_r q^{-1},$$

для которых

$$\delta(\bar{y}) \le H = P_1^{3\rho n}, \quad Q(\bar{y}) \le H \tag{24}$$

и точка $(B_1, \dots, B_{n_s})$ принадлежит первому классу. Множество таких точек $(B_1, \dots, B_{n_s})$, удовлетворяющих условиям (24), обозначим через Ω_0. Так же, как и в лемме 9 доказывается, что если $Y \ne 0$, то множество Ω_0 принадлежит всего лишь области Ω_1, определенной условиями (22).

Следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{a_l(\bar{y})}{q_l(\bar{y})} = \frac{b_l}{h_l}, \qquad \left| B_l - \frac{b_l}{h_l} \right| \le P_s^{-l} H, \quad 1 \le l \le n_s.$$

Пусть

$$\delta' = |\beta_1(t_1, \dots, t_{s-1}, l, t_{s+1}, \dots, t_r)| P_1^{t_1} \cdots P_{s-1}^{t_{s-1}} P_s^l P_{s+1}^{t_{s+1}} \cdots P_r^{t_r} \tag{25}$$

в некотором $l \ge 1$. Тогда величина Y оценивается верху величиной Y_1, количеством тех наборов $\bar{y}$, для которых справедливо неравенство

$$\left| B_l(\bar{y}) - \frac{b_l}{h_l} \right| \le P_s^{-l} H = \Delta, \tag{26}$$

$$B_l(y) = B_l.$$

Определим теперь периодическую функцию $\psi_1(x)$ равенством

$$\psi_1(x) = \chi\left(x - \frac{b_l}{h_l}\right),$$

где $\chi(x)$ определена соотношением (22). Из условия (26) и определения $\psi_1(x)$ имеем

$$Y_1 \le \sum_{0 \le y_1 \le P_1 q^{-1}} \cdots \sum_{0 \le y_{s-1} \le P_{s-1} q^{-1}} \sum_{0 \le y_{s+1} \le P_{s+1} q^{-1}} \cdots \sum_{0 \le y_r \le P_r q^{-1}} \psi_1(B_l(\bar{y})) = Y_2.$$

Отсюда после разложения функции $\psi_1(x)$ в ряд Фурье

$$\psi_1(x) = \Delta + \sum_{t=-\infty}^{+\infty} c_1(t) e^{2\pi i t x}, \quad c_1(0) = 0;$$

$$|c_1(t)| \le \min\left(\Delta, \frac{1}{\Delta t^2}\right) \quad \text{при} \quad |t| \ge 1,$$

получим

$$\begin{aligned} Y_2 \le P_1 \cdots P_{s-1} P_{s+1} \cdots P_r q^{-r+1} \Delta + \sum_{1 \le t < M} \Delta \, |T(t)| + \\ + \sum_{M \le t < M_1} \Delta^{-1} t^{-2} \, |T(t)| + P_1 \cdots P_{s-1} P_{s+1} \cdots P_r q^{-r+1} P_1^{-\rho}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$T(t)=\sum_{0\le y_1\le P_1q^{-1}}\cdots\sum_{0\le y_{s-1}\le P_{s-1}q^{-1}}\sum_{0\le y_{s+1}\le P_{s+1}q^{-1}}\cdots\sum_{0\le y_r\le P_rq^{-1}}\exp 2\pi itB_l(\bar y),$$
$$M=\Delta^{-1},\ \ M_1=MP_1^{\rho}$$

Оценим сверху модули первых частных производных многочлена $tB_l(\bar y)$ при $|t|\le M_1$:

$$\left|t\frac{\partial}{\partial y_k}B_l(\bar y)\right|\le |t|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_k=1}^{n_k}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}t_k|\beta(t_1,\dots,t_k,\dots,t_r)|\times$$

$$\times q(qy_1)^{t_1}\cdots(qy_k)^{t_k-1}\cdots(qy_r)^{t_r}\ll |t|qP_s^{-l}P_k^{-1}P_1^{\frac{1}{6}}\le 0,5,$$

$$k=1,\dots,s-1,s+1,\dots,r.$$

Отсюда в силу леммы 6 следуют соотношения:

$$|T(t)|\le\left|\int_0^{P_1q^{-1}}\dots\int_0^{P_{s-1}q^{-1}}\int_0^{P_{s+1}q^{-1}}\dots\int_0^{P_rq^{-1}}\exp 2\pi itB_l(\bar y)dy_1\dots dy_{s-1}dy_{s+1}\dots dy_r\right|+$$

$$+O\left(P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_rq^{-r+1}\left(P_1^{-1}+\dots+P_{s-1}^{-1}+P_{s+1}^{-1}+\dots+P_r^{-1}\right)\right)\ll$$

$$\ll P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_rq^{-r+1}\left(|I_{r-1}|+P_1^{-1}+\dots+P_{s-1}^{-1}+P_{s+1}^{-1}+\dots+P_r^{-1}\right);\tag{28}$$

$$I_{r-1}=\int_0^1\cdots\int_0^1\exp 2\pi itA(\bar y)dy_1\cdots dy_{s-1}dy_{s+1}\cdots dy_r;$$

$$A(\bar y)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_{s-1}+t_{s+1}+\dots+t_r\ge 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\gamma(t_1,\dots,t_{s-1},t_{s+1},\dots,t_r)\times$$

$$\times y_1^{t_1}\cdots y_{s-1}^{t_{s-1}}y_{s+1}^{t_{s+1}}\cdots y_r^{t_r};$$

$$\gamma(t_1,\dots,t_{s-1},t_{s+1},\dots,t_r)=\beta_1(t_1,\dots,t_{s-1},l,t_{s+1},\dots,t_r)P_1^{t_1}\cdots P_{s-1}^{t_{s-1}}P_{s+1}^{t_{s+1}}\cdots P_r^{t_r}.$$

В соотношении (25), определяющем δ', возможны два случая:

а) $t_1+\dots+t_{s-1}+t_{s+1}+\dots+t_r\ge 1$,

б) $t_1=\dots=t_{s-1}=t_{s+1}=\dots+t_r=0$.

γ – максимальное из чисел $|\gamma(t_1,\ldots,t_{s-1},t_{s+1},\ldots,t_r)|$ при условии, что $t_1+\cdots+t_{s-1}+t_{s+1}+\cdots+t_r\geq 1$

$$0\leqslant t_1\leq n_1,\ldots,0\leq t_{s-1}\leq n_{s-1},0\leq t_{s+1}\leq n_{s+1},\ldots,0\leq t_r\leq n_r.$$

в случае а) имеем
$$\gamma=\delta' P_s^{-l}\gg \delta P_s^{-l}\gg P_s^{-l}P_1^{0.1\nu}.$$

Случай б) подразделим (см. (26)) на два: $1)h_l>1,\ \ 2)h_l=1$. Тогда для случая 1) справедливы неравенства

$$\gamma=\frac{n_s+1}{m}\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_{s-1}+t_{s+1}+\cdots+t_r\geq 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}|\gamma(t_1,\ldots,t_{s-1},t_{s+1},\ldots,t_r)|=$$

$$=\frac{n_s+1}{m}\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_{s-1}+t_{s+1}+\cdots+t_r\geq 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}|\beta_1(t_1,\ldots,t_{s-1},l,t_{s+1},\ldots,t_r)|\times$$

$$\times P_1^{t_1}\cdots P_{s-1}^{t_{s-1}}P_{s+1}^{t_{s+1}}\cdots P_r^{t_r}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n_s+1}{m}\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_{s-1}+t_{s+1}+\cdots+t_r\geq 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}|\beta_1(t_1,\ldots,t_{s-1},l,t_{s+1},\ldots,t_r)|\times$$
$$\times(qy_1)^{t_1}\cdots(qy_{s-1})^{t_{s-1}}(qy_{s+1})^{t_{s+1}}\cdots(qy_r)^{t_r}\geq$$

$$\geqslant\frac{n_s+1}{m}\Bigg(\frac{b_l}{h_l}-|\beta(0,\ldots,0,l,0\ldots,0)|-$$

$$-\Bigg|\frac{b_l}{h_l}-\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\beta_1(t_1,\ldots,t_{s-1},l,t_{s+1},\ldots,t_r)\times$$

$$\times(qy_1)^{t_1}\cdots(qy_r)^{t_r}\Bigg|\Bigg)\geq\frac{n_{s+1}}{m}\left(\frac{1}{h_l}-P_s^{-l}P_1^{\frac16}-\Delta\right)\gg H^{-1}$$

Выше все неравенства выписаны при условии, что набор $\bar y=(y_1,\ldots,y_{s-1},y_{s+1},\ldots,y_r)$ относится к сумме S_3, и следовательно, для него справедливо соотношение (27)). Рассмотрим теперь случай 2), т.е. случай, когда $h_l=1$. Тогда $b_l=0$, и из неравенств, аналогичных случаю 1), получим

$$\gamma \geq \frac{n_{s+1}}{m}\left(|\beta(0,\ldots,0,l,0\ldots,0)| - \left|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\sum_{t_{s+1}=0}^{n_{s+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\beta_1(t_1,\ldots,t_{s-1},l,t_{s+1},\ldots,t_r)(qy_1)^{t_1}\cdots(qy_{s-1})^{t_{s-1}}(qy_{s+1})^{t_{s+1}}\cdots(qy_r)^{t_r}\right|\right) \geq$$

$$\geq \frac{n_{s+1}}{m}\left(\delta' P_s^{-l} - \Delta\right) \gg \delta P_s^{-l} \gg P_s^{-l}P_1^{0,1\nu}.$$

Таким образом, для величины γ справедливо неравенство

$$\gamma \gg P_s^{-l}P_1^{0,1\nu}.$$

следовательно, по лемме 1.1.5 имеем

$$|I_{r-1}| \ll |t|^{-0,5\nu}\gamma^{-0,5\nu} \ll |t|^{-0,5\nu}P_s^{0,5l\nu}P_1^{-0.05\nu^2},$$

где $\nu\max(n_1,\ldots,n_r)=1$.

Подставляя эту оценку I_{r-1} в (28)), а полученное неравенство $|T(t)|$ в (27)), найдем

$$Y_2 \leq P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_r q^{-r+1}\Delta + P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_r q^{-r+1}\Delta\times$$

$$\times\sum_{1\leq t<M} t^{-0,5\nu}P_s^{0,5l\nu}P_1^{-0,05\nu^2} + P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_r q^{-r+1}\Delta^{-1}\times$$

$$\times\sum_{M\leq t<M_1} t^{-2-0,5\nu}P_s^{0,5l\nu}P_1^{-0,05\nu^2} + P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_r q^{-r+1}P_1^{-\rho},$$

так как $\Delta = P_s^{-l}H = P_s^{-l}P_1^{3\rho n}$, то для величины Y_2 имеем

$$Y_2 \ll P_1\cdots P_{s-1}P_{s+1}\cdots P_r q^{-r+1}P_1^{-\rho}.$$

следовательно

$$|S_3| \leq P_sY \leq P_sY_2 \ll P_1^{1-\rho}P_2\cdots P_r q^{-r+1}.$$

отсюда находим

$$|S(A)| \ll q^{r-1}\left(|S_1|+|S_2|+|S_3|\right) \ll P_1^{1-\rho}P_2\cdots P_r.$$

лемма доказана.

Пусть точка A относится к первому классу. Тогда для координат её $\alpha = \alpha(t_1,\ldots,t_r)$ выполняются соотношения (8)). Пусть $E_j,\ \ j=0,1,2$ – множества целочисленных наборов, определенные в начале §2. Обозначим через Q_j

наименьшее общее кратное чисел $q(t_1,\ldots,t_r)$ – знаменателей рациональных приближений чисел $\alpha(t_1,\ldots,t_r)$ из (8)), – при условии, что набор $(t_1,\ldots,t_r)$ относится к множеству E_j. Эти обозначения будут нами использоваться в леммах 1.1.12, 1.1.13.

Лемма 1.1.12. *Пусть точка A относится к первому классу, и пусть $Q_0 > Q^{0,2}$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(A)| \ll P_1\cdots P_r Q^{-0{,}05\nu+\varepsilon}(|t|,Q)^{0{,}25\nu}$$

Постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n_1,\ldots,n_r,\varepsilon$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1.1.9, после возведения суммы $S(A)$ в четвертую степень и двукратного применения неравенства Коши при некоторых фиксированных натуральных числах $a_1,\ldots,a_r,\ 1\le a_1\le P_1,\ldots,1\le a_1\le P_r$, получим

$$|S(A)|^4 \le P_1^3\cdots P_{r-1}^3P_r^3|W|, \tag{29}$$

где

$$W=\sum_{x\le P_1}\cdots\sum_{x_{r-1}\le P_{r-1}}\sum_{x_r\le P_r}\exp 2\pi it\,\Phi(x_1,\ldots,x_{r-1},x_r),$$

$$\Phi(x_1,\ldots,x_{r-1},x_r)=F_2(x_1,\ldots,x_{r-1},x_r)-F_2(x_1,\ldots,x_{r-1},a_r)-$$
$$-F_2(a_1,\ldots,a_{r-1},a_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_r\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\gamma(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r};$$

$$F_2(x_1,\ldots,x_{r-1},x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}x_r^{t_r};$$

Из определения многочлена $\Phi(x_1,\ldots,x_r)$ находим следующим соотношения для его коэффициентов

$$\gamma(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)=\alpha(t_1,\ldots,t_{r-1},t_r)$$

При $t_1+\cdots+t_{r-1}\ge 1,\ \ t_r\ge 1$, т.е. набор $\bar t\in E_0$;

$$\gamma(0,\ldots,0,t_r)=-\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\alpha(t_1,\ldots,t_{r-1})a_1^{t_1}\cdots a_{r-1}^{t_{r-1}}$$

При $t_r\ge 1$; т.е. набор $\bar t\in E_2$;

$$\gamma(t_1,\ldots,t_{r-1},0)=-\sum_{t_{r-1}=1}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_{r-1})a_r^{t_r}$$

При $t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1$, т.е. набор $\bar t\in E_1$. Отсюда в силу соотношений (8)), определяющих точку первого класса Ω_1, получим

$$\gamma(\bar t)=\frac{a_1(\bar t)}{q_1(\bar t)}+\beta_1(\bar t),$$

$$\frac{a_1(\bar t)}{q_1(\bar t)}=\frac{a(\bar t)}{q(\bar t)},\quad \beta_1(\bar t)=\beta(\bar t)\quad \text{при}\quad \bar t\in E_0; \tag{30}$$

$$\frac{a_1(\bar t)}{q_1(\bar t)}=-\sum_{t_r=1}^{n_r}\frac{a(\bar t)}{q(\bar t)}a_r^{t_r},\quad \beta_1(\bar t)=-\sum_{t_r=1}^{n_r}\beta(\bar t)a_r^{t_r}\quad (\bar t\in E_1); \tag{31}$$

$$\frac{a_1(\bar t)}{q_1(\bar t)}=-\sum_{t_r=1}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\frac{a(\bar t)}{q(\bar t)}a_1^{t_1}\cdots a_{r-1}^{t_{r-1}}; \tag{32}$$

$$\beta_1(\bar t)=-\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\beta(\bar t)a_r^{t_r}a_1^{t_1}\cdots a_{r-1}^{t_{r-1}}\quad (\bar t\in E_2).$$

следовательно, имеем, что $q_1(t_1,\dots,t_{r-1})|Q$ при $t_1+\dots+t_r\geq 1$

$$|\beta_1(t_1,\dots,t_{r-1},0)|\leq\frac{n_r+1}{m}P_1^{-t_1}\cdots P_r^{-t_r}P_1^{0,1\nu}\quad \text{при}\quad t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1;$$

$$|\beta_1(0,\dots,0,t_r)|\leq\frac{(n_1+1)\cdots(n_{r-1}+1)}{m}P_r^{-t_r}P_1^{0,1\nu}\quad \text{при}\quad t_1+\dots+t_r=1.$$

Преобразуем теперь сумму W подстановкой $x_s=Q_0y_s+z_s$, $1\leq z_s\leq Q_0$, $-z_sQ_0^{-1}<y_s\leq(P_s-z_s)Q_0^{-1}$, $s=1,\dots,r$. получим

$$W=\sum_{z_1=1}^{Q_0}\cdots\sum_{z_r=1}^{Q_0}\exp(2\pi it\Phi_1(z_1,\dots,z_r))W_1, \tag{33}$$

$$W=\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_r}\exp(2\pi it\Phi_2(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_r+z_r)),$$

где суммирование по переменным y_s ведется по всем целым числам промежутка $-z_sQ_0^{-1}<y_s\leq(P_s-z_s)Q_0^{-1}$, $s=1,\dots,r$;

$$\begin{gathered}\Phi_1(z_1,\dots,z_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=1}^{n_r}\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)}z_1^{t_1}\cdots z_r^{t_r}+\\ +\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\frac{a_1(t_1,\dots,t_{r-1},0)}{q_1(t_1,\dots,t_{r-1},0)}z_1^{t_1}\cdots z_{r-1}^{t_{r-1}}+\sum_{t_r=1}^{n_r}\frac{a_1(0,\dots,0,t_r)}{q_1(0,\dots,0,t_r)}z_r^{t_r};\end{gathered} \tag{34}$$

$$\Phi_2(x_1,\ldots,x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=0}^{n_r}\beta(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\cdots x_r^{t_r}+$$

$$+\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\beta_1(t_1,\ldots,t_{r-1},0)x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}+\sum_{t_r=1}^{n_r}\beta_1(0,\ldots,0,t_r)x_r^{t_r}.$$

Оценим первые частные производные по y_s многочлена $t\Phi_2(Q_0y_1+z_1,\ldots,Q_0y_r+z_r)$ при $|t|\le Q^{0,2\nu}$:

$$\left|t\frac{\partial}{\partial y_s}\Phi_2(Q_0y_1+z_1,\ldots,Q_0y_r+z_r)\right|\le|t|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_s=1}^{n_s}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=1}^{n_r}t_s|\beta(t_1,\ldots,t_r)|\times$$

$$\times Q_0(Q_0y_1+z_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_s+z_s)^{t_s-1}\cdots(Q_0y_r+z_r)^{t_r}+$$

$$+|t|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_s=1}^{n_s}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}t_s|\beta_1(t_1,\ldots,t_r,0)|\times$$

$$\times Q_0(Q_0y_1+z_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_s+z_s)^{t_s-1}\cdots(Q_0y_r+z_r)^{t_{r-1}}\ll$$

$$\ll|t|Q_0P_r^{-1}P_1^{0,1\nu}\ll P_1^{-0,5}\le 0,5\quad s=1,\ldots,r-1;$$

$$\left|t\frac{\partial}{\partial y_s}\Phi_2(Q_0y_1+z_1,\ldots,Q_0y_r+z_r)\right|\ll|t|Q_0P_r^{-1}P_1^{0,1\nu}\le 0,5.$$

Следовательно, по лемме 1.1.6 имеем

$$W_1=\int_{-z_1Q_0^{-1}}^{(P_1-z_1)Q_0^{-1}}\cdots\int_{-z_rQ_0^{-1}}^{(P_r-z_r)Q_0^{-1}}\exp 2\pi it\Phi_2(Q_0y_1+z_1,\ldots,Q_0y_r+z_r)dy_1\cdots dy_r+$$
$$+O(P_2\cdots P_rQ_0^{-r+1}).$$

Сделаем замену переменных интегрирования

$$x_s=P_s^{-1}(Q_0y_s+z_s),\quad s=1,\ldots,r$$

Получим равенство

$$W_1=P_1\cdots P_rQ_0^{-r}I_r+O(P_2\cdots P_rQ_0^{-r+1})$$

где

$$I_r=\int_0^1\cdots\int_0^1\exp 2\pi it\Phi_3(x_1,\ldots,x_r)dx_1\cdots dx_r,$$

$$\Phi_3(x_1,\dots,x_r)=\Phi_2(P_1x_1,\dots,P_rx_r).$$

Подставляя W_1 в (33) и переходя к неравенствам, найдем

$$|W|\le (P_1,\dots,P_rQ_0^{-r})|S(Q_0\Phi_1(z_1,\dots,z_r))|\cdot|I|+O(P_1\cdots P_{r-1}Q_0^{-r+1}),$$

где

$$S(Q_0,\Phi_1(z_1,\dots,z_r))=\sum_{z_1=1}^{Q_0}\cdots\sum_{z_r=1}^{Q_0}\exp 2\pi i\Phi_1(z_1,\dots,z_r)$$

и многочлен $\Phi_1(z_1,\dots,z_r)$ определен равенством (34)). Так как коэффициенты многочлена $\Phi_1(z_1,\dots,z_r)$ являются рациональными числами, наименьшее общее кратное знаменателей которых равно Q_0, то по лемме 1.1.4 имеем

$$|S(Q_0,\Phi_1(z_1,\dots,z_r))|\ll Q_0^{r-\nu+4\varepsilon}(|t|,Q_0)^{\nu},$$

где $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число.Следовательно,

$$|W|\ll P_1\cdots P_rQ_0^{-\nu+4\varepsilon}(|t|,Q_0)^{\nu},$$

представим это неравенство в (29)), получим

$$\begin{aligned}|S(A)|\le P_1^{0,75}\cdots P_r^{0,75}|W|^{0,25}\ll P_1\cdots P_rQ_0^{-0,25\nu+\varepsilon}(|t|,Q_0)^{0,25\nu}\ll\\ \ll P_1\cdots P_rQ^{-0,05\nu+\varepsilon}(|t|,Q)^{0,25\nu}\end{aligned}$$

лемма доказана.

Лемма 1.1.13. *Пусть точка A относится к первому классу, Ω_1 и пусть $Q_0\le Q^{0,2}$, $Q_2>Q^{0,4}$. Тогда справедлива оценка*

$$|S(A)|\ll HP_1\cdots P_r\Delta(|t|,Q)^{0,5\nu},\qquad \Delta=Q^{-0,2\nu},$$

$$H=(\ln P)^{\frac{\ln\ln P}{\ln(1+\varepsilon_0)}}.$$

Постоянная в знаке $\ll$ зависит только от $n_1,\dots,n_r,\varepsilon$.

Доказательство. Имеем неравенство

$$|S(A)|\le T_1, \tag{35}$$

где

$$T_1=\sum_{x_1\le P_1}\cdots\sum_{x_{r-1}\le P_{r-1}}\left|\sum_{p\le P_r}\exp 2\pi itF_1(x_1,\dots,x_{r-1},p)\right|,$$

$$F_2(x_1,\dots,x_{r-1},x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_{r-1},t_r)x_1^{t_1}\cdots x_{r-1}^{t_{r-1}}x_r^{t_r}.$$

Представим переменные x_s, $s=1,\dots,r-1$, в виде

$$x_s=Q_0y_s+z_s,\ \ 1\le z_s\le Q_0,\quad -zQ_0^{-1}<y_s\le (P_s-z_s)Q_0^{-1}. \tag{36}$$

когда получим соотношение

$$F_1(Q_0y_1+z_1,\dots,Q_0y_{r-1}+z_{r-1},p)\equiv\Phi(p)(\mathrm{mod}1),$$

где

$$\Phi(p)=\sum_{s=1}^{n_r}A_sp^s=\sum_{s=1}^{n_r}\left(\Phi_s(z_1,\dots,z_{r-1})+\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\beta(t_1,\dots,t_{r-1},s)\times\right.$$

$$\left.\times\,(Q_0y_1+z_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1}+z_{r-1})^{t_{r-1}}\right)p^s=\sum_{s=1}^{n_r}\left(\frac{a_s}{q_s}+B_s\right)p^s;$$

$$\Phi_s(z_1,\dots,z_{r-1})=\frac{a_s}{q_s}=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\frac{a(t_1,\dots,t_{r-1},s)}{q(t_1,\dots,t_{r-1},s)}z_1^{t_1}\cdots z_{r-1}^{t_{r-1}}$$

Для величины B_s, $1\le s\le n_r$ имеет оценку

$$|B_s|=\left|\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\beta(t_1,\dots,t_{r-1},s)(Q_0y_1+z_1)^{t_1}\cdots(Q_0y_{r-1}+z_{r-1})^{t_{r-1}}\right|\le$$

$$\le(n_1+1)\cdots(n_{r-1}+1)\delta P_r^{-s}=\frac{m}{(n_r+1)}\delta P_r^{-s}$$

В силу того, что точка A относится к первому классу, имеем $|\delta|\le m^{-1}P_1^{0,1\nu}$. Следовательно,

$$\delta'=|B_s|P_r^s\le\frac{1}{n_r+1}P_1^{0,1\nu}\le\frac{1}{n_r+1}P_r^{\frac{1}{10n_r}}.$$

Отсюда находим, что точка $(A_1,\dots,A_{n_r})$ относится к первому классу относительно параметра P_r. Таким образом, из леммы 1.1.1 получим

$$T_2=\left|\sum_{p\le P_r}\exp 2\pi it\Phi(p)\right|\ll HP_r\Delta_1(|t|,Q_2)^{0,5/n_r},$$

$$\Delta_1=Q_2^{-\frac{1}{2n_r+\varepsilon}},\Delta_1(|t|,Q_2)^{\frac{1}{2n_r}}\le Q_2^{-0,5\nu+\varepsilon}(|t|,Q_2)^{0,5/n_r}=\Delta'.$$

Поставим эту оценку в (35))

$$|S(A)|\le P_1\cdots P_{r-1}T_2\ll HP_1\cdots P_r\Delta_r(|t|,Q)^{0,5\nu},\quad \Delta_r=Q^{-0,2\nu}.$$

лемма доказана.

1.3 Теоремы

Теорема 1.1.1. *Пусть точка A принадлежит второму классу Ω_2. Тогда при $1 \le t \le P_1^{2\rho}$, справедлива оценка*

$$|S(A)| \ll P_1 \cdots P_{r-1}\Delta, \quad \Delta = e^{8\kappa} P_1^{-\rho},$$

$$\kappa = n_1 + \mu_2 n_2 + \cdots + \mu_r n_r, \quad \mu_2, \ldots, \mu_r$$

натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$-1 < \frac{\ln P_s}{\ln P_1} - \mu_s \le 0, \quad s = 2, \ldots, r; \quad \rho = \frac{1}{128 m\kappa \log(8m\kappa)}.$$

Пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1. Тогда при $1 \le t \le Q^{0,2\nu}$ имеем оценку

$$|S(A)| \ll H P_1 \cdots P_r \Delta(t, Q)^{0,25\nu}$$

$$\Delta = Q^{-0,05\nu+\varepsilon}, \quad H = (\ln P)^{\frac{\ln\ln P}{\ln(1+\varepsilon_0)}}$$

И, наконец, пусть точка A принадлежит первому классу Ω_1,

$$\delta = \max_{t_1+\cdots+t_r \ge 1} |\beta| P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r} > 1$$

Тогда при $1 \le t \le P_1^{0,2\nu}$ будем имеет:

$$|S(A)| \ll H P_1, \ldots, P_r \Delta, \quad \Delta = \delta^{-\nu+\varepsilon}$$

Постоянные в знаках $\ll$ зависить только от $n_1, \ldots, n_r, \varepsilon, \varepsilon_0$ $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число.

Доказательство теоремы проведем методом математической индукции по числу переменных r. Утверждение теоремы справедливо при $r = 1$ (лемма 1). В силу предположения индукции при $r-1$ переменной и любой точки A имеет место оценка суммы $S(A)$, сформулированная в теореме. Докажем теорему для r переменных.

Пусть точка A относится ко второму классу Ω_2. Возможны четыре случая (относительно величин Q, Q_0, Q_1, Q_2 см. начало §2):

1. $Q_0 > P_1^{\nu/80}$;
2. $Q_0 \le P_1^{\nu/80}, \quad Q_2 > P_1^{3\nu/80}$;
3. $Q_0 \le P_1^{\nu/80}, \quad Q_2 \le P_1^{\nu/80}, \quad Q > P_1^{0,1\nu}$;
4. $Q > P_1^{0,1\nu}, \quad \delta \le m^{-1} P_1^{0,1\nu.}$

В случае 1 оценка суммы $S(A)$ получена в лемме 9, в случае 2 - в лемме 10, в случае 4 - в лемме 11. Осталось разобрать случай 3.

Очевидно имеем неравенство

$$|S(A)| \leq T_1 = \sum_{x_r=1}^{P_r} \left| \sum_{p_1 \leq P_1} \cdots \sum_{p_{r-1} \leq P_{r-1}} \exp 2\pi i t F_1(p_1, \ldots, p_{r-1}, x_r) \right|,$$

$$F_1 = F_1(p_1, \ldots, p_{r-1}, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1} \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots t_{r-1}, t_r) p_1^{t_1} \ldots p_{r-1}^{t_{r-1}} x_r^{t_r} =$$

$$= \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1} \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} f_{t_1,\ldots,t_{r-1}}(x_r) p_1^{t_1} \cdots p_{r-1}^{t_{r-1}}$$

разобьем переменную x_r на арифметические прогрессии с разностью, равной Q_0.

$$x_r = Q_0 y_r + z_r, \quad 1 \leq z_r \leq Q_0, \quad -z_r Q_0^{-1} < y_r \leq (P_r - z_r) Q_0^{-1} \tag{37}$$

Имеем

$$T_1 \leq T_2,$$

где

$$T_2 = \sum_{Z_r=1}^{Q_0} \sum_{y_r} \left| \sum_{p_1 \leq P_1} \cdots \sum_{p_{r-1} \leq P_{r-1}} \exp 2\pi i t F_1(p_1, \ldots, p_{r-1}, Q_0 y_r + z_r) \right|,$$

где переменная y_r пробегает значения из (37). Представим многочлен F_1 в виде

$$F_1(p_1, \cdots p_{r-1}, Q_0 y_r + z_r) = \Phi(p_1, \cdots p_{r-1}, Q_0 y_r) =$$

$$= \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1} \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha_1(t_1, \ldots t_{r-1}, t_r) p_1^{t_1} \ldots p_{r-1}^{t_{r-1}} (Q_0 y_r)^{t_r} =$$

$$= \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_{r-1} \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}} q_{t_1,\ldots t_{r-1}}(Q_0 y_r) p_1^{t_1} \ldots p_{r-1}^{t_{r-1}}.$$

В силу леммы 7 справедливы соотношения:

$$\alpha_1(t_1, \ldots t_{r-1}, t_r) = \alpha_1 = \frac{a_1}{q_1} + \beta_1, \tag{38}$$

$$Q_4 = Q_4', \quad \delta_0 \ll \delta_0' \ll \delta_0,$$

где

$$Q_4' = \underset{t_1+\cdots+t_{r-1} \geq 1}{H.O.K} q_1, \quad Q_4 = \underset{t_1+\cdots+t_{r-1} \geq 1}{H.O.K} q,$$

$$\delta_0' = \max_{t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1} P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}|\beta_1|,$$

$$\delta_0 = \max_{t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1} P_1^{t_1}\cdots P_r^{t_r}|\beta|.$$

Обозначим через Q_j', $Q'(t_1,\dots,t_{r-1})$ величины

$$Q_j' = \underset{(t_1,\dots,t_r)\in E_j}{H.O.K}\, q_1, \quad j=1,2;$$
$$Q'(t_1,\dots,t_{r-1}) = \underset{t_1\geq 1}{H.O.K}\, q_1(t_1,\dots,t_{r-1},t),$$
$$Q(t_1,\dots,t_{r-1}) = \underset{t_1\geq 1}{H.O.K}\, q(t_1,\dots,t_{r-1},t),$$

$$(0\leq t_1\leq n_1,\dots,0\leq t_{r-1}\leq n_{r-1}, \quad t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1)$$

где

$$Q_0 = \underset{t_1,\dots,t_{r-1}\geq 1}{H.O.K}\, Q(t_1,\dots t_{r-1}),$$

$$Q_0' = \underset{t_1,\dots,t_{r-1}\geq 1}{H.O.K}\, Q'(t_1,\dots t_{r-1}).$$

Рассмотрим вновь соотношения (38) для коэффициентов α_1 и применим лемму 6 к многочленам $f_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_0y_z+z_r)$ и $q_{t_1,\dots,t_{r-1}}(Q_0y_r)$. Получим

$$Q(t_1,\dots,t_{r-1}) = Q'(t_1,\dots,t_{r-1}), \quad t_1+\dots+t_{r-1}\geq 1.$$

следовательно, $Q_0 = Q_0'$,

$$Q = [Q_0, Q_1] = Q_4' = [Q_0, Q_1'] \geq P_1^{3\nu/80},$$

$$Q' \geq Q_4 Q_0^{-1} \geq P_1^{\nu/40}.$$

преобразуем многочлен $\Phi(p_1,\dots,p_{r-1},Q_0y_r)$ исходя из соотношений (38) для $\alpha_1=\alpha_1(t_1,\dots,t_{r-1},t_r)$:

$$\Phi(p_1,\dots,p_{r-1}Q_0y_r) = \sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\sum_{t_r=0}^{n_r}\times$$
$$\times\left(\frac{a_1(t_1,\dots,t_r)}{q_1(t_1,\dots t_r)}+\beta_1(t_1,\dots,t_r)\right)p_1^{t_1}\cdots p_{r-1}^{r-1}(Q_0y_r)^{t_r}\equiv$$
$$\equiv\Phi(t_1,\dots,t_{r-1},y_r)\quad (mod 1),$$

$$\Phi_1(p_1,\ldots,p_{r-1}y_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\ldots+t_{r-1}\geqslant 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}\left(\frac{a_1(t_1,\ldots,t_{r-1})}{q_1(t_1,\ldots t_{r-1})}+\right.$$

$$\left.+\sum_{t_r=0}^{n_r}\beta_1(t_1,\ldots,t_r)(Q_0y_r)^{t_r}\right)p_1^{t_1}\cdots p_{r-1}^{t_{r-1}}=$$

$$=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_{r-1}\geq 1}}^{n_1}\cdots\sum_{t_{r-1}=0}^{n_{r-1}}B(t_1,\ldots,t_{r-1})p_1^{t_1}\cdots p_{r-1}^{t_{r-1}}.$$

Следовательно,

$$T_2\leq Q_0\sum_{0\leq y_r\leq P_rQ_0^{-1}}\left|\sum_{p_1\leq P_1}\cdots\sum_{p_{r-1}\leq P_{r-1}}\exp 2\pi it\Phi_1(p_1,\ldots,p_{r-1},y_r)\right|=Q_0T_3.$$

Так как суммы T_3 проводится аналогично оценке соответствующей суммы T_3 из леммы 10. Многочлены B_s необходимо заменить на $B(t_1,\ldots,t_{r-1})$, величины $\tau(s)=P_r^{s-\frac{1}{6}}$ — на величины $\tau(t_1,\ldots,t_{r-1})=P_1^{t_1}\ldots P_{r-1}^{t_{r-1}}P_1^{-\frac{1}{6}}$, $Q(y)=Q(y_1,\ldots,y_{r-1})$ — на $Q(y_r)$, $\delta(\overline{y})$ — на $\delta(y_r)$, наборы $\overline{y}=(y_1,\ldots,y_{r-1})$ — на переменную y_r, и в соответствующих местах вместо оценки однократной тригонометрической суммы (лемма 1) применить оценку $(r-1)$- кратной суммы, справедливой в силу предположения индукции.

Для точек A, относящихся ко второму классу, оценка суммы $S(A)$ получена.

Пусть точка A относится к первому классу Ω_1. Возможны следующие случаи (величины Q_1,Q_0,Q_1,Q_2 определены перед формулировкой леммы 12).

1. $Q_0>q^{0,2}$;
2. $Q_0\leq Q^{0,2},Q_2>Q^{0,4}$;
3. $Q_0\leq Q^{0,2},Q_2\leq Q^{0,4}$;
4. $Q\leq P_1^{0,1v},1\leq\delta\leq m^{-1}P_1^{0,1v}$;

В случае 1 оценка суммы $S(A)$ получена в лемме 12, в случае 2 — в лемме 13. Вывод оценки $S(A)$ в случае 3 аналогичен вводу ее в случае 2. Для этого в формулировке и доказательстве леммы 13 необходимо заменить Q_2 на Q_1, набор неизвестных $(x_1,\ldots,x_{r-1})$ на переменную x_r, переменную p — на набор $(p_1,\ldots,p_{r-1})$, B_s на $B(t_1,\ldots,t_{r-1})$ и в соответствующих местах вместо леммы 1 воспользоваться оценкой $(r-1)$-кратной суммы по простым числам, справедливой в силу предположения индукции.

Осталось разобрать случай 4. Так как точка A относится первому классу, то для каждой ее координаты имеют место соотношения:

$$\alpha(t_1,\ldots,t_r)=\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\ (a,q)=1,$$

$$\delta = \max_{t_1+\dots+t_r\ge 1} |\beta| P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r} \le m^{-1}P_1^{0,1v},$$

$$Q = \underset{t_1+\dots+t_r\ge 1}{H.O.K}\, q \le P_1^{0,1v}.$$

В рассматриваемом случае $\delta \ge 1$. Положим

$$\delta = |\beta(t_1,\dots,t_r)|P_1^{t_1}\dots P_r^{t_r}, \quad t_s\ge 1 \tag{39}$$

Тогда для суммы $S(A)$ имеем (при $q\ne s$):

$$|S(A)| \ge \sum_{x_q\le P_q} |T_1|,$$

$$T_1 = \sum_{p_1\le P_1}\cdots\sum_{p_{q-1}\le P_{q-1}}\sum_{p_{q+1}\le P_{q+1}}\cdots\sum_{p_r\le P_r} exp 2\pi it F_1(p_1,\dots,p_{q-1},x_q,p_{q+1},\dots,p_r),$$

$$F_1(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_q=0}^{n_q}\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{q-1}=0}^{n_{q-1}}\sum_{t_{q+1}=0}^{n_{q+1}}\cdots\sum_{t_r}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}.$$
$$t_1+\dots+t_{q-1}+t_{q+1}+\dots+t_r\ge 1$$

Представим теперь переменную x_q в виде $x_q = Qy+z,\ 1\le z\le Q,$
$-zQ^{-1} < y \le (P_q - z)Q^{-1}$. Тогда

$$F_1(x_1,\dots,x_{q-1},Q_{y+z},x_{q+1}\dots,x_r) \equiv \Phi(x_1,\dots,x_{q-1},x_{q+1}\dots,x_r)(mod 1),$$

$$\Phi(x_1,\dots,x_{q-1},x_{q+1}\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_{q-1}=0}^{n_{q-1}}\sum_{t_{q+1}=0}^{n_{q+1}}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\times$$
$$t_1+\dots+t_{q-1}+t_{q+1}+\dots+t_r\ge 1$$

$$\times A(t_1,\dots,t_{q-1},t_{q+1},\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_{q-1}^{t_{q-1}}x_{q+1}^{t_{q+1}}\dots x_r^{r}$$

$$A(t_1,\dots,t_{q-1},t_{q+1},\dots,t_r) = \sum_{t_q=0}^{n_q}\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)}z^{t_q} + \sum_{t_q=0}^{n_q}\beta(t_1,\dots,t_r)(Qy+z)^{t_q}.$$

Фиксируем z, и покажем, что точка A_1 с координатами $(t_1,\dots,t_{q-1}t_{q+1},\dots,t_r)$ относится к первому классу. Действительно, знаменатель несократимой дроби $\frac{a}{h}$,

$$\frac{a}{h} = \sum_{t_q=0}^{n_q}\frac{a(t_1,\dots,t_r)}{q(t_1,\dots,t_r)}z^{t_q},$$

делит наименьшее общее кратное Q всех чисел $q(t_1,\dots,t_r)$, $t_1+\ldots+t_r\ge 1$. И следовательно, наименьшее общее кратное Q не превосходит $P_1^{0,1\nu}$. Величина B,

$$B = B(t_1,\dots,t_{q-1}t_{q+1},\dots,t_r) = \sum_{t_q=0}^{n_q}\beta(t_1,\dots,t_r)(Qy+z)^{t_q},$$

удовлетворяет неравенству

$$|B| \leqslant (n_q+1)\delta P_1^{-t_1}\dots P_{q-1}^{-t_{q-1}}P_{q+1}^{-t_{q+1}}\dots P_r^{-t_r} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n_q+1)}{m}P_1^{-t_1}\dots P_{q-1}^{-t_{q-1}}P_{q+1}^{-t_{q+1}}\dots P_r^{-t_r}P_1^{0,1\nu}.$$

Отсюда имеем

$$\delta_1 = \max_{t_1+\ldots+t_{q-1}+t_{q+1}+\ldots+t_r\leqslant 1}|B|P_1^{t_1}\dots P_{q-1}^{t_{q-1}}P_{q+1}^{t_{q+1}}\dots P_r^{t_r} \leqslant \frac{(n_q+1)}{m}P_1^{0,1\nu}.$$

Таким образом, точка A_1 относится к первому классу. Пусть $(t_1,\dots,t_r)$ – набор, для которого выполняется соотношение (39). Обозначим через φ и g многочлены

$$(Qy+z) = B(t_1,\dots,t_{q-1}t_{q+1},\dots,t_r), \qquad g(\nu) = \varphi(P_0,\nu),$$

когда максимум модулей коэффициентов $g(x)$ равен

$$\delta P_1^{-t_1}\dots P_{q-1}^{-t_g-1}P_{q+1}^{-t_g+1}\dots P_r^{-t_r}.$$

Пусть $K(G)$ – количество целых значений y, для которых

$$G < |\varphi(Qy+z)| \leq 2G$$

Тогда в силу предположения индукции имеем

$$|S(A)| \leq BP_1\dots P_{q-1}P_{q+1}\dots P_r + \sum_{j=0}^{[\log P_q]+1}$$
$$K(2^jD)P_1\dots P_{q-1}P_{q+1}\dots P_r 2^{-j\nu}(\log P_r)^{r-2},$$

$$D = P_1^{-t_1}\dots P_{q-1}^{-t_g-1}P_{q+1}^{-t_g+1}\dots P_r^{-t_r}.$$

где B – количество целых y, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(Qy+z)| \leq D.$$

В силу леммы 8 мера μ тех точек x, для которых $|g(x)| \leq 2^jD$ не превосходит $\ll \min(1,(2^j\delta^{-1})^{\frac{1}{n_q}})$.

так как предыдущее множество точек состоит не более чем из n промежутков, то из определения $g(x)$ и $\varphi(Qy+z)$ и неравенства (39) имеем

$$K(2^jD) \ll P_qQ^{-1}(2^j\delta^{-1})^{\frac{1}{nq}} + 1 \ll$$

$\ll P_qQ^{-1}(2^j\delta^{-1})^{\nu}+1$, если $2^j\delta^{-1}<1$;

$K(2^jD) \ll P_gQ^{-1}+1$, если $2^j\delta^{-1} \geq 1$ Подставим найденные оценки в (39) и заменяя в (39) при $2^j\delta^{-1} \geq 1$ величину 2^j на δ, получим

$$|S(A)| \ll P_1 \dots P_r \delta^{-\nu}(\log P_r)^{r-1}.$$

Теорема доказана полностью.

Лемма 14. *Пусть* $\varepsilon < 0,01$, $L = \log P$, $\delta_0 \leq e^{L^\varepsilon}$, $Q \leqslant e^{L^\varepsilon}$, $t \leq e^{2\nu L^\varepsilon}$. *Тогда для суммы*

$$S' = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i f(p)},$$

где

$$f(p) = \alpha_n p : n + \ldots + \alpha_1 p,$$

имеем неравенство

$$S' \ll PL^{-1+9\varepsilon}(t,Q)^{0,5\nu}Q^{-0,5\nu+\varepsilon'},$$

или также

$$S' \ll PL^{-1+9\varepsilon}(t,\delta_0)^{-0,5\nu}, \quad \textit{если} \quad \delta_0 \geq 1.$$

Доказательство см. в 4,стр. 126, теорема 1а.

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon < 0,01$, $\delta \leq e^{L^\varepsilon}$, $Q \leq e^{L^\varepsilon}$, $t \leq e^{2\nu L^\varepsilon}$ *(величины* δ *и* Q *определены в начале §2). Тогда для суммы*

$$S(A) = \sum_{p_1 \leq P_1} \ldots \sum_{p_r \leq P_r} \exp 2\pi i t F(p_1, \ldots, p_r),$$

где

$$F(p_1, \ldots, p_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_r \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, \ldots, t_r) p_1^{t_1} \ldots p_r^{t_r}$$

Имеем оценку

$$S(A) \ll P_1 \ldots P_r L^{-1+9\varepsilon}(t,Q)^{0,5\nu}Q^{-0,5\nu+\varepsilon'},$$

также

$$S(A) \ll P_1 \ldots P_r L^{-1+9\varepsilon}(t,\delta_0)^{-0,5\nu}, \quad \textit{если} \quad \delta \geq 1.$$

Доказательство теоремы 2 проводится также дословно, как и доказательство теоремы 1, только в соответствующих местах вместо леммы 1 применяется лемма 14.

2 Распределение дробных долей значений многочленов от нескольких переменных в случае, когда переменные пробегают простые числа

2.1 Дробные доли одного многочлена

Докажем теорему 2 о распределении дробных долей значений многочлена от нескольких переменных, каждая из которых пробегает последовательность простых чисел. Настоящая теорема обобщает на кратный случай теорему И.М.Виноградова [4], глава 8, стр.134.

Теорема 3. *Пусть $p_1, \ldots, p_r$ – простые числа, $F(x_1, \ldots, x_r)$ –многочлен, определенный соотношением (3), $D(\sigma)$ –количество наборов $p_1, \ldots, p_r$, $1 < p_1 \leqslant P_1, \ldots, 1 < p_r \leqslant P_r$, удовлетворящих условию*

$$\Big\{F(p_1, \ldots, p_r)\Big\} < \sigma.$$

Представим $D(\sigma)$ в виде

$$D(\sigma) = \pi(P_1) \cdot \ldots \cdot \pi(P_r)\sigma + \lambda(P_1, \ldots, P_r, \sigma),$$

где $\pi(x)$ – количество простых, не превосходящих x. Тогда справедлива оценка

$$\Big|\lambda(P_1, \ldots, P_r, \sigma)\Big| << P_1^{1+\varepsilon} \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_r \Delta_1,$$

где Δ_1 для многочлена $F(x_1, \ldots, x_r)$, относящегося ко второму классу определяется так:

$$\Delta_1 = e^{8\kappa} P_1^{-\rho}, \rho^{-1} = 130 m\kappa \log m\kappa;$$

а для многочлена $F(x_1, \ldots, x_r)$, относящегося ко первому классу,

$$\Delta_1 = Q^{-0{,}05\nu+\varepsilon};$$

и если к тому же $\delta > 1$, то

$$\Delta_1 = \delta^{-\nu+\varepsilon};$$

причем $\varepsilon > 0$ –сколь угодно малая постоянная.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Delta_1 < 0{,}1$ и $2\Delta_1 < \sigma < 1 - \Delta_1/2$. Рассмотрим функцию $\Psi(x)$ из леммы 2, гл. II книги [4] при $r = 1$, $\Delta = \Delta_1$, $\alpha = 0{,}5\Delta_1, \beta = \Sigma$. Получис

$$D(\sigma) = N(\sigma, \Delta_1) + O(P_1^{1+\varepsilon} \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_r \Delta_1),$$

где

$$N(\sigma, \Delta_1) = \sum_{p_1 \leqslant P_1} \ldots \sum_{p_r \leqslant P_r} \Psi\Big(F\big(p_1, \ldots, p_r\big)\Big),$$

Положим
$$\Delta_2^{-1} = \begin{cases} P_1^{\rho}, & \text{если } A \in \Omega_2 \\ Q^{0.1\nu}, & \text{если } A \in \Omega_1 \\ P_1^{0.1\nu}, & \text{если } A \in \Omega_1,\ \delta > 1 \end{cases}$$

Тогда после разложения функции $\Psi(x)$ в ряд Фурье будем иметь:
$$N(\sigma, \Delta_1) = \pi(P_1) \cdots \pi(P_r)\sigma + H + O\left(P_1^{1+\varepsilon} P_2 \cdots P_r \Delta_1\right),$$
где
$$H \ll \sum_{0<t<\Delta_2^{-1}} \frac{|S_t(A)|}{t} + \sum_{\Delta_2^{-1} \leqslant t < \Delta_2^{-2}} \frac{|S_t(A)|}{\Delta_1 t^2} + \sum_{t > \Delta_2^{-2}} \frac{|S_t(A)|}{\Delta_1 t^2} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$
Для оценки Σ_1 и Σ_2 воспользуемся оценкой суммы $S_t(A)$ из теоремы 1, а для суммы Σ_3 – тривиальной оценкой $P_1, \ldots, P_r$ получим
$$H << P_1^{1+\varepsilon} P_2 \ldots P_r \Delta_1.$$
Следовательно
$$D(\sigma) = \pi(P_1) \cdot \ldots \cdot \pi(P_r)\sigma + \lambda(P_1^{1+\varepsilon}, \ldots, P_r, \sigma),$$
что и требовалось доказать.

3 Совместные распределения

Введем следующие обозначения. Пусть $f_j(x_1, \ldots, x_r)$– многочлены от r– переменных с вещественными коэффициентами,
$$f_j(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha_j(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}.$$
Пусть далее, $m = (n_1 + 1) \ldots (n_r + 1)$, $P_1, \ldots, P_r$– положительные числа, $1 < P_1 = \min(P_1, \ldots, P_r) = P$, $\Delta = P^{-2\rho}$, $\rho^{-1} = 128 m\kappa \log 8m\kappa$, κ–величина, определенная в лемме 3 гл.1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$–целые числа,
$$|\alpha_j| \leqslant \Delta^{-1},\ j = 1, \ldots, s.$$
Определим вещественные числа B равенствами
$$B = B(t_1, \ldots, t_r; d_1, \ldots, d_s) = d_1\alpha_1(t_1, \ldots t_r) + \ldots + d_s\alpha_s(t_1, \ldots t_r).$$

Пусть a и q–целые числа,
$$B = \frac{a}{q} + z,\ q \geqslant 1, (a, q) = 1, |z| \leqslant (q\tau)^{-1},$$
$$\tau = \tau(t_1, \ldots, t_r) = P_1^{z_1} \ldots P_r^{t_r} P^{-1/6}.$$

Пусть при фиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ число $Q = Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ есть наименьшее кратное чисел $q = q(t_1, \ldots, t_r)$ с условиями $t_1 + \ldots + t_r \geqslant 1, 0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r$.

Положим

$$Q_0 = \min_{d_1,\ldots,d_s} Q(d_1, \ldots, d_s),$$

$$\delta = \delta(d_1, \ldots, d_s) = \max_{t_1,\ldots,t_r} P_1^{t_1} \ldots P_r^{t_r} |z(t_1, \ldots, t_r)|,$$

где $t_1 + \ldots t_r \geqslant 1,\ 0 \leqslant t_1 \leqslant n_1,\ \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r, \quad \delta_0 = \min\limits_{d_1,\ldots,d_s} \delta(d_1, \ldots, d_s)$.

Разобьем, далее, наборы многочленов $(f_1, \ldots, f_s)$ с коэффициентами

$$0 \leqslant \alpha_j(t_1, \ldots, t_r) < 1, j = 1, \ldots, s;\ 0 \leqslant t_1 \leqslant n_1,\ \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r$$

на два класса E_1 и E_2. К первому классу E_1 отнесем такие наборы многочленов $(f_1, \ldots, f_s)$, для которых

$$Q_0 \leqslant P^{0,1}$$

все оставшиеся наборы многочленов $(f_1, \ldots, f_s)$ отнесем к классу E_2.

Теорема 4. *Пусть $D(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ – число наборов простых чисел $p_1, \ldots, p_r$, удовлетворяющих условиям:*

$$\{f_1(p_1, \ldots, p_r)\} < \sigma_1, \ldots,\ \{f_s(p_1, \ldots, p_r)\} < \sigma_s;$$

$$2 \leqslant p_1 \leqslant P_1, \ldots, 2 \leqslant p_r \leqslant P_r.$$

Представим $D(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ в виде

$$D(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) = \pi(P_1) \cdot \ldots \cdot \pi(P_r) \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_s + \lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_s).$$

Тогда

$$\lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \ll P_1 \cdot \ldots \cdot P_r \Delta_1,$$

где Δ_1 для набора многочленов второго класса определяется так:

$$\Delta_1 = e^{8\kappa} P^{-\rho 1}, \rho_1^{-1} = 130 m\kappa \log 8m\kappa,$$

а для набора многочленов $(f_1, \ldots, f_s)$ первого класса

$$\Delta_1 = (Q_0 \delta_0)^{-\nu + \varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть $S(d_1, \ldots, d_s)$ означает кратную тригонометрическую сумму

$$S(d_1, \ldots, d_s) = \sum_{p_1 \leqslant P_1} \ldots \sum_{p_r \leqslant P_r} \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{s} d_j f_j(p_1, \ldots, p_r)\Big).$$

В силу разбиения наборов многочленов на два класса E_1 и E_2 по теореме 1 главы I имеем
$$|S(d_1,\ldots,d_s)| \ll P_1\cdot\ldots\cdot P_r\Delta_0,$$
где $|d_1|,\ldots,|d_s| < \Delta^{-1}$, а величина Δ_0 для наборов второго класса определяется следующим образом:
$$\Delta_0 = e^{8\kappa}P^{-\rho_0}, \rho_0^{-1} = 128m\kappa\log 8m\kappa,$$
а для наборов первого класса
$$\Delta_0 = (Q_0\delta_0)^{-\frac{1}{n}+\varepsilon}.$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\Delta_0 \leqslant 0,1$. Рассмотрим периодическую функцию $\Psi_j(x)$ с периодом 1, определенную в лемме 2 главы II книги [4]. Пусть α_j и β_j — любые вещественные числа, $\Delta_1 \leqslant \beta_j-\alpha_j \leqslant 1-\Delta_1, 1\leqslant j\leqslant s$. Положим в этой лемме $r=1$. Будем иметь
$$\begin{aligned}
&\Psi_j\Big(f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)=1, && \text{если} \quad \alpha_j+0,5\Delta_1 \leqslant f_j(p_1,\ldots,p_r)\leqslant\\
& && \qquad\quad \leqslant \beta_j-0,5\Delta_1 (mod\ 1),\\
&0\leqslant\Psi_j\Big(f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)\leqslant 1, && \text{если} \quad \alpha_j-0,5\Delta_1 < f_j(p_1,\ldots,p_r) <\\
& && \qquad\quad < \alpha_j+0,5\Delta_1 (mod\ 1),\\
& && \text{или} \quad \beta_j-0,5\Delta_1 < f_j(p_1,\ldots,p_r) <\\
& && \qquad\quad < \beta_j+0,5\Delta_1 (mod\ 1),\\
&\Psi_j\Big(f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)=0, && \text{если} \quad \beta_j+0,5\Delta_1 \leqslant f_j(p_1,\ldots,p_r) <\\
& && \qquad\quad < 1+\alpha_j-0,5\Delta_1 (mod\ 1);
\end{aligned}$$

$$\Psi_j\Big(f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)=\beta_j-\alpha_j+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\Big(g_\nu\exp\Big(2\pi i\nu f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)+ \\ +h_\nu\exp\Big(-2\pi i\nu f_j(p_1,\ldots,p_r)\Big)\Big);$$

$$\max(|g_\nu|,|h_\nu|)\leqslant\frac{1}{\pi\nu}.\text{если } 1\leqslant\nu\leqslant\Delta_1^{-1};$$
$$\max(|g_\nu|,|h_\nu|)\leqslant\frac{1}{\pi^2\Delta_1\nu^2}.\text{если } \nu>\Delta_1^{-1};$$

Положим

$$U = U(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s) = \sum_{p_1 \leqslant P_1} \cdots \sum_{p_r \leqslant P_r} \Psi_1\Big(f_j(p_1, \ldots, p_r)\Big) \ldots \Psi_s\Big(f_j(p_1, \ldots, p_r)\Big).$$

Тогда справедливо равенство

$$U = \pi(P_1) \ldots \pi(P_r)(\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_s - \alpha_s) + H,$$

где

$$H \ll \sum_{0 \leqslant |d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{0 \leqslant |d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}}{}' \frac{|S(d_1, \ldots, d_s)|}{\bar{d}_1 \ldots \bar{d}_s} +$$

$$+ \sum_{k_1}^{s} \sum_{0 \leqslant |d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{\Delta_1^{-1} \leqslant |d_k| \leqslant \Delta^{-1}} \cdots \sum_{0 \leqslant |d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}} \frac{|S(d_1, \ldots, d_s)|}{\Delta_1^2 d_k^2 \bar{d}_1 \ldots \bar{d}_{k-1} \bar{d}_{k+1} \ldots \bar{d}_s} +$$

$$+ \sum_{k_1}^{s} \sum_{0 \leqslant |d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{|d_k| > \Delta^{-1}} \cdots \sum_{0 \leqslant |d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}} \frac{P_1 \ldots P_r}{\Delta_1 d_k^2 \bar{d}_1 \ldots \bar{d}_{k-1} \bar{d}_{k+1} \ldots \bar{d}_s},$$

причем $\bar{d} = \max(1, |d|)$; а штрих над знаком суммирования означает, что суммирование ведется по всем указанным $d_1, \ldots, d_s$, кроме $d_1 = \ldots = d_s = 0$.

Так как при $|d_1|, \ldots, |d_s| < \Delta^{-1}$ для суммы $S(d_1, \ldots, d_s)$ справедлива оценка

$$|S(d_1, \ldots, d_s)| << P_1^{1+\varepsilon} P_2 \ldots P_r \Delta_0,$$

то

$$H \ll \sum_{0 \leqslant |d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{0 \leqslant |d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}} \frac{P_1^{1+\varepsilon} P_2 \ldots P_r \Delta_0}{\bar{d}_1 \ldots \bar{d}_s} +$$

$$+ \sum_{k_1}^{s} \sum_{0 \leqslant |d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{\Delta_1^{-1} \leqslant |d_k| \leqslant \Delta^{-1}} \cdots \sum_{0 \leqslant |d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}} \frac{P_1^{1+\varepsilon} P_2 \ldots P_r \Delta_0}{\Delta_1 d_k^2 \bar{d}_1 \ldots \bar{d}_{k-1} \bar{d}_{k+1} \ldots \bar{d}_s}$$

$$+ \sum_{k_1}^{s} \sum_{|d_1| \leqslant \Delta_1^{-1}} \cdots \sum_{|d_k| > \Delta^{-1}} \cdots \sum_{|d_s| \leqslant \Delta_1^{-1}} \frac{P_1 P_2 \ldots P_r}{\Delta_1 d_k^2 \bar{d}_1 \ldots \bar{d}_{k-1} \bar{d}_{k+1} \ldots \bar{d}_s}$$

Отсюда имеем, что

$$H << P_1^{1+\varepsilon} P_2 \ldots P_r \Delta_1$$

Поэтому для величины $D(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ справедлива указанная выше формула для $\lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$

$$|\lambda(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)| << P_1^{1+\varepsilon} P_2 \cdot \ldots \cdot P_r \Delta_1.$$

Теорема доказана.

4 Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел

В этой главе решается задача об одновременном представлении натуральных чисел $N_1, \ldots, N_n$ в виде

$$\begin{cases} N_1 = p_1 + \ldots + p_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ N_n = p_1^n + \ldots + p_k^n, \end{cases} \tag{40}$$

где $p_1, \ldots, p_k$ – простые числа, $n \geqslant 3$. Возможность исследования системы (40) открыл метод И.М.Виноградов оценок тригонометрических сумм с простыми числами ([1]-[11]). Система (40) изучалась К.К.Марджанишвили [32] и Хуа Л.-К. ([44], гл.X, XI).Однако вопрос о представлении чисел $N_1, \ldots, N_n$ ограниченным количеством слагаемых k при растущих параметрах $N_1, \ldots, N_n$ оставалась открытым. Основным результатом работ [32], [44] является условная асимптотическая формула для числа I решений (40):

$$I = \sigma\gamma(PL^{-1})^k P^{-\frac{1}{2}n(n+1)} + O\left(P^{k-\frac{1}{2}n(n+1)} L^{-k-1} \log L\right),$$

где σ и γ соответственно особый ряд и особый интеграл,

$$P = N_n^{1/n}, \quad L = \log P, \quad k > cn^2 \log n \text{ (см.[12])}.$$

Условность этой формулы состоит в том, что предполагается существование $k_0 = k_0(n)$ такого, что при $k \geqslant k_0$ особый ряд σ положителен. Развивая результаты Г. И. Архипова по проблеме Гильберта-Камке ([47]–[49]), в §2 этой главы доказано существование такого k_0 и для него получены оценки сверху и снизу. Эти оценки имеют вид

$$2^n - 1 \leqslant k_0 \leqslant n^3 2^{2n+20},$$

при выполнении необходимых дополнительных условий на величины $N_1, \ldots, N_n$ системы (40).

4.1 Асимптотическая формула

Выведем асимптотическую формулу для числа решений системы уравнений (40) при числе слагаемых порядка $n^2 \ln n$. Этот метод будет опираться на следующие леммы.

Лемма 15. *Пусть $n \geqslant 3$, k, k_1 – целые числа, $k \geqslant 2k_1$,*

$$k_1 = [n^2(2\ln n + \ln\ln n + 4)],$$

и пусть

$$J = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(A)|^k dA,$$

$$S(A)=\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i(\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p)}.$$

Тогда будем иметь

$$J\ll P^{k-\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Доказательство. см. в [4], теорема 4, гл. IV, стр. 70.

Лемма 16. *Пусть* $A=(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)$, $\alpha_s=\frac{a_s}{q_s}+\beta_s$, $|\beta_s|\leqslant P^{-s}L^B$, $Q=[q_n,\ldots,q_1]$, $B>0$ *– постоянная. Тогда для некоторой постоянной* $C_1>0$ *имеем*

$$S(A)=T(a,q)V(\beta_n,\ldots,\beta_1)+O\left(Pe^{-c_1\sqrt{L}}\right),$$

где

$$T(a,q)=\frac{1}{\varphi(Q)}\sideset{}{'}\sum_{0\leqslant x<Q}e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}x^n+\ldots+\frac{a_1}{q_1}x\right)},$$

$$V(\beta_n,\ldots,\beta_1)=\int_2^P\frac{e^{2\pi i\psi(x)}}{\log x}dx,\quad \psi(x)=\beta_n x^n+\ldots+\beta_1 x.$$

Доказательство. см. в [44], лемма 10.4, стр. 143.

Лемма 17. *Пусть* $W_1=\min(1,|\beta_1\ldots\beta_n|^{-1/n^2})$. *Тогда имеем*

$$\int_{\frac{2}{p}}^1\frac{e^{2\pi i\psi(y)}}{\log yP}dy=\frac{1}{L}\int_0^1 e^{2\pi i\psi(y)}dy+O(W_1L^{-2}\log L),$$

$$\int_{\frac{2}{p}}^1\frac{e^{2\pi i\psi(y)}}{\log yP}dy\ll W_1L^{-1}.$$

Доказательство. см. в [44], лемма 10.5, стр. 144.

Теорема 5. *Пусть* $I(N_n,\ldots,N_1)$ *обозначает число решений системы уравнений*

$$\begin{cases} p_1+\ldots+p_k=N_1,\\ p_1^2+\ldots+p_k^2=N_2,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ p_1^n+\ldots+p_k^n=N_n,\end{cases}\tag{41}$$

ее неизвестные $p_s>2n$, $s=1,\ldots,k$ *пробегают значения простых чисел. Пусть* $N_n^{1/n}=P$, $\log P=L$. *Тогда при* $k\geqslant[2n^2(2\log n+\log\log n+5)]$ *для числа решений* $I(N_n,\ldots,N_1)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$I(N_n,\ldots,N_1)=\gamma\sigma P^{k-\frac{1}{2}n(n+1)}L^{-k}+O(P^{k-\frac{1}{2}n(n+1)}L^{-k-1}\log L),\tag{42}$$

где γ *и* σ *– соответственно особый интеграл и особый ряд рассматриваемой проблемы,*

$$\begin{gathered} I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_0^1\exp(2\pi i(\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x))dx\right)^k\times\\ \times\exp\left(-2\pi i\left(\tfrac{N_n}{P^n}\alpha_n+\ldots+\tfrac{N_1}{P}\alpha_1\right)\right)d\alpha_n\ldots d\alpha_1,\end{gathered}\tag{43}$$

$$\sigma = \sigma(N_n, \ldots, N_1) = \sum_{Q=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n,\ldots,q_1]=Q}}^{+\infty} \ldots \sum_{q=1}^{+\infty} A(q_n, \ldots, q_1), \tag{44}$$

$$A(q_n, \ldots, q_1) = \sum_{0\leqslant a_n<q_n}{}' \ldots \sum_{0\leqslant a_1<q_1}{}' T^k \exp\left(-2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}N_n + \ldots + \frac{a_1}{q_1}N_1\right)\right),$$

$$T = T(a,q) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{1\leqslant x<Q}{}' \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1}x\right)\right),$$

где штрих в знаках суммирования означает, что переменные a_s и x пробегает приведенные системы вычетов соответственно по модулю q_s и Q.

Доказательство. Разобьем точки A единичного n-мерного куба Ω на два класса Ω_1 и Ω_2. Для этого представим каждую координату $\alpha = \alpha_t$, $1 \leqslant t \leqslant n$, в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a,q) = 1, \quad 0 \leqslant a < q, \quad \beta = \delta P^{-t},$$

и обозначим через Q наименьшее общее кратное чисел q, а через δ_0 – наибольшее среди чисел $|\delta|$. К первому классу Ω_1 отнесем те точки A, для которых

$$Q \leqslant L^H, \quad \delta_0 \leqslant L^H, \quad H = n(2\ln n + \ln\ln n + 9).$$

Остальные точки A отнесем ко второму классу Ω_2. Далее имеем

$$I(N_n, \ldots, N_1) = \int\limits_{\Omega}\cdots\int (S(A))^k e^{-2\pi i A\times N} dA = I_1 + I_2,$$

где

$$S(A) = \sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i(\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p)}, \quad A\times N = \alpha_n N_n + \ldots + \alpha_1 N_1,$$

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_1}\cdots\int (S(A))^k e^{-2\pi i A\times N} dA, \quad I_2 = \int\limits_{\Omega_2}\cdots\int (S(A))^k e^{-2\pi i A\times N} dA.$$

сначала оценим сверху величину I_2. Имеем $k \geqslant k_0$, $k_0 = k_1 + 2k_2$, $k_1 = n^2$, $k_2 = [n^2(2lnn + \ln\ln n + 4)]$. Применяя для оценки суммы $|S(A)|$ на точках A второго класса Ω_2 леммы 1, 14 и лемму 15 для среднего значения тригонометрической суммы $S(A)$, получим

$$|I_2| \leqslant (PL^{-1})^{k-k_0} \max_{A\in\Omega_2} |S(A)|^{k_1} \int\limits_{\Omega}\cdots\int |S(A)|^{2k_2} dA \ll$$

$$\ll (PL^{-1})^{k-k_0}(PL^{-1-0,2\nu H})^{k_1} P^{2k_2 - \frac{n(n+1)}{2}} \ll P^{k-\frac{n(n+1)}{2}} L^{-k-1}, \tag{45}$$

Поскольку

$$L^{-0,2\nu k_1 H + 2k_2} < L^{-1}, \quad 0,2n^2 H\nu - 2k_2 > 1, \quad H > (10k_2 + 5)\nu.$$

Рассмотрим интеграл I_1. Так как Ω состоит из непересекающихся областей $\omega(a,q)^2$, то имеем

$$I_1 = \sum_{Q\leqslant L^H} \sum_{\substack{q_n=1\\ [q_n,\dots,q_1]=Q}}^{+\infty} \dots \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{0\leqslant a_n<q_n}{}' \dots \sum_{0\leqslant a_1<q_1}{}' I(a,q),$$

где

$$I(a,q) = \int\cdots\int_{\omega(a,q)} S^k(A)e^{-2\pi i A\times N}dA.$$

В силу леммы для интеграла $I(a,q)$ получим

$$\begin{gathered} I(a,q) = T(a,q)^k e^{-2\pi i\left(N\times\frac{a}{q}\right)}\times\\ \times\int\cdots\int_{\omega(a,q)} V^k(\beta_n,\dots,\beta_1)e^{-2\pi i(N\times\beta)}d\beta_n\dots d\beta_1+\\ +O\left(P^{k-\frac{n(n+1)}{2}}e^{-c_1\sqrt{L}}\right), \end{gathered} \tag{46}$$

где

$$N\times\frac{a}{q} = N_n\frac{a_n}{q_n}+\ldots+N_1\frac{a_1}{q_1},\quad N\times\beta = N_n\beta_n+\ldots+N_1\beta_1,$$

$$V = V(\beta_n,\dots,\beta_1) = \int_2^P \frac{e^{2\pi i(\beta_n y^n+\ldots+\beta_1 y)}}{\log y}dy,$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{a_n}{q_n},\dots,\beta_1 = \alpha_1-\frac{a_1}{q_1}.$$

В интеграле V сделаем замену переменной интегрирования $y = Pz$. В силу леммы 17 будем иметь

$$V = PL^{-1}W + O(W_1L^{-2}\log L).$$

Подставляя последнее выражение в формулу (46) и делая затем замену переменных

$$\beta_n = P^n\gamma_n,\dots,\beta_1 = P\gamma_1,$$

находим

$$\begin{gathered} I(a,q) = T^k(a,q)e^{-2\pi i\left(N\times\frac{a}{q}\right)}\times\\ \times(PL^{-1})^kP^{-\frac{n(n+1)}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} W^k e^{-2\pi i(N\times\beta)}d\beta_n\dots d\beta_1+\\ +O\left((PL^{-1})^kP^{-\frac{n(n+1)}{2}}L^{-1}\log L|T(a,q)|^k\right)+O\left(P^{k-\frac{n(n+1)}{2}}e^{-c_1\sqrt{L}}\right). \end{gathered}$$

[2]Область $\omega(a,q)$ состоит из точек α, координаты которых удовлетворяют условиям $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| < P^{-t}L^H$.

Суммируя далее по всем (a,q) с условием $[q_n,\dots,q_1]=Q<L^H$ и распространяя затем суммирование по (a,q) на всевозможные значения Q от 1 до $+\infty$, будем иметь

$$I_1=\gamma\sigma(PL^{-1})^k P^{-\frac{n(n+1)}{2}}+O\left(P^{k-\frac{n(n+1)}{2}}L^{-k-1}\log L\right). \tag{47}$$

Из найденных формул (45), (47) получим асимптотическую формулу для I. Теорема доказана.

4.2 Исследование особого ряда

Лемма 18. *Пусть $f(x)$ – многочлен степени n с целыми коэффициентами, $f(0)=0$, коэффициенты $f(x)$ в совокупности взаимно просты q, $\nu=1/n$. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{0\leqslant x<q}{}' e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}}\right|\leqslant c(n,\varepsilon)q^{1-\nu+\varepsilon}.$$

Доказательство. см. [44], следствие 1.3, стр.13.

Особый ряд $\sigma=\sigma(N_n,\dots,N_1)$ асимптотической формулы для числа решений системы уравнений (41) имеет вид

$$\sigma=\sum_{Q=1}^{+\infty}\underset{[q_n,\dots,q_1]=Q}{\sum_{q_n=1}^{+\infty}\dots\sum_{q_1=1}^{+\infty}}A(q_n,\dots,q_1),$$

где

$$A(q_n,\dots,q_1)=\sum_{0\leqslant a_n<q_n}{}'\dots\sum_{0\leqslant a_1<q_1}{}' T^k e^{-2\pi i\left(N\times\frac{a}{q}\right)},$$

$$T=\frac{1}{\varphi(Q)}\sum_{0\leqslant x<Q}{}' e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}x^n+\dots+\frac{a_1}{q_1}x\right)}.$$

В силу оценки суммы T из леммы 18 получим

$$|\sigma|\ll\sum_{Q=1}^{+\infty}\underset{[q_n,\dots,q_1]=Q}{\sum_{q_n=1}^{+\infty}\dots\sum_{q_1=1}^{+\infty}}\varphi(q_1)Q^{(-\nu+\varepsilon)k}\ll$$

$$\ll\sum_{Q=1}^{+\infty}Q^{n+k(-\nu+\varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что ряд σ сходится при $k>2n^2$.

Лемма 19. *При $k>2n^2$ справедливо равенство*

$$\sigma=\prod_p\sigma_p,\quad \sigma_p=\lim_{\alpha\to+\infty}p^{\alpha n}\varphi^{-k}(p^\alpha)W(p^\alpha;k),$$

$W(p^\alpha;k)$ *обозначает число решений системы сравнений*

$$\begin{cases} x_1^n+\ldots+x_k^n \equiv N_n(mod p^\alpha), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1+\ldots+x_k \equiv N_1(mod p^\alpha), \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_\nu \leqslant p^\alpha, \quad (x_\nu,p)=1, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant k.$$

Доказательство. см. [44], леммы 11. 5-11. 7, стр.162.

Ряд σ_p можно представить также в виде

$$\sigma_p = 1+\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n,\ldots,q_1]=p^\alpha}}^{+\infty} \ldots \sum_{q=1}^{+\infty} A(q_n,\ldots,q_1).$$

Лемма 20. *Пусть $p \leqslant 2n$, $k \geqslant 3n^3 2^n - n = k_1$ и набор $N_n,\ldots,N_1$ удовлетворяет условию разрешимости. Тогда для величины $W_1(p^h;k)$ имеет место оценка*

$$W_1(p^h;k) \geqslant cp^{h(k-n)} > 0, \quad c = p^{(2\kappa+2\delta+1)(n-k_1)},$$

κ – целое число, определяемое условием

$$p^\kappa \leqslant n < p^{\kappa+1},$$

δ – показатель степени, с которым простое p входит в разложение числа $(n-1)!$ на множители; $W_1(p^h;k)$ – число решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^n+\ldots+x_k^n \equiv N_n(mod p^h), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1+\ldots+x_k \equiv N_1(mod p^h), \end{cases}$$

неизвестные которой могут принимать значения полной системы вычетов по модулю p^n.

Доказательство. см. [48], леммы 11, стр.31.

Представим натуральное число $n+1$ в виде

$$n+1 = l(p-1)+r, \quad 0 \leqslant r < p-1.$$

Рассмотрим систему сравнений

$$x_1^s+\ldots+x_k^s \equiv N_s(mod p^\alpha), \quad s=0,1,\ldots,n; \tag{48}$$

неизвестные $x_1,\ldots,x_k$ принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю p^α, p – простое число. Рассмотрим, кроме того систему линейных сравнений с неизвестными $t_1,\ldots,t_{lp+r}$:

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,p)=1}}^{lp+r} t_\nu \cdot \nu^s \equiv N_s(mod\ p^\alpha), \quad s=0,1,\ldots,n. \tag{49}$$

Набор $(N_n,\ldots,N_1)$ назовем удовлетворяющим условию разрешимости, если для некоторого N_0 разрешима система (49) по модулю p^α, где p – простое число и α – любое натуральное число.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 21. *Из разрешимости системы (48) следует разрешимость системы (49), и наоборот, из разрешимости системы (49) следует существование такого числа k, $k\equiv N_0(mod p^\alpha)$, при котором система (48) имеет решение.*

Доказательство. Для любого x взаимно простого с p, решение $T_\nu=T_\nu(x)$, $1\leqslant\nu\leqslant lp+r$, $(\nu,p)=1$, системы сравнения

$$\sum_{\substack{\nu=1\\(\nu,p)=1}}^{lp+r} T_\nu\cdot\nu^s\equiv x^s(mod p^\alpha),\quad s=0,1,\ldots,n,\tag{50}$$

имеет вид

$$T_\nu\equiv\left(\prod_{\substack{\mu=1\\(\mu,p)=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(x-\mu)\right)\left(\prod_{\substack{\mu=1\\(\mu,p)=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(\nu-\mu)\right)^{-1}\quad(mod p^\alpha).$$

Действительно, для этого достаточно показать, что показатель степени с которым p входит в числитель выражения для T_ν не меньше показателя степени p, входящей в его знаменатель. Обозначим через $\delta_p(t)$ этот показатель:

$$t=p^{\delta_p(t)}t_1,\quad (t_1,p)=1.$$

При x и ν взаимно простых с p имеем

$$\delta_p\left(\prod_{\substack{\mu=1\\(\mu,p)=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(x-\mu)\right)=\delta_p\left(\prod_{\substack{\mu=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(x-\mu)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\delta_p\left(\prod_{\substack{\mu=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(\nu-\mu)\right)=\delta_p\left(\prod_{\substack{\mu=1\\(\mu,p)=1\\\mu\neq\nu}}^{lp+r}(\nu-\mu)\right).$$

Следовательно, выражение для T_ν определено корректно.

Пусть система сравнений (48) имеет решение $x_1,\ldots,x_k$. Тогда, полагая в системе (49) $x=x_j$, $1\leqslant j\leqslant k$, получим, что

$$t_\nu\equiv\sum_{j=1}^{k}T_\nu(x_j)(mod p^\alpha),\quad(\nu,p)=1.$$

Пусть теперь разрешима система (49). В качестве решения t_ν возьмем наименьшие неотрицательные вычеты по модулю p^α, а величину k проложим равной $t_1 + \ldots + t_{lp+r}$ и тогда решение системы сравнений (48) возьмем в виде

$$\begin{gathered} x_1 = \ldots = x_{t_1} = 1, \\ x_{t_1+1} = \ldots = x_{t_2} = 2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{t_1+\ldots+t_{lp+r-1}+1} = \ldots = x_{t_{lp+r}} = lp + r. \end{gathered}$$

Лемма доказана.

Лемма 22. *Пусть* $p \leqslant 2n$, $k \geqslant n^3 2^{2n+20} = k_1$ *и набор* $N_n, \ldots, N_1$ *удовлетворяет условию разрешимости. Тогда для величины* $W(p^\alpha; k)$ *имеет место оценка*

$$W(p^\alpha; k) \geqslant c p^{\alpha(k-n)},$$

где $c > 0$ *– некоторая постоянная.*

Доказательство. Пусть $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_{n+1} \leqslant lp + r$; $(a_j, p) = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Положим

$$M_s = N_s - A \sum_{r=1}^{n} a_r^s, \quad A = 3n_1^3 2^{n_1} - n_1, \quad n_1 = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Очевидно, набор $M_n, \ldots, M_1$ удовлетворяет условию разрешимости. Следовательно, найдутся вычеты $t_1, \ldots, t_{n+1}$, удовлетворяющие системе сравнений

$$\sum_{r=1}^{n+1} t_r a_r^s \equiv M_s (mod p^{8n}), \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Возьмем $\alpha = 16 + \kappa + \kappa_1 + \delta$, $\delta = \delta_p((lp+r)!)$, $p^\kappa \leqslant n < p^{\kappa+1}$, $p^{\kappa_1} \leqslant n_1 < p^{\kappa_1+1}$, $\alpha \leqslant 8n$. Пусть b_r наименьшие неотрицательные вычеты t_r по модулю p^α, тогда имеем

$$A \sum_{r=1}^{n} a_r^s + \sum_{r=1}^{n+1} b_r a_r^s \equiv N_s (mod p^\alpha), \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Положим $N_0 = k = nA + b_1 + \ldots + b_{n+1}$ и покажем, что разрешима система сравнений

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{A} z_{r,l}^s + \sum_{m=nA+1}^{k} x_m^s \equiv N_s (mod p^{8n}), \;\; s = 1, \ldots, n, \tag{51}$$

где

$$\sum_{m=nA+1}^{k} x_m^s = \sum_{r=1}^{n+1} b_r a_r^s; \quad z_{r,l} = a_r + p^{16} u_r v_l,$$

$$r = 1, \ldots, n; \quad l = 1, \ldots, A;$$

и вычеты u_r, v_l являются неизвестными. Поскольку $t_r \equiv b_r (mod p^\alpha)$, $r = 1, \dots, n+1$, то из (51) получим

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{q=1}^{s_1}\left(\begin{array}{c} s \\ q \end{array}\right) a_r^{s-q} u_r^q p^{16q}\left(\sum_{l=1}^{A} v_l^q\right) \equiv p^\alpha \sum_{r=1}^{n+1}\lambda_r a_r^s (mod p^{8n}), \tag{52}$$

где

$$s = 1, \dots, n; \quad s_1 = \min(s, n_1).$$

Далее, так как по лемме 20 разрешима система сравнений

$$\left\{\begin{array}{l} v_1^n + \ldots + v_A^n \equiv 0 (mod p^{8n}), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_1^2 + \ldots + v_A^2 \equiv 0 (mod p^{8n}), \\ v_1 + \ldots + v_A \equiv Q (mod p^{8n}), \end{array}\right. \tag{53}$$

$Q = [1, 2, \dots, n_1]$, то подставляя решение (53)в (52), получим

$$\sum_{r=1}^{n} s a_r^{s-1} u_r p^{16q} Q \equiv p^\alpha \sum_{r=1}^{n}\lambda_r a_r^s (mod p^{8n}), \ s = 1, \dots, n. \tag{54}$$

Решение системы сравнений (54) можно представить так:

$$u_l \equiv p^{\alpha-16-\kappa_1}\sum_{r=1}^{n+1}\mu_r \frac{F(a_r)}{f(a_l)} (mod p^{8n-16-\kappa_1}), \ l = 1, \dots, n, \tag{55}$$

где $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ – некоторые целые числа; $p^{\kappa_1} \leqslant n_1 < p^{\kappa_1+1}$;

$$f(a_l) = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 2a_1 & \ldots & 2a_l & \ldots & 2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n a_1^{n-1} & \ldots & n a_l^{n-1} & \ldots & n a_n^{n-1} \end{array}\right|,$$

$$F(a_r) = \left|\begin{array}{ccccccc} 1 & \ldots & 1 & a_r & 1 & \ldots & 1 \\ 2a_1 & \ldots & 2a_{l-1} & a_r^2 & 2a_{l+1} & \ldots & 2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n a_1^{n-1} & \ldots & n a_{l-1}^{n-1} & a_r^n & n a_{l+1}^{n-1} & \ldots & n a_n^{n-1} \end{array}\right|.$$

Разложим определитель $F(a_r)$ по столбцу

$$F(a_r) = \sum_{s=1}^{n} a_r^s f_s(a_l),$$

где

$$f_s(a_l) = \frac{n!}{s}\prod_{\substack{i<j \\ i,j\neq l}} (a_j - a_i)\sigma_s(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, знаменатель дроби в (55) является делителем чисел

$$sb = s(a_l - a_1)\ldots(a_l - a_{l-1})(a_l - a_{l+1})\ldots(a_l - a_n).$$

Имеем

$$\delta_p(sb) = \delta_p(s) + \delta_p(b) \leqslant \delta_p(s) + \delta_p((lp+r)!) \leqslant$$
$$\leqslant \kappa + \left[\frac{lp+r}{p}\right] + \left[\frac{lp+r}{p^2}\right] + \ldots \leqslant \kappa + \frac{lp+r}{p-1}.$$

Отсюда получим, что показатель степени p в (55) неотрицателен при условии

$$\alpha - 16 - \kappa_1 - \kappa - \delta \geqslant 0.$$

Тем самым доказана разрешимость системы (54) в числах u_r, v_l.

Оценим сверху величину k. Имеем

$$k = nA + b_1 + \ldots + b_{n+1} \leqslant nA + (n+1)p^{\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant nA + (n+1)p^{\kappa_1+\kappa+\frac{lp+r}{p-1}+16} \leqslant$$
$$\leqslant nA + (n+1)n^2 p^{\frac{n+1+\frac{n+1}{p-1}}{p-1}+16} =$$
$$= nA + (n+1)n^2 p^{\frac{(n+1)p}{(p-1)^2}+16}.$$

Пусть $p=2$, тогда получим

$$k \leqslant n^4 2^{\frac{n}{2}} - n^2 + (n+1)n^2 2^{2(n+1)+16} \leqslant n^3 2^{2n+20}.$$

Пусть $p=3$, тогда

$$k \leqslant n^4 2^{\frac{n}{2}} - n^2 + (n+1)n^2 3^{\frac{3}{4}(n+1)+16} \leqslant n^3 2^{2n+20}.$$

Пусть $p \geqslant 5$, тогда

$$p^{\frac{(n+1)p}{(p-1)^2}+16} \leqslant 2^{2n+16},$$

и следовательно

$$k \leqslant n^3 2^{2n+20}.$$

Таким образом, при $k \geqslant k_1$, $\alpha \leqslant 8n$ разрешима система сравнений

$$\sum_{r=1}^{k} x_r^s \equiv N_s(mod p^{\alpha}), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{56}$$

Положим $\alpha = 2\kappa + 2\delta + 3 \leqslant 8n$, $\beta = \kappa + \delta + 2$, $\delta = \delta_p((lp+r)!)$, $p^{\kappa} \leqslant n < p^{\kappa+1}$. Оценим снизу число решений $W(p^{\alpha+1}; k)$ системы сравнений

$$\sum_{r=1}^{k} z_r^s \equiv N_s(mod p^{\alpha+1}), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{57}$$

где неизвестные принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю $p^{\alpha+1}$. Пусть

$$z_r = x_r + p^\beta y_r, \quad 0 \leqslant y_r \leqslant p-1, \quad 2\beta \geqslant \alpha+1, \quad 2 \leqslant \beta \leqslant \alpha.$$

Тогда для любых $y_{n+1},\dots,y_k$ можно найти такие $y_1,\dots,y_n$, что $z_1,\dots,z_k$ будут решением (57). Действительно, имеем

$$\sum_{r=1}^{k} sp^\beta y_r x_r^{s-1} \equiv N_s - \sum_{r=1}^{k} x_r^s (mod p^{\alpha+1}), \quad s=1,\dots,n.$$

Далее, поскольку $x_1,\dots,x_k$ удовлетворяют (56), то получим

$$\sum_{r=1}^{n} s x_r^{s-1} y_r \equiv \lambda_s p^{\alpha-\beta} - \sum_{r=n+1}^{k} s x_r^{s-1} y_r (mod p^{\alpha-\beta+1}),\ s=1,\dots,n. \tag{58}$$

Зафиксируем $y_{n+1},\dots,y_k$ и решим систему линейных сравнений (58). Получим

$$y_m \equiv p^{\alpha-\beta} \sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_s}{s} \frac{\sigma_{n-m}(x_1,\dots,x_n)}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_n)} -$$

$$- \sum_{l=n+1}^{k} y_l \frac{(x_l-x_1)\dots(x_l-x_{m-1})(x_l-x_{m+1})\dots(x_l-x_n)}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_n)} (mod p^{\alpha-\beta+1}),$$

$$m=1,\dots,n;$$

где $\sigma_r(x_1,\dots,x_n)$ – r-элементарная симметрическая функция чисел $x_1,\dots,x_n$; причем $\alpha,\beta,\delta,\kappa$ удовлетворяют условию $\alpha-\beta-\delta-\kappa \geqslant 0$,

$$\delta \geqslant \delta_p\left((x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_n)\right).$$

Следовательно,

$$W(p^{\alpha+1};k) \geqslant p^{k-n}.$$

Аналогично проведем переход от системы сравнений по модулю $p^{\alpha+1}$ к системе по модулю $p^{\alpha+2}$. Для этого нам потребуется условие $p^\beta > 2n-1$. Таким образом, при $h > \alpha$ получим

$$W(p^{\alpha+1};k) \geqslant p^{(h-\alpha)(k-n)} = c_1 p^{h(k-n)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 23. *Пусть k,n – натуральные числа, $p > 2n$. Тогда при $k \geqslant k_2 = [32n^2 \ln n]$ справедлива оценка*

$$W(p;k) \geqslant 1.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству лемм 1, 2, 3 статьи [18] с заменой полной системы вычетов на приведенную систему вычетов по модулю p.

Лемма 24. *Пусть* $p > 2n$, $k \geqslant k_2 = [32n^2 \ln n] + 2n$, n *– натуральное число. Тогда*

$$W(p^h; k) \geqslant p^{n-k_2} p^{h(k-n)}.$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 14 статьи [48] .

Лемма 25. *При* $k \geqslant n^2 + n + 1$ *справедлива оценка*

$$\sigma_p = 1 + O(p^{-1-\nu}).$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n,\ldots,q_1]=p^l}}^{+\infty} \cdots \sum_{q_1=1}^{+\infty} |A(q_n, \ldots, q_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q_n|p^l} \cdots \sum_{q_1|p^l} \varphi(q_n) \ldots \varphi(q_1) p^{-lk\nu} = p^{l(n-k\nu)};$$

Отсюда при $k \geqslant n^2 + n + 1$ имеем

$$\sigma_p = 1 + O\left(\sum_{l=1}^{+\infty} p^{l(n-k\nu)}\right) = 1 + O(p^{n-k\nu}) = 1 + O(p^{-1-\nu}).$$

Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $k \geqslant n^3 2^{2n+20}$. *Тогда для набора* $N_n, \ldots, N_1$, *удовлетворяющего условию разрешимости, справедливо неравенство*

$$\sigma \geqslant c(n) > 0,$$

где σ *– сингулярный ряд теоремы 5.*

Доказательство. Имеем

$$\sigma = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3,$$

$$\varphi_1 = \prod_{p \leqslant 2n} \sigma_p, \quad \varphi_2 = \prod_{2n < p \leqslant c_1(n)} \sigma_p, \quad \varphi_3 = \prod_{p > c_1(n)} \sigma_p,$$

где $c_1(n)$ – постоянная из леммы 25 и такая, что при $p > c_1(n)$ выполняется неравенство

$$\sigma_p = 1 + O(p^{-1-\nu}) > 0.$$

Из леммы 22 следует, что

$$\varphi_1 \geqslant c_2(n) > 0,$$

а из леммы 24 следует, что

$$\varphi_2 \geqslant c_3(n) > 0.$$

В силу леммы 25 имеем, что бесконечное произведение φ_3 сходится и что $\varphi_3 \geqslant c_4(n) > 0$. Отсюда получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

4.3 Теорема

Здесь мы получим основную теорему III главы. Как показано в §2, для разрешимости системы (41) требуется выполнение арифметических условий (лемма 21). Они необходимы также для положительности особого ряда σ (теоремы 4, 5). Другой тип условий – условия порядка, связанные с положительностью особого интеграла γ. Особый интеграл рассматриваемой здесь задачи совпадает с особым интегралом в проблеме Гильберта-Камке и был полностью исследован Г. И. Архиповым ([48]-[49]).

Лемма. *Справедливы неравенства*

$$2^{2n(n-k)}k^{n-k}n^{-k-n}\tau^{n(k-n)} \leqslant \gamma \leqslant 2^{2n^2}k^{2n}n^{k-2n}\tau^{k-3n-n^2},$$

где τ – наибольшее значение характеристики решения $(x_1,\ldots,x_k)$ системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{k} x_m^s = N_sP^{-s}, \quad s=1,\ldots,n. \tag{59}$$

Характеристикой набора $(x_1,\ldots,x_k)$ будем называть величину $\Delta(x_1,\ldots,x_k)$, определяемую следующим образом. Некоторым способом κ выбираем из этого набора n чисел с различными номерами. Пусть это будут числа $z_1,\ldots,z_n$. Возьмем еще два числа $z_0=0$, $z_{n+1}=1$. Тогда

$$\Delta(x_1,\ldots,x_k) = \max_{\kappa} \min_{0\leqslant i<j\leqslant n+1} |z_i-z_j|.$$

Доказательство. см. в [48], теорема 5, стр. 51.

Будем говорить, что асимптотическая формула теоремы 5 нетривиальна, если $\sigma>0$ и $\gamma>0$[3]

Назовем набор $(N_n,\ldots,N_1)$ правых частей системы уравнений (41) допустимыми, если

1) выполняются условия (49),

2) найдется решение системы (59), для которого характеристика τ больше нуля.

Теорема 7. 1) *Если набор $\overline{N}=(N_n,\ldots,N_1)$ не является допустимым, то асимптотическая формула теоремы 5 будет тривиальна.*

2) *Если набор $\overline{N}=(N_n,\ldots,N_1)$ – допустимый, то при $k\geqslant n^3 2^{2n+20}$ асимптотическая формула теоремы 5 – нетривиальна.*

3) *Если $k\leqslant 2^n-1$, то существуют допустимые наборы $\overline{N}=(N_n,\ldots,N_1)$, для которых асимптотическая формула теоремы 5 – тривиальна.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из лемм 21 и 26. Утверждение 2) следует из теоремы 6 и леммы 26. Утверждение 3) является следствием утверждения 1) теоремы 4 статьи [48], стр. 44.

[3] Мы полагаем, что $N_s=P^s(\beta_s+O(P^{-1/2}))$ при $P\to+\infty$ и поэтому величины γ и σ можно считать не зависящими от P.

5 Многомерная аддитивная задача с простыми числами

Еще один важным приложением полученных оценок кратных тригонометрических сумм с простыми числами является задача об одновременном представлении совокупности натуральных чисел слагаемыми вида $p_1^{t_1}...p_r^{t_r}$, $0 \le t_1 \le n_1, ..., 0 \le t_r \le n_r$. Далее мы выводим асимптотическую формулу для количества таких представлений. Как и в соответствующих задачах для однократных тригонометрических сумм с простыми числами (см.[32], [44]), асимптотическая формула будет нетривиальна при больших k тогда и только тогда, когда выполнены арифметические условия и условия порядка. Они подобны условиям, полученным в [66]; отличие состоит только в том, что переменные суммирования принимают значения из приведенной системы вычетов по некоторому модулю. Стимулом для их вывода послужила работа Г.И.Архипова [48] по проблеме Гильберта-Камке и совместная работа Г.И.Архипова и автора [66] для обобщения этой проблемы на случай кратных сумм, в которых суммирования ведутся по сплошным промежуткам (а не по простым числам).

5.1 Асимптотическая формула

Пусть далее $J(\overline{N})$ обозначает число представлении набора $\overline{N} = (N(0,\dots,1),\dots,N(n_1,\dots,n_r))$ в виде

$$\sum_{j=1}^{k} p_{1,j}^{t_1}\dots p_{r,j}^{t_r} = N(t_1,\dots,t_r) \tag{60}$$
$$(0 \le t_1 \le n_1,\dots,0 \le t_r \le n_r,\ t_1+\dots+t_r \geqslant 1)$$

где неизвестные $p_{s,j}$- простые числа, $2\nu^{-1} \le p_{s,j} \le P_s, \quad s = 1,\dots,r;$ $j = 1,\dots,k$. Буквы γ и σ обозначают соответственно особый интеграл и особый ряд рассматриваемой задачи,

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} W^k(A)e^{-2\pi iB}dA$$

$$W(A) = \int_0^1\dots\int_0^1 exp2\pi iF_A(x_1,\dots,x_r)dx_1\dots dx_r,$$

$$F_A(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1}\dots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}, \quad \alpha(0,\dots,0) = 0$$

$$B=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\alpha(t_1,\ldots,t_r)N(t_1,\ldots,t_r)P_1^{-t_1}\ldots P_r^{-t_r};$$

$$\sigma=\sum_{q(0,...,1)=1}^{+\infty}\cdots\sum_{q(n_1,...,n_r)=1}^{+\infty}\sum_{\substack{a(0,...,1)=1\\(a(0,...,1),q(0,...,1))=1}}^{q(0,...,1)}\cdots$$
$$\cdots\sum_{\substack{a(n_1,...,n_r)=1\\(a(n_1,...,n_r),q(n_1,...,n_r))=1}}^{q(n_1,...,n_r)}U^k(a,q)e^{-2\pi iD},$$

$$U(a,q)=\varphi(Q)^{-r}\sum_{\substack{x_1=1\\(x_1,Q)=1}}^{Q}\cdots\sum_{\substack{x_r=1\\(x_r,Q)=1}}^{Q}exp2\pi i\Phi_{a,q}(\overline{x}),$$

$$\Phi_{a,q}(\overline{x})=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\frac{a(t_1,...,t_r)}{q(t_1,...,t_r)}x_1^{t_1}...x_r^{t_r},\quad q(0,...,0)=1$$

$$D=\sum_{t_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{t_r=0}^{n_r}\frac{a(t_1,...,t_r)}{q(t_1,...,t_r)}N(t_1,...,t_r),$$

буква Q обозначает наименьшее общее кратное чисел $q=q(t_1,...,t_r)$, $0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r,\quad t_1+...+t_r\ge 1$. И пусть, наконец, выполняются условия $L_sL_1^{-1}\ll 1,\quad s=2,...,r$ и буква κ обозначает величину, определенную в теореме 1, $\nu\max(n_1,...,n_r)=1$.

Теорема 8. *При* $k>16\ m\ \kappa\log 16\ m\ \kappa+3$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{gathered}J(\overline{N})=\sigma\gamma(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1})^k(P_1^{n_1}...P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}}+\\+O((P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1})^k(P_1^{n_1}...P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}}L^{-1}\log L).\end{gathered}\tag{61}$$

Доказательство. Каждую координату $\alpha=\alpha(t_1,...,t_r)$, $0\le t_1\le n_1,\ldots,$ $0\le t_r\le n_r$, единичного m- мерного куба Ω представим в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\quad (a,q)=1,\quad 0\le a<q,\quad \beta=\delta P_1^{-t_1}...P_r^{-t_r}\tag{62}$$

и обозначим через Q наименьшее общее кратное чисел q а через δ_0 — наибольшее среди чисел $|\delta|$ с условиями $0 \le t_1 \le n_1, ..., \ 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + ... + t_r \ge 1$. Тогда к первому классу Ω_1' отнесем те точки A, для которых $Q \le L^G$, $\delta_0 \le L^H$, $G = 60rv^{-1}$, $H = 3rv^{-1}$. Остальные точки A куба Ω отнесем ко второму классу Ω_2'. Очевидно, имеем

$$J(\overline{N}) = \int \underset{\Omega}{\cdots} \int S^k(A) e^{-2\pi i (A \times \overline{N})} dA,$$

где

$$S(A) = \sum_{p_1 \le P_1} \cdots \sum_{p_r \le P_r} exp 2\pi i F_A(p_1, ..., p_r),$$

$$F_A(p_1, ..., p_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, ..., t_r) p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}, \quad \alpha(0, ..., 0) = 0$$

$$A \times \overline{N} = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} \alpha(t_1, ..., t_r) N(t_1, ..., t_r).$$

В соответствии с разбиением куба Ω на два класса Ω_1' и Ω_2' интеграл $J(\overline{N})$ разобьется на сумму:

$$J(\overline{N}) = J_1 + J_2.$$

Для любой точки A, принадлежащей второму классу Ω_2', и из теорем 1,2 имеем оценку суммы $S(A)$:

$$|S(A)| \ll P_1 \cdots P_r (L^{-0,05\nu G + \varepsilon G} + L^{-\nu H + \varepsilon H}) \ll P_1 \cdots P_r L^{-2r}. \tag{63}$$

Положим $k_0 = [8m\kappa \log 16 m\kappa] + 1$, где величина κ определена в теореме 1. Тогда в силу теоремы 3 статьи [58], стр. 769, имеем

$$\int \underset{\Omega}{\cdots} \int |S(A)|^{k_0} dA \ll (P_1 ... P_r)^{k_0} (P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}} \tag{64}$$

поскольку

$$\frac{\ln P_s}{\ln P_1} \ll 1, \quad s = 2, ..., r; \quad \kappa \ll 1.$$

(постоянные в знаках $\ll$ зависят только от $\overline{n}$ и r). Следовательно, из (63), (64), учитывая, что $k \geq 2k_0 + 1$, получаем

$$J_2 \leq \max_{A \in \Omega_2'} |S(A)|^{k-k_0} \int \cdots \int_{\Omega} |S(A)|^{k_0} dA \ll \\ \ll (P_1 \cdots P_r L_1^{-1} \cdots L_r^{-1})^k (P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}} L^{-1} \tag{65}$$

Выведем теперь асимптотическую формулу для J_1. Обозначим через $\omega(a,q)$ область, соответствующую фиксированным наборам a и q из (62), и $\delta_0 \leq L^H$. Для любых двух различных наборов a, q и a', q' области $\omega(a,q)$ и $\omega(a',q')$ не пересекаются. Поэтому имеем

$$J_1 = \sum_{Q \leq L^G} \sum_{H.O.K.(q)=Q} \cdots \sum \sum{}' \cdots \sum_{a \bmod q}{}' J(a,q), \tag{66}$$

где $(a(t_1,...,t_r), q(t_1,...,t_r)) = 1, \quad 0 \leq a(t_1,...,t_r) < q(t_1,...,t_r)$
$0 \leq t_1 \leq n_1, ..., 0 \leq t_r \leq n_r$ и

$$J(a,q) = \int \cdots \int_{\omega(a,q)} S^k(A) e^{-2\pi i (A \times \overline{N})} dA. \tag{67}$$

Для суммы $S(A)$ при $A \in \omega(a,q)$ найдем асимптотическое выражение

$$S(A) = \sum_{\sqrt{P_1} < p_1 \leq P_1} ... \sum_{\sqrt{P_r} < p_r \leq P_r} \exp 2\pi i F_A(p_1,...,p_r) + O(P_1^{\frac{1}{2}} P_2 \cdots P_r) = \\ = \sum_{\substack{l_1=0 \\ (l_1,Q)=1}}^{Q-1} ... \sum_{\substack{l_r=0 \\ (l_r,Q)=1}}^{Q-1} exp(2\pi i F_{a,q}(l_1,...,l_r)) T(l_1,...,l_r) + O(P_1^{\frac{1}{2}} P_2 \cdots P_r), \tag{68}$$

где

$$T(l_1,...,l_r) = \sum_{\substack{\sqrt{P_1} < p_1 \leq P_1 \\ p_1 \equiv l_1 (mod\ Q)}} ... \sum_{\substack{\sqrt{P_r} < p_r \leq P_r \\ p_r \equiv l_r (mod\ Q)}} \exp 2\pi i F_\beta(p_1,...,p_r).$$

Перепишем $T(l_1,...,l_r)$ в виде

$$T(l_1,...,l_r) = \sum_{\sqrt{P_1} < n_1 \leq P_1} ... \sum_{\sqrt{P_r} < n_r \leq P_r} \exp(2\pi i F_\beta(n_1,...,n_r)) \times \\ \times (\pi(n_1,Q,l_1) - \pi(n_1 - 1, Q, l_1)) ... (\pi(n_r,Q,l_r) - \pi(n_r - 1, Q, l_r))$$

и сделаем преобразование Абеля последовательно по каждой переменной. Получим

$$T(l_1,...,l_r)=\sum_{s=1}^{r}(-1)^s\sum_{1\le j_1<...<j_s\le r}\ \sum_{\sqrt{P_{j_1}}<Q_{j_1}\le P_{j_1}-1}...\sum_{\sqrt{P_{j_s}}<Q_{j_s}\le P_{j_s}-1}\ \sum_{\sqrt{P_1}<n_1\le P_1'}...$$

$$...\sum_{\sqrt{P_r}<n_r\le P_r}(\pi(n_1,Q,l_1)-\pi(n_1-1,Q,l_1))...(\pi(n_r,Q,l_r)-\pi(n_r-1,Q,l_r))\times$$

$$\times\Delta_{j_1,...,j_s}\exp\left(2\pi iF_\beta(P_1',...,P_r')\right)+\exp(2\pi iF_\beta(P_1,...,P_r))\sum_{\sqrt{P_1}<n_1\le P_1}\cdots\sum_{\sqrt{P_r}<n_r\le P_r}\times$$

$$\times(\pi(n_1,Q,l_1)-\pi(n_1-1,Q,l_1))\cdots(\pi(n_r,Q,l_r)-\pi(n_r-1,Q,l_r)),$$

$$P_j'=\begin{cases}Q_j,\ \text{если } j=j_1,...,j_s,\\ P_j,\ \text{если } j\ne j_1,...,j_s.\end{cases}$$

Так как $Q<L^G$, то для $\pi(x,Q,l)$ по теореме Зигеля справедлива асимптотическая формула (см.[22]):

$$\pi(x,Q,l)=\frac{1}{\varphi(Q)}Lix+0(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),\quad Lix=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+c$$

Подставим эту формулу в последнее выражение для $T(l_1,...,l_r)$. Будем иметь

$$T(l_1,...,l_r)=\varphi(Q)^{-r}\sum_{\sqrt{P_1}<n_1\le P_1}...\sum_{\sqrt{P_r}<n_r\le P_r}\exp(2\pi iF_\beta(n_1,...,n_r))\int_{n_1-1}^{n_1}\frac{dt_1}{\ln t_1}...$$

$$...\int_{n_r-1}^{n_r}\frac{dt_r}{\ln t_r}+O(|\beta|P_1^{n_1+1}...P_r^{n_r+1}L_1^{-1}...L_r^{-1}e^{-c\sqrt{L}})+O(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1}e^{-c\sqrt{L}})=$$

$$=\varphi(Q)^{-r}\int_2^{P_1}...\int_2^{P_r}\frac{\exp 2\pi iF_\beta(t_1,...,t_r)}{\ln t_1...\ln t_r}dt_1...dt_r+O(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1}e^{-G})=$$

$$=\varphi(Q)^{-r}P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1}\int_0^1...\int_0^1\exp(2\pi iF_\delta(t_1,...,t_r))dt_1,...,dt_r+$$

$$+O(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1}L^{-1}\log L)$$

Отсюда и из (68) имеем

$$S(A)=U(a,q)W(\delta)+O(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1}L^{-1}\log L)$$

Подставляя эту формулу в (67) и распространяя интегрирование в ней на все m - мерное пространство, а затем получившееся выражение подставляя в (68) и распространяя суммирование в ней по всем $Q\ge 1$, найдем

$$J_1=\sigma\gamma(P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1})^k(P_1^{n_1}...P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}}+$$

$$+O((P_1...P_rL_1^{-1}...L_r^{-1})^k(P_1^{n_1}...P_r^{n_r})^{-\frac{m}{2}}L^{-1}\log L).$$

Вместе с оценкой (65) последняя формула дает асимптотическую формулу для $J(\overline{N})$.

5.2 О значении величины особого ряда

Сначала дадим оценку кратной рациональной тригонометрической суммы, у которой переменные суммирования пробегают приведенные системы вычетов по некоторому модуля, т.е. суммы вида

$$S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{q}\right)=\sum_{x_1=1}^{q}{}'...\sum_{x_r=1}^{q}{}'exp2\pi i\frac{F(x_1,...,x_r)}{q},$$

$$F(x_1,...,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}...\sum_{t_r=0}^{n_r}a(t_1,...,t_r)x_1^{t_1}...x_r^{t_r},$$

где $a(0,...,0)=0,\ a(t_1,...,t_r)$ - целые.

Лемма 27. *Пусть $q=q_1...q_k$ - произведение попарно простых чисел, $q=q_sQ_s$. Тогда выполняется равенство*

$$S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{q}\right)=S_1\left(\frac{Q_1^{-1}F(Q_1x_1,...,Q_1x_r)}{q_1}\right)...S_1\left(\frac{Q_k^{-1}F(Q_kx_1,...,Q_kx_r)}{q_k}\right).$$

Доказательство. Если $y_{s,j},\ s=1,...,r;\ j=1,...,k,$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю q_j, то $x_s=Q_1y_{s,1}+...+Q_ky_{s,k},\ s=1,...,r,$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю. Отсюда получаем, что

$$F(x_1,...,x_r)\equiv\sum_{j=1}^{k}F(Q_jy_{1,j},...,Q_jy_{r,j})(mod q)$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 28. *Пусть*

$$F(x_1,...,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n_1}...\sum_{t_r=0}^{n_r}a(t_1,...,t_r)x_1^{t_1}...x_r^{t_r},$$

$$(a(0,...,1),...,a(n_1,...,n_r),p)=1$$

и n- максимальное из чисел $n_1,...,n_r$. Тогда справедлива оценка

$$S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{p^\alpha}\right)\leq(5n^{2n})^r(\alpha+1)^{r-1}p^{r\alpha-\frac{\alpha}{n}}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции по числу переменных многочлена. При $r=1$ и любом $\alpha\geq1$ утверждение леммы справедливо (лемма 18). Предположим, что лемма верна для $r-1$ переменной и любого $\alpha\geq1$. Докажем ее для r переменных.

Пусть $(a(s_1,...,s_r),p)=1,\ s_1>0,$

$$G(x_1,...,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n}...\sum_{t_r=0}^{n}b(t_1,...,t_r)x_1^{t_1}...x_r^{t_r},$$

$$b(t_1,...,t_r)=\begin{cases} a(t_1,...,t_r), \text{ если } 0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

$$S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{p^\alpha}\right)=\sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{\substack{x_r=1\\ p^k\|\varphi_{s_1,...,s_r(x_r)}}}^{p^\alpha}{}'\left|\sum_{x_1=1}^{p^\alpha}{}'...\sum_{x_{r-1}=1}^{p^\alpha}{}'exp2\pi i\frac{G(x_1,...,x_r)}{p^\alpha}\right|,$$

где

$$G(x_1,...,x_r)=\sum_{t_1=0}^{n}...\sum_{t_{r-1}=0}^{n}x_1^{t_1},...,x_{r-1}^{t_{r-1}}\varphi_{t_1,...,t_{r-1}}(x_r).$$

По предположению индукции оценим внутреннюю $(r-1)$- кратную тригонометрическую сумму, а по лемме 6 работы [58] оценим количество точек $x_r,\ 1\le x_r\le p^\alpha$, удовлетворяющих условию

$$\varphi_{s_1,...,s_{r-1}}(x_1)\equiv 0(modp^k).$$

Получим

$$\left|S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{p^\alpha}\right)\right|=\sum_{k=0}^{\alpha}(5n^{2n})^{r-1}(\alpha+1)^{r-2}p^{(r-1)\alpha-\frac{\alpha-k}{n}}\times$$

$$\times 5n^{2n}p^{\alpha-\frac{k}{n}}\le(5n^{2n})^r(\alpha+1)^{r-1}p^{r\alpha-\frac{\alpha}{n}}$$

Лемма доказана.

Лемма 29. *Пусть коэффициенты многочлена $F(x_1,...,x_r)$ в совокупности взаимно просты с q, т.е.*

$$(a(0,...,1),...,a(n_1,...,n_r),q)=1.$$

Тогда справедлива оценка

$$\left|S_1\left(\frac{F(x_1,...,x_r)}{q}\right)\right|\le(5n^{2n})^{rv(q)}(\tau(q))^{r-1}q^{r-\frac{1}{n}},$$

где $v(q)$- число различных простых делителей q, $\tau(q)$- число всех делителей q.

Доказательство. Утверждение леммы следует из лемм 27 и 28.

Лемма 30. *Ряд σ из теоремы абсолютно сходится при $k>nm$.*

Доказательство. Имеем

$$|\sigma|\le\sum_{Q=1}^{+\infty}\sum_{\substack{q(n_1,...,n_r)=1\\ [q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1)]=Q}}^{+\infty}\cdots\sum_{q(0,...,1)=1}^{+\infty}|A(q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1))|.$$

Из леммы 29 следует, что

$$|A(q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1))| \ll \varphi(q(n_1,...,n_r))...\varphi(q(0,...,1))Q^{k(-\frac{1}{n}+\varepsilon)}$$

Отсюда получим

$$|\sigma| \ll \sum_{Q=1}^{+\infty} \sum_{q(n_1,...,n_r)|Q} ... \sum_{q(0,...,1)|Q} \varphi(q(n_1,...,n_r))...\varphi(q(0,...,1))Q^{k(-\frac{1}{n}+\varepsilon)} =$$

$$= \sum_{Q=1}^{+\infty} Q^{m-1+k(-\frac{1}{n}+\varepsilon)}$$

Следовательно, ряд σ сходится при $k > nm$. Лемма доказана.

Обозначим через $W(d;k)$ число решений системы сравнений $(0 \le t_1 \le n_1, \ldots, 0 \le t_r \le n_r,\ t_1 + \cdots + t_r \ge 1)$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1}...x_{r,j}^{t_r} \equiv N(t_1,...,t_r)(modd),$$

где неизвестные $x_{s,j}, 1 \le s \le r,\ 1 \le j \le k$, принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю d.

Лемма 31. *При $k > nm$ имеем равенство*

$$\sigma = \prod_p \sigma_p,\ \ \sigma_p = \lim_{\alpha \to \infty} p^{\alpha(m-1)} \varphi^{-kr}(p^\alpha) W(p^\alpha;k). \tag{69}$$

Кроме того, σ_p можно представить в виде

$$\sigma_p = 1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q(n_1,...,n_r)=1 \\ [q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1)]=p^\alpha}}^{+\infty} \cdots \sum_{q(0,...,1)=1}^{+\infty} A(q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1)). \tag{70}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{gathered}\Sigma_1(D) = \sum_{Q|D} \sum_{\substack{q(n_1,...,n_r)=1 \\ [q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1)]=Q}}^{+\infty} \cdots \sum_{q(0,...,1)=1}^{+\infty} \times \\ \times \sum_{1 \le a(n_1,...,n_r) < q(n_1,...,n_r)}{}' \cdots \sum_{1 \le a(0,...,1) < q(0,...,1)}{}' T^k e^{-2\pi i (\frac{a}{q} \times N)},\end{gathered} \tag{71}$$

$$\begin{gathered}T = T(Q) = \varphi(Q)^{-r} \sum_{1 \le x_1 \le Q}{}' \cdots \sum_{1 \le x_1 \le Q}{}' \times \\ \times \exp\left(2\pi i \sum_{t_1=0}^{n_1} ... \sum_{t_r=0}^{n_r} \frac{a(t_1,...,t_r)}{q(t_1,...,t_r)} x_1^{t_1},...,x_r^{t_r}\right).\end{gathered} \tag{72}$$

$$\frac{a}{q} \times \overline{N} = \sum_{t_1=0}^{n_1} ... \sum_{t_r=0}^{n_r} \frac{a(t_1, ..., t_r)}{q(t_1, ..., t_r)} N(t_1, ..., t_r).$$

Тогда при $k > nm$ в силу леммы 30 имеем

$$\sigma = \lim_{\alpha \to +\infty} \Sigma_1(D).$$

Преобразуем теперь выражение для $W(D;k)$:

$$W(D;k) = D^{-m+1} \sum_{b(n_1,...,n_r)=1}^{D} \cdots \sum_{b(0,...,1)=1}^{D} \times$$
$$\times \left({\sum_{1 \le x_1 \le D}}' \cdots {\sum_{1 \le x_1 \le D}}' \exp\left(\frac{2\pi i}{D} \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+...+t_r \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} b(t_1, ..., t_r) x_1^{t_1}, ..., x_r^{t_r} \right) \right)^k \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{2\pi i}{D} \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+...+t_r \geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} b(t_1, ..., t_r) N(t_1, ..., t_r) \right).$$

Представим каждое $b(s_1, ..., s_r)$ в виде

$$\frac{b(s_1, ..., s_r)}{D} = \frac{a(s_1, ..., s_r)}{q(s_1, ..., s_r)},$$

где

$$(a(s_1, ..., s_r), q(s_1, ..., s_r)) = 1$$

Как и раньше, обозначим через Q наименьшее общее кратное

$$q(s_1, ..., s_r), \quad 0 \le s_1 \le n_1, ..., 0 \le s_r \le n_r, \quad s_1 + ... + s_r \ge 1$$

Имеем

$$W(D;k) = D^{-m+1} \sum_{Q|D} \sum_{\substack{q(n_1,...,n_r)=1 \\ [q(n_1,...,n_r),...,q(0,...,1)]=Q}}^{+\infty} \cdots \sum_{q(0,...,1)=1}^{+\infty} \times$$
$$\times {\sum_{1 \le a(n_1,...,n_r) \le q(n_1,...,n_r)}}' \cdots {\sum_{1 \le a(0,...,1) \le q(0,...,1)}}' \varphi(D)^{rk} T^k \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} \times N\right).$$

Следовательно, получим

$$W(D;k) = D^{-m+1} \varphi(D)^{rk} \Sigma_1(D). \tag{73}$$

Таким образом
$$\sigma=\lim_{d\to\infty}D^{m-1}\varphi(D)^{-rk}W(D;k).$$
Далее воспользуемся мультипликативностью $\varphi(D)$ и $W(D;k)$, будем иметь:
$$\sigma=\lim_{d\to\infty}\prod_{p\leq\alpha}p^{(m-1)\alpha_p(\alpha)}\varphi(p^{\alpha_p(\alpha)})^{-rk}W(p^{\alpha_p(\alpha)};k),$$
где $\alpha_p(\alpha)$ определяются из равенства
$$d!=\prod_{p\leq\alpha}p^{\alpha_p(\alpha)}.$$
Воспользовавшись леммой 30 и последним равенством для σ, получим
$$\sigma=\prod_p\sigma_p.$$
Второе выражение для σ_p получается из равенств (71), (73) при $D=p^\alpha$. Доказательство справедливости (70) при $D=p^\alpha$ проводится дословным повторением соответствующих рассуждений.

Пусть $n_1,...,n_r$- натуральные числа, p- простое число, $n=n_1+...+n_r,\ t=t_1+...+t_r$. Определим числа $m_1,...,m_r$ следующим образом
$$n_j+1=l_j(p-1)+v_j,\ 0\leq v_j<p-1;\ m_j=n_j+l_j+1.$$
Рассмотрим систему сравнений
$$\sum_{j=1}^k x_{1,j}^{t_1}...x_{r,j}^{t_r}\equiv N(t_1,...,t_r)(mod p^\alpha)$$
$$(0\leq t_1\leq n_1,...,0\leq t_r\leq n_r), \tag{74}$$
где $N(t_1,...,t_r),\ 0\leq t_1\leq n_1,...,0\leq t_r\leq n_r$- фиксированные натуральные числа; неизвестные $x_{s,j},\ 1\leq s\leq r,...,1\leq j\leq k$, пробегают значения из приведенной системы вычетов по модулю p^α. Система сравнений (74) состоит из $m=(n_1+1)(n_2+1)...(n_r+1)$ сравнений. Рассмотрим далее систему линейных сравнений с неизвестным $t(v_1,...,v_r)$:
$$\sum_{\substack{v_1=1\\(v_1,p)=1}}^{m_1}...\sum_{\substack{v_r=1\\(v_r,p)=1}}^{m_r}t(v_1,...,v_r)v_1^{s_1},...,v_r^{s_r}\equiv N(s_1,...,s_r)(mod p^\alpha)$$
$$(0\leq s_1\leq n_1,...,0\leq s_r\leq n_r) \tag{75}$$

Лемма 32. *Из разрешимости системы сравнений (74) следует разрешимость системы (75), и наоборот, из разрешимости системы (75) следует,* *существование такого числа k, $k \equiv N(0,...,0)(modp^{\alpha})$, что система (61) имеет решение.*

Доказательство. Сначала заметим, что при $(x_1, p) = 1, ..., (x_r, p) = 1$ разрешима система сравнений

$$\sum_{\substack{v_1=1\\(v_1,p)=1}}^{m_1} \dots \sum_{\substack{v_r=1\\(v_r,p)=1}}^{m_r} T(v_1,...,v_r)v_1^{s_1},...,v_r^{s_r} \equiv x_1^{s_1},...,x_r^{s_r}(modp^{\alpha}) \qquad (0 \le s_1 \le n_1,...,0 \le s_r \le n_r) \tag{76}$$

Действительно, решение системы (76) можно взять в виде

$$T(v_1,...,v_r) \equiv T_{v_1}(x_1)...T_{v_r}(x_r)(modp^{\alpha}),$$

где $T_{v_s}(x_s)$- решение системы (лемма 21)

$$\sum_{\substack{v_s=1\\(v_s,p)=1}}^{m_s} T_{v_s}(x_s)v_s^l \equiv x_s^l(modp^{\alpha}), \quad 0 \le l \le n_s.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{v_1=1\\(v_1,p)=1}}^{m_1} \dots \sum_{\substack{v_r=1\\(v_r,p)=1}}^{m_r} T(v_1,...,v_r)v_1^{t_1},...,v_r^{t_r} \equiv$$

$$\equiv \left(\sum_{\substack{v_1=1\\(v_r,p)=1}}^{m_1} T_{v_1}(x_1)v_1^{t_1}\right) \dots \left(\sum_{\substack{v_r=1\\(v_r,p)=1}}^{m_r} T_{v_r}(x_r)v_r^{t_r}\right) \equiv x_1^{t_1}...x_r^{t_r}(modp^{\alpha})$$

Из разрешимости систем (74) и (76) следует разрешимость системы (75). Очевидным образом из разрешимости (75) при некотором k получается, что система (74) имеет решение. Лемма доказана.

Набор $\overline{N} = (N(n_1,...,n_r),...,N(0,...,1))$ назовем удовлетворяющим условию разрешимости для некоторого $N(0,...,0)$, если система сравнений (75) имеем решение при любом простом числе p и любом натуральном числе α.

Лемма 33. *Пусть $k \ge k_0 = rmn^5 2^{4(n+r)}$ и набор удовлетворяет условию разрешимости. Тогда для величины $W(p^{\alpha};k)$ справедливо неравенство*

$$W(p^{\alpha};k) \ge cp^{\alpha(rk-m+1)},$$

где $c = c(n,\ k,p) > 0$ некоторая постоянная.

Доказательство.

$$M(t_1,...,t_r) = N_1(t_1,...,t_r) - \sum_{a_1=1}^{m_1}{}' \dots \sum_{a_r=1}^{m_r}{}' a_1^{t_1}...a_r^{t_r},$$

где штрих в знаках суммирования означает, что $(a_1,p)=...=(a_r,p)=1$.

Набор $\overline{M}$ так же, как и набор $\overline{N_1}$, удовлетворяет условию разрешимости. Следовательно, при $\gamma=4\kappa+2[\frac{p}{(p-1)^2}(n+r)]+1$, $p^\kappa\le n<p^{\kappa+1}$ имеет решение система сравнений

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'T(a_1,...,a_r)a_1^{t_1},...,a_r^{t_r}\equiv M(t_1,...,t_r)(mod p^\gamma)$$
$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r) \tag{77}$$

Пусть $\alpha=\gamma-\kappa$. Обозначим через $c(a_1,...,a_r)$ наименьший неотрицательный вычет числа $T(a_1,...,a_r)$ по модулю p^α. Тогда имеет место система сравнений

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'c(a_1,...,a_r)a_1^{t_1},...,a_r^{t_r}\equiv M(t_1,...,t_r)(mod p^\alpha)$$
$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r) \tag{78}$$

Положим
$$k_1=\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}(c(a_1,...,a_r)+1).$$

В силу определения набор $\overline{M}$ отсюда имеем

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'a_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}+\sum_{j=m+1}^{k}a_{1,j}^{t_1}\cdots a_{r,j}^{t_r}\equiv N_1(t_1,...,t_r)(mod p^\alpha)$$
$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r) \tag{79}$$

Положим $b=\alpha-\kappa$, $z_j=a_j+p^ba_ju(a_1,...,a_r)$, $1\le j\le k$. Тогда найдутся такие $u(a_1,...,a_r)$, что система сравнений

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'z_1^{t_1}\cdots z_r^{t_r}+\sum_{j=m+1}^{k_1}a_{1,j}^{t_1}\cdots a_{r,j}^{t_r}\equiv N_1(t_1,...,t_r)(mod p^\alpha)$$
$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r) \tag{80}$$

имеет решение.

Действительно, так как $2b\ge\gamma$ и выполняется (80), то при некоторых $\lambda(a_1,...,a_r)$ имеет место система сравнений

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'ta_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}u(a_1,...,a_r)\equiv$$
$$\equiv p^{\alpha-b}\sum_{a_1=1}^{m_1}{}'...\sum_{a_r=1}^{m_r}{}'\lambda(a_1,...,a_r)a_1^{t_1}\cdots a_r^{t_r}(mod p^{\gamma-b}) \tag{81}$$
$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r)$$

Поскольку $\alpha - b = \kappa \geq \delta(t)$; $p^{\delta(t)} \parallel t$, то в качестве решения этой системы можно взять числа $u(a_1, .., a_r)$, удовлетворяющие сравнениям

$$tu(a_1, ..., a_r) \equiv p^{\alpha-b}\lambda(a_1, ..., a_r)(modp^{\gamma-b})$$

Покажем далее, что разрешима система сравнения

$$\sum_{j=1}^{k_1} y_{1,j}^{t_1} \cdots y_{r,j}^{t_r} \equiv N_1(t_1, ..., t_r)(modp^{\gamma+1}) \qquad (82)$$
$$(0 \leq t_1 \leq n_1, ..., 0 \leq t_r \leq n_r)$$

где $y_{s,j} = a_{s,j} + a_{s,j}p^b v(a_{1,j}, ..., a_{r,j})$, $s = 1, ..., r$; $j = 1, ..., k$; $a_{s,j}$- решение системы (80).

Зафиксируем $v(a_{1,j}, \ldots, a_{r,j})$, $j = m+1, \ldots, k$. Из системы (82) следует, что при $\gamma + 1 \leq 2b$, $b = 2\kappa + [\frac{p}{(p-1)^2}(n+r)] + 1$, выполняется система сравнений с неизвестными $v(a_{1,j}, \ldots, a_{r,j}) = v(a_1, \ldots, a_r)$, $1 \leq j \leq m$:

$$\sum_{a_1=1}^{m_1}{}' ... \sum_{a_r=1}^{m_r}{}' t a_1^{t_1} \cdots a_r^{t_r} v(a_1, ..., a_r) \equiv$$
$$\equiv \lambda(\bar{t})p^{\gamma-b} - \sum_{j=m+1}^{k_1} t a_{1,j}^{t_1} \cdots a_{r,j}^{t_r} v(a_{1,j}, \ldots, a_{r,j})(modp^{\gamma+1-b}),$$

Отсюда находим

$$v(a_1, \ldots, a_r) \equiv p^{\gamma-b} \sum_{t_1=0}^{n_1} \ldots\ldots \sum_{t_r=0}^{n_r} \frac{\gamma(\bar{t})}{t} \sigma(\bar{t}) \prod_{s=1}^{r} \prod_{\substack{b_s=1 \\ b_s \neq a_s}}{}' (b_s - a_s)^{-1} -$$
$$- \sum_{j=m+1}^{k_1} v(a_{1,j}, \ldots, a_{r,j}) \prod_{s=1}^{r} \prod_{\substack{b_s=1 \\ b_s \neq a_s}}{}' \frac{(a_{s,j} - b_s)}{(a_s - b_s)} (modp^{\gamma+1-b})$$

при условии, что

$$\gamma - b - \kappa - \sum_{s=1}^{r} \delta_s \geq 0, \quad \delta_s = \delta(m_s!).$$

Но последнее условие выполняется, так как

$$m_s = n_s + l_s + 1 = n_s + \left[\frac{n_s+1}{p-1}\right] + 1 \leq \frac{(n_s+1)p}{p-1};$$

$$\delta_s = \delta(m_s!) = \left[\frac{m_s}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{m_s}{p^t}\right] + \cdots \leq \frac{m_s}{p-1};$$

$$\delta_s \leq \frac{(n_s+1)p}{(p-1)^2}; \ \gamma = 4x + 2\left[\frac{p}{(p-1)^2}(n+r)\right] + 1.$$

Далее аналогично устанавливается разрешимость системы (65) по модулю p^s, $s \geq \gamma + 1$. Для величины k_1 имеем оценку

$$k_1 \leq mp^\alpha \leq mp^{3\kappa+2[\frac{p}{(p-1)^2}(n+r)]+1} \leq mn^4 2^{4(n+r)-1} = k_2.$$

Возьмем $k = 2k_1rn$ и при произвольных $x_{s,j}$, $1 \leq s \leq r$, $k_1 + 1 \leq j \leq k$ из приведенной системы вычетов по модулю p^γ положим

$$N_1(t_1, ..., t_r) = N_1(t_1, ..., t_r) - \sum_{j=k_1+1}^{k} x_{1,j}^{t_1}, ..., x_{r,j}^{t_r}$$

$$(0 \leq t_1 \leq n_1, \ldots, 0 \leq t_r \leq n_r, \quad t_1 + \cdots + t_r \geq 1)$$

Поскольку системы сравнений (80), (82) имеют хотя бы одна решение, то

$$W(p^s; k) \geq (\varphi(p^s))^{(k-k_1)r}$$

Теперь оценим величину $W(p^s; k)$, $s > \gamma$, снизу. Запишем $W(p^s; k)$ через тригонометрическую сумму

$$W(p^s; k) = p^{-(m-1)s} \sum_{b(n_1,\ldots,n_r)=1}^{p^s} \cdots \sum_{b(0,\ldots,1)=1}^{p^s} \times$$

$$\times \left(\sum_{x_1=1}^{p^s}{}' \cdots \sum_{x_r}^{p^s}{}' exp 2\pi i \frac{f_B(x_1, \ldots, x_r)}{p^s} \right)^k exp(-2\pi i(\frac{B}{p^s} \times \overline{N})),$$

$$f_B(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} b(t_1, ..., t_r) x_1^{t_1}, \ldots, x_r^{t_r} \quad b(0, \ldots, 0) = 0$$

$$\frac{B}{p^s} \times \overline{N} = \sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} b(t_1, ..., t_r) N(t_1, ..., t_r)$$

Соберем в сумме для $W(p^s; k)$ вместе слагаемые с условием

$$(b(n_1, \ldots, n_r), \ldots, b(0, \ldots, 1), p^s) = p^t.$$

Соответствующую сумму обозначим через Σ_t. Тогда

$$W(p^s; k) = p^{-(m-1)s} \sum_{t=0}^{s} \Sigma_t$$

Представим $W(p^s; k)$ в виде

$$W(p^s; k) = W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = \sum_{s-\gamma \le t \le s} \Sigma_t,$$

$$W_2 = \sum_{0 \le t \le s-\gamma} \Sigma_t,$$

Преобразуем W_1. Для этого представим $b(t, \ldots, t_r)$ в виде

$$b(t_1, \ldots, t_r) = p^{s-\gamma} a(t_1, \ldots, t_r).$$

Имеем

$$W_1 = p^{-(m-1)s} \sum_{a(n_1,\ldots,n_r)=1}^{p^\gamma} \cdots \sum_{a(0,\ldots,1)=1}^{p^\gamma} \times p^{(s-\gamma)kz} T^k(p^\gamma) e^{-2\pi i(\frac{A}{p^\gamma} \times \overline{N})},$$

где

$$T(p^\gamma) = \sum_{x_1=1}^{p^\gamma}{}' \cdots \sum_{x_1=1}^{p^\gamma}{}' exp 2\pi i \frac{f_A(x_1, \ldots, x_r)}{p^\gamma},$$

$$A = (a(n_1, \ldots, n_r), \ldots, a(0, \ldots, 1)).$$

Отсюда получим

$$W_1 = p^{(s-\gamma)(kr-m+1)} W(p^\gamma; k).$$

Оценим теперь сверху W_2. В силу леммы 28 имеем неравенство

$$|\Sigma_t| \le p^{-(m-1)s} \sum_{\substack{b(n_1,\ldots,n_r)=1 \\ (b(n_1,\ldots,n_r),\ldots,b(o,\ldots,1),p^s)=p^t}}^{p^s} \cdots \sum_{b(0,\ldots,1)=1}^{p^s} |T(p^s)|^k \ll$$

$$\ll p^{-(m-1)s} p^{(s-t)(m-1)} p^{(sr-\frac{s-t}{n}+\varepsilon)k} = p^{s(ks-m+1)} \triangle, \ \triangle = \triangle_{s-t} = p^{(s-t)(m-1-\frac{k}{n}+k\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$W_2 \ll p^{s(kr-m+1)} \triangle_\gamma.$$

Таким образом, получим

$$W(p^s; k) = W_1 + W_2 \ge (\varphi(p^s))^{kr} p^{-s(m-1)} (\varphi(p^\gamma))^{-k_1 r} p^{\gamma(m-1)} -$$

$$- p^{s(kz-m+1)} \triangle_\gamma \ge c(\varphi(p^s))^{kr} p^{-s(m-1)}$$

Лемма доказана.

Лемма 33. *При $k \ge 2mn$ справедлива оценка*

$$\sigma_p = 1 + O(p^{-1-v})$$

Доказательство.

Справедлива оценка

$$\sum_{\substack{q(n_1,\dots,n_r)=1\\(q(n_1,\dots,n_r),\dots,q(0,\dots,1))=p^l}}^{+\infty}\cdots\sum_{q(0,\dots,1)=1}^{+\infty}|A(q(n_1,\dots,n_r),\dots,q(0,\dots,1))|\ll$$

$$\sum_{q(n_1,\dots,n_r)|p^l}\cdots\sum_{q(0,\dots,1)|p^l}\varphi(q(n_1,\dots,n_r)),\dots,\varphi(q(0,\dots,1))p^{(-lv+v\varepsilon)k}=$$

$$=p^{(m-1)l-klv+kl\varepsilon}$$

Отсюда имеем при $k\geq 2mn$

$$\sigma_p=1+O\left(\sum_{l=1}^{+\infty}p^{l(m-1-kv+k\varepsilon}\right)=1+O\left(p^{m-1-kv+k\varepsilon}\right)=1+O(p^{-1-v}).$$

Лемма доказана.

Лемма 33. *Пусть* $k\geq k_0,\ k_0=rmn^5 2^{4(n+r)}$. *Тогда для набора* $\overline{N}$, *удовлетворяющего условию разрешимости, справедливо неравенство*

$$\sigma\geq c(n)>0,$$

где σ *- сингулярный ряд теоремы 6.*

Доказательство. В силу леммы 34 существует положительная постоянная $c_1=c_1(n_1,\dots,n_r)$, что выполняется неравенство при $k>2nm$

$$\sigma_p=1+O(p^{-1-v})>0.$$

Поэтому в силу леммы 34 имеем, что бесконечное произведение

$$\varphi_2=\prod_{p>c_1}\sigma_p\geq c_2>0$$

сходится к положительному числу.

В силу лемм 31 и 33 при $p\leq c_1$ получим

$$\varphi_1=\prod_{p\leq c_1}\sigma_p\geq c_3>0.$$

Следовательно,

$$\sigma=\varphi_1\varphi_2\geq c_4>0.$$

Теорема доказана.

5.3 Теорема

Сначала найдем условие положительности особого интеграла γ в зависимости от решений в действительных числах системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1}\cdots x_{r,j}^{t_r} = \beta(t_1,\ldots,t_r), \tag{83}$$

где $0\le t_1\le n_1,\ldots,0\le t_r\le n_r$ величины $\beta(t_1,\ldots,t_r)$ определяется равенствами

$$\beta(t_1,\ldots,t_r) = N(t_1,\ldots,t_r)P_1^{-t_1}\cdots P_r^{-t_r},$$

а неизвестные $x_{1,j}$ при $1\le s\le,\ 1\le j\le k$, удовлетворяют условиям $0\le x_{s,j}\le 1$.

Обозначим через Ω область точек $x_{s,j}$, $1\leqslant s\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant k$, для которых выполнены неравенства:

1) $0\leqslant x_{s,j}\leqslant 1,\quad s=1,\ldots,r;\quad j=1,\ldots,k;$

2) $\left|\sum\limits_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1}\cdots x_{r,j}^{t_r} - \beta(t_1,\ldots,t_r)\right| \leqslant h,\quad h\geqslant 0,$
$(0\leqslant t_1\leqslant n_1,\ldots,0\leqslant t_r\leqslant n_r)$.

Объем области Ω обозначим через $\mu(h)$, т.е. положим

$$\mu(h) = \int\limits_{\Omega}\ldots\int dx_{11}\ldots dx_{x_{rk}}.$$

Лемма 7. *При $k>nm$ справедливо равенство*

$$\gamma = \gamma(\beta(n_1,\ldots,n_r),\ldots,\beta(0,\ldots,1)) = \lim_{h\to 0} 2^{-m+1}h^{-m+1}\mu(h).$$

Доказательство. Так как при $k>nm$ интеграл сходится абсолютно, то он представляет собой непрерывную функцию по совокупности переменных $\beta(t_1,\ldots,t_r)$, $0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r$, $t_1+...+t_r\ge 1$. Положим

$$F(\overline{\beta}) = F(\beta(n_1,\ldots,n_r),\ldots,\beta(0,\ldots,1)) =$$

$$= \int_0^{\beta(n_1,\ldots,n_r)}\ldots\int_0^{\beta(0,\ldots,1)} \gamma(\alpha(n_1,\ldots,n_r),\ldots,\alpha(0,\ldots,1))d\overline{\alpha}.$$

Отсюда имеем

$$\gamma(\overline{\beta}) = \frac{\partial^{m-1}F(\overline{\beta})}{\partial\overline{\beta}} = \lim_{h\to 0} 2^{-m+1}h^{-m+1}\int\limits_{\Omega}\cdots\int \gamma(\overline{\alpha})d\overline{\alpha}. \tag{84}$$

Покажем, что $F(\overline{\beta})$ можно представить в виде:

$$F(\overline{\beta}) = \underset{\Omega_1(\overline{\beta})}{\int\cdots\int}\cdots dx_{11}\cdots dx_{r1}\dots dx_{1k}\cdots dx_{rk},$$

где $\Omega_1(\overline{\beta})$ обозначает область точек с условиями

$$0 \le x_{s,j} \le 1 \quad 1 \le s \le r, \quad 1 \le j \le k;$$

$$0 < x_{11}^{t_1}\dots x_{r1}^{t_r} + \dots + x_{1k}^{t_1}\dots x_{rk}^{t_r} < \beta(t_1,\dots,t_r)$$
$$(0 \le t_1 \le n_1, \dots, 0 \le t_r \le n_r)$$

Действительно, согласно определению функций $F(\overline{\beta})$ и $\gamma(\overline{\alpha})$ имеем

$$F(\overline{\beta}) = \int_0^{\beta(n_1,\dots,n_r)}\dots\int_0^{\beta(0,\dots,1)}\gamma(\overline{\alpha})d\overline{\alpha} = \int_0^{\beta(n_1,\dots,n_r)}\dots\int_0^{\beta(0,\dots,1)}d\overline{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\times$$
$$\times\left(\int_0^1\dots\int_0^1 e^{2\pi i(\sum\limits_{t_1=0}^{n_1}\dots\sum\limits_{t_r=0}^{n_r}(u(t_1,\dots,t_r)-\alpha(t_1,\dots,t_r))z(t_1,\dots,t_r))}d\overline{x}\right)d\overline{z},$$

где величины $u(t_1,\dots,t_r)$ определяются равенствами

$$u(t_1,\dots,t_r) = x_{11}^{t_1}\dots x_{r1}^{t_r} + \dots + x_{1k}^{t_1}\dots x_{rk}^{t_r}$$
$$(\ 0 \le t_1 \le n_1, ..., 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + ... + t_r \ge 1)$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования и интегрируя по $\overline{\alpha}$, получим

$$F(\overline{\beta}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\prod_{t_1=0}^{n_1}\dots{\prod_{t_r=0}^{n_r}}'\frac{1-e(-2\pi i z(t_1,\dots,t_r)\beta(t_1,\dots,t_r))}{2\pi i z(t_1,\dots,t_r)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^1\dots\int_0^1\exp(2\pi i u(t_1,\dots,t_r)z(t_1,\dots,t_r))dx_{11}\dots dx_{rk}\right)d\overline{z} =$$
$$= \int_0^1\dots\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{t_1=0}^{n_1}\dots{\prod_{t_r=0}^{n_r}}'\left(\frac{\exp 2\pi i u(t_1,\dots,t_r)z(t_1,\dots,t_r)}{2\pi i z(t_1,\dots,t_r)} - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\exp(2\pi i(u(t_1,\dots,t_r)-\beta(t_1,\dots,t_r))z(t_1,\dots,t_r))}{2\pi i z(t_1,\dots,t_r)}d\overline{z}\right)\right)dx_{11}\dots dx_{rk} =$$
$$= \pi^{-m+1}\int_0^1\cdots\int_0^1 dx_{11}\cdots dx_{rk}\prod_{t_1=0}^{n_1}\cdots{\prod_{t_r=0}^{n_r}}'\times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin 2\pi z(\bar t)u(\bar t)}{z(\bar t)} - \frac{\sin 2\pi z(\bar t)(u(\bar t)-\beta(\bar t))}{z(\bar t)}\right)dz\right).$$

В силу равенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha,$$

имеем

$$F(\overline{\beta}) = 2^{-m+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{t_1=0}^{n_1} \cdots \prod_{t_r=0}^{n_r}{}'(\operatorname{sign} z(\overline{t}) - \operatorname{sign}(z(\overline{t}) - \beta(\overline{t})))dx_{11} \cdots dx_{rk} =$$

$$= \int_{\substack{u(\overline{t}<\beta(\overline{t}))\\ 0<x_{11},\dots,x_{rk}<1}} \dots \int dx_{11} \dots dx_{rk} = \int_{\Omega_1(\overline{\beta})} \dots \int dx_{11} \dots dx_{rk}.$$

Таким образом, требуемое равенство для функции $F(\overline{\beta})$ доказано. Воспользовавшись последним равенством и формулой (84) получим

$$\gamma(\overline{\beta}) = \lim_{h\to 0} 2^{-m+1} h^{-m+1} \mu(h).$$

Лемма доказана.

Определение. Рассмотрим систему уравнений

$$F_{t_1,\dots,t_r}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1}, ..., x_{r,j}^{t_r} = \beta(t_1, ..., t_r),$$

$$(0 \le t_1 \le n_1, ..., 0 \le t_r \le n_r, \quad t_1 + ... + t_r \ge 1),$$

где $\overline{x}$- набор целочисленных переменных $(x_{11}, \dots, x_{r1}, \dots, x_{1k}, \dots, x_{rk})$. Матрицей Якоби решения $\overline{x}$ этой системы уравнений назовем матрицу вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{s,j}} F_{t_1,\dots,t_r}(\overline{x}) \right),$$

строки которой нумеруются наборами $(t_1, \dots, t_r)$, $0 \le t_1 \le n_1, ..., 0 \le t_r \le n_r$, $t_1+...+t_r \ge 1$, упорядоченными некоторым образом, а столбцы нумеруются как: $s + r(j-1)$, $1 \le s \le r$, $1 \le j \le k$.

Лемма 36. *Пусть для некоторого решения $x_{s,j}$ $1 \le s \le r$, $1 \le j \le k$, системы уравнений (60) при $k \ge m$ его матрица Якоби имеет максимальный ранг, равный $m-1$. Пусть некоторая ее подматрица размера $(m-1)\times(m-1)$, определитель которой равен $\varepsilon > 0$. Тогда*

1) при достаточно малом $h > 0$ для объема $\mu(h)$ области Ω имеет место оценка

$$\mu(h) \ge c_1(\varepsilon) 2^{m-1} h^{m-1},$$

где $c_1(\varepsilon)$- некоторая положительная постоянная;

2) при $k \ge nm$ для особого интеграла γ имеем оценку

$$\gamma \ge c_1(\varepsilon) > 0$$

Доказательство. Обозначим через $y_1,\dots,y_{m-1}$ те переменные, для которых определитель матрицы Якоби функций

$$F_{t_1,\dots,t_r}(\overline{y})=\sum_{j=1}^{k} y_{1,j}^{t_1}\cdots y_{r,j}^{t_r}$$

$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r,\quad t_1+...+t_r\ge 1),$$

больше $\varepsilon > 0$. Пусть далее $y_m,\dots,y_{kr}$ оставшиеся переменные. Пусть $z_m,\dots,z_{kr}$- любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$|z_s-y_s|<\delta_1,\ s=m,\dots,kr.$$

В силу теоремы о неявных функциях найдется $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ такие, что функции

$$\begin{gathered} z_1=z_1(z_m,\dots,z_{kr}),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ z_{m-1}=z_{m-1}(z_m,\dots,z_{kr}), \end{gathered}$$

являются решением системы уравнений

$$F_{t_1,\dots,t_r}(z_1,\dots,z_{kr})=\beta(t_1,\dots,t_r)$$

$$(0\le t_1\le n_1,...,0\le t_r\le n_r,\quad t_1+...+t_r\ge 1),$$

Возьмем $h>0$ достаточно малым и любые $u_1,\dots,u_{m-1}$ с условиями

$$|u_s-z_s|<hr^{-1}n^{-1}m^{-1}=\delta_2,\quad s=1,\dots,m-1.$$

Тогда

$$|u_{s_1}^{t_1}\dots u_{s_r}^{t_r}-y_{s_1}^{t_1}\dots u_{s_r}^{t_r}|<hm^{-1}$$

и набор $(u_1,\dots,u_{m-1},\ z_m,\dots,z_{kr})$ принадлежит области Ω. Множество таких наборов обозначим через Ω_1. Имеем

$$\mu(h)\ge\int\cdots\int_{\Omega_1} du_1\cdots du_{m-1}dz_m\cdots dz_{kr}=$$

$$=\delta_1^{kr-m+1}(2\delta_2)^{m-1}=c_1(\varepsilon)2^{m-1}h^{m-1},$$

где

$$c_1(\varepsilon)=\delta_1^{kr-m+1}(rmn)^{-m+1}>0$$

В силу леммы 35 из этого неравенства получим

$$\gamma=\gamma(\overline{\beta})\ge c_1(\varepsilon)>0.$$

Лемма доказана.

Отметим, что если для любого решения системы уравнений (83) матрица Якоби имеет ранг меньший $m-1$, то из леммы 35 и соображений размерности области Ω следует, что $\gamma = 0$. Действительно, возьмем любое решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1}, ..., x_{r,j}^{t_r} = \beta(t_1, ..., t_r) \qquad (85)$$
$$(0 \leq t_1 \leq n_1, ..., 0 \leq t_r \leq n_r, \quad t_1 + ... + t_r \geq 1)$$

Ранг матрицы Якоби этого решения меньше $m-1$. Тогда существует набор

$$c(t_1, \dots, t_r) = c(t_1, \dots, t_r; \overline{x}),$$
$$\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\ldots+t_r\geqslant 1}}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} c^2(t_1, \dots, t_r) = 1,$$

удовлетворяющий условиям

$$\sum_{t_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{t_r=0}^{n_r} c(t_1, \dots, t_r) t_s x_{1,j}^{t_1}, ..., x_{s,j}^{t_s-1} \dots x_{r,j}^{tr} = 0, \quad j = 1, \dots, k \qquad (86)$$

Рассмотрим в $(kr + m - 1)$- мерном пространстве множество V точек $(x_{11}, \dots, x_{rk}, c(0, \dots, 1), \dots, c(n_1, \dots, n_r))$ с условиями (85), (86). Покажем, что поверхность, частью которой это множество является, имеет небольшую размерность. Предположим, что в некоторой точке размерность этой поверхности будет $\geq kr - m + 1$. Зафиксируем теперь набор $(c(0, \dots, 1), \dots, c(n_1, \dots, n_r))$. На рассматриваемой поверхности получим слой V_c. Его размерность будет $\geq kr - 2m + 2$. С другой стороны, из системы (86) имеем, что размерность множества V_c будет $\leqslant kr - k$.

Но так что при $k > 2m-2$ справедливо неравенство $kr-k < kr-2m+2$, то предположение о размерности поверхности V неверно. Следовательно, в каждом точке размерность пространства V меньше $kr-m+1$. Но это означает, что и размерность поверхности, задаваемой (85) и получаемой проекцией поверхности V при $c(0, \dots, 1) = 0, \dots, c(n_1, \dots, n_r) = 0$, также будет меньше $kr - m + 1$. Следовательно, объем $\mu(h)$ этой поверхности в $(kr-m+1)$- мерном пространстве равен 0, а по лемме 35 отсюда имеем, что $\gamma = 0$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 37. *Если для любого решения системы уравнений (83) его матрица Якоби имеет ранг $< m-1$, то особый интеграл γ равен 0.*

Назовем набор правых частей системы уравнений (60) допустимым, если этот набор 1) удовлетворяет условию разрешимости (75), 2) матрица Якоби некоторого решения системы уравнения (83) имеет максимальный ранг, равный $m-1$.

Как и в главе III, будем готовить, что асимптотическая формула теоремы 8 нетривиальна, если $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$.

Завершим главу следующей теоремой.

Теорема 10. *1) Если набор*

$$\overline{N} = (N(n_1, \ldots, n_r), \ldots, N(0, \ldots, 1))$$

не является допустимым, то асимптотическая формула теоремы 8 - тривиальна.

2) Если набор $\overline{N}$ - допустимый, то при $k > rmn^5 2^{4(n+r)}$ асимптотическая формула теоремы 8 - нетривиальна.

3) Если же $k \geq 2^l$, $l = max(n_1, \ldots, n_r)$, то существуют допустимые наборы $\overline{N}$, для которых асимптотическая формула - тривиальна.

Доказательство. Утверждение 1) следует из лемм 32и 37. Утверждение 2) следует из теоремы 9 и леммы 36. Утверждение 3) является следствием утверждения 1) теоремы 4 статьи [48], стр.44.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему учителю профессору А.А. Карацуба и доктору физико-математических наук Г.И. Архипову, влияние которых на мои занятия математикой трудно переоценить.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виноградов И. М. Избранные труды – М.: изд-во АН СССР, 1952.

[2] И. М. Виноградов. Метод тригонометрических сумм в теории чисел – Труды МИАН СССР, т.XXIII, стр. 1 – 109.

[3] И. М. Виноградов Особые варианты метода тригонометрических сумм -М.: Наука, 1976.

[4] И. М. Виноградов Метод тригонометрических сумм в теории чисел – М.: Наука, 1980.

[5] И. М. Виноградов Новое решении проблемы Варинга // ДАН СССР. 1934. т.2, №6, стр. 337-341.

[6] И. М. Виноградов О некоторых новых проблемах теории чисел // ДАН СССР, 1934, т.3, №1, стр. 1 – 6.

[7] И. М. Виноградов Некоторые теоремы аналитической теории чисел // ДАН СССР, 1934, т.4, №4, стр. 185 – 187.

[8] И. М. Виноградов О приближениях посредством рациональных дробей, имеющих знаменателем точную степень // ДАН СССР, 1935, т.2, №1, стр. 1 – 5.

[9] И. М. Виноградов О некоторых рациональных приближениях // ДАН СССР, 1935, т.3,№1, стр. 3 – 6.

[10] И. М. Виноградов Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР, 1937,т.15, №6, стр. 201 – 204.

[11] И. М. Виноградов Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел // Тр.Тбил.мат.ин-та, 1938, т.3, стр. 1 – 67.

[12] И. М. Виноградов Некоторые проблемы аналитической теории чисел // Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда, Москва, 1958, т.3, стр. 3 – 13.

[13] А. А. Карацуба Проблема Варинга для сравнений по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, сер. I (1962),стр. 28-38.

[14] А. А. Карацуба Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР, сер.матем., 1964, т.28, стр. 237-248.

[15] А. А. Карацуба О системах сравнений // Изв. АН СССР, сер.матем., 1965, т.29, №4 стр. 935-944.

[16] А. А. Карацуба Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, т.30, №1, стр. 183-206.

[17] А. А. Карацуба Среднее значение модуля тригонометрической суммы // Изв. АН СССР, сер.матем., 1973, т.36, стр. №6, 1203-1227.

[18] А. А. Карацуба Об одной системе сравнений // Матем.заметки, 1978, т.19, №3, стр. 389-392.

[19] А. А. Карацуба Системы сравнений и уравнения варинговского типа // ДАН СССР, 1965, т.165, №2, стр. 274-276.

[20] А. А. Карацуба О тригонометрических суммах // ДАН СССР, 1969, т.189, №1, стр. 31-34.

[21] А. А. Карацуба Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // ДАН СССР, 1978, т.192, №4, стр. 724-727.

[22] А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел – М.:Наука, 1983.

[23] Landau E. Vorlesungen uber Zahlentheorie – 1927, Bd.2, Leipzig.

[24] Линник Ю. В. О возможности единого метода в некоторых вопросах “аддитивной” и “дистрибутивной” теории простых чисел // ДАН СССР, 1945, т.49, №1, стр. 3-7.

[25] Линник Ю. В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха - Виноградова // Мат.сб., 1946, т.19, вып.1, стр. 3-8.

[26] Линник Ю. В. Оценки сумм Вейля по методу И.М.Виноградова // Изв.АН СССР, сер. матем., 1942, 6(1), стр. 41-70.

[27] Линник Ю. В. О суммах Вейля // Мат.сб., 1943, 12(54), №1, стр. 28-39.

[28] Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел – М.: Наука, 1962.

[29] Марджанишвили К. К. Об одновременном представлении двух чисел суммами m-ых и n – их степеней // ДАН СССР, 1936, т.2, №6, стр.257-258.

[30] Марджанишвили К. К. Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ...,n – х степеней // Изв.АН СССР, сер. матем., 1937, т.1, стр.609-601.

[31] Марджанишвили К. К. Об одной системе диофантовых уравнений // ДАН СССР, 1939, т.22, №11, стр.471-474.

[32] Марджанишвили К. К. Об одной задаче аддитивной теории чисел // Изв.АН СССР, сер. матем., 1940, №4, стр.193-214.

[33] Марджанишвили К. К. Исследования по применению метода тригонометрических сумм к аддитивным задачам, Докторская диссертация. -М.1949.

[34] Марджанишвили К. К. Об некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах // Матем. сб.,1953, 33(75), №3, стр.638-675.

[35] Марджанишвили К. К. Об одном особам ряде // Тр. МИАН, 1976, 142, стр.174-182.

[36] Hilbert D. Beweis für die Darstellbarkeit aer ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl. n-ter Potenzen // Math. Ann 1909, Bd. 67 , s. 281 – 300.

[37] Kamke E. Verallgemeinerungen des Waring – Hilbertschen Satzen. // Math. Ann. 1921, Bd.83, s.8 –38.

[38] Hardy G.H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc. (2), 17(1918), 75–115.

[39] Hardy G.H., Littlewood J.E. A new solution of Waring's problem // Gätt. Nachr.1920, 33 – 54.

[40] И. М. Виноградов Sur un theoreme general de Waring // Мат. сб., 1924, т.31, стр. 490 – 507. 1928, №4, стр. 393-400.

[41] И. М. Виноградов О теоремие Варинга // Изв.АН СССР, ОФМН, 1928, №4, стр. 393-400.

[42] И. М. Виноградов Об одном классе совокупных диофантовых уравнений // Изв.АН СССР, ОФМН, 1929, №4, стр. 355-376.

[43] Hardy G.H., Littlewood J.E. The number $\Gamma(k)$ in Waring's problem // Proc. London math. Soc., 28 (1928), p.518 – 542.

[44] Хуа Ло-кен Аддитивная теория простых чисел // Тр.МИАН,1947, т.22, стр. 1-179.

[45] Хуа Ло-кен Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел – М.: Мир, 1964.

[46] Hua Loo – keng On the number of silutions of Tarry;s problem // Acta sci. Sinica, 1952, v.1, №1, p.1-75.

[47] Г. И. Архипов О значении особого ряда в проблеме Гильберта -Камке // ДАН СССР, 1981, т.259, №2, стр. 265-267.

[48] Г. И. Архипов О проблеме Гильберта-Камке // Изв. АН СССР, сер. матем.,1984, т.48, №1, стр. 3-52.

[49] Г. И. Архипов Исследование по проблеме Гильберта-Камке / Докторская диссертация. -М.: 1984.

[50] Г. И. Архипов Кратные тригонометрические суммы // ДАН СССР, т.219, №5, 1974, стр.1036-1037.

[51] Г. И. Архипов Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы // Матем. заметки, т.17, вып. I, 1975, стр.143-153.

[52] Г. И. Архипов Оценки двойных тригонометрических сумм Г.Вейля // Тр.МИЛН, 1976, т. 142, стр. 46-66.

[53] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков О кратных тригонометрических суммах // Докл. АН СССР, 1975, т.222, №5, 1017-1019.

[54] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков Кратные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, 1976, т.40, вып. I, 209-220.

[55] Г. И. Архипов, А. А. Карауцба, В. Н. Чубариков Верхняя граница модуля кратной тригонометрической суммы // Тр.МИАН, 1977, т.143, с.3-31.

[56] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Точная оценка числа решений одной системы диаофантовых уравнений // Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, №6, с.1187-1226.

[57] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных // Матем. зам., 1979, т.25, №1, с.3-14.

[58] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы // Тр.МИАН, 1980, т. 151, с.1-128.

[59] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Об одной системе диофантовых уравнений // ДАН СССР, 1980, т.252, №2, с.275-276.

[60] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Равномернее оценки кратных тригонометрических сумм // ДАН СССР, 1980 т.252, №6, с.1289-1291.

[61] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы и их приложения // Изв. АН СССР, сер. мататем., 1980, т.44, №4, с.723-881.

[62] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Новые равномерные оценки кратных тригонометрических сумм // ДАН СССР, т.272, №6 I, с.11-12.

[63] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Особые случаи теории кратных тригонометрических сумм // Изв.АН СССР, 1983, т.47, №4, с.707-784.

[64] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри // ДАН СССР, 1979, т.248, №2, с.268-272.

[65] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Изв.АН СССР, сер.матем., 1979, т.43, №5, с.971-1003.

[66] Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений // ДАН СССР, 1985, т.284, №1, с.16-21.

[67] Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле // ДАН СССР, 1976, т.227, №6, с.1308-1310.

[68] Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах // Матем.зам., 1976, т.20, №1, с.61-68.

[69] Чубариков В. Н. Асимптотическая формула среднего значения кратной тригонометрической суммы // Матем.зам., 1978, т.23, №6, с.799-816.

[70] Чубариков В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И. М. Виноградова и его обобщений // Тр.МИАН, 1981, т.157, с.214-232.

[71] Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // ДАН СССР, 1984, т.278, №2, с.302-304.

[72] Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв.АН СССР, 1985, т.49, №

[73] Чубариков В. Н. Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел // ДАН СССР, 1985, т.256, №4, с.525-591.

[74] Arkhipov G. I., Karacuba A. A., and Chubarikov V. N. Multiple trigonometric sums // Proc. of Steklov Institute of mathematics., 1982, issue 2, p.1-126, Amer. Math Soc.

[75] Чубариков В. Н. Многомерная аддитивная задача с простыми числам // ДАН СССР, 1986 №4, с.805 - 808.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Поступило 8.12.2011