ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 5, с. 612–618

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

© 2003 г. А. С. Макин

Посвящается моему Учителю академику
Владимиру Александровичу Ильину
в связи с его 75-летием

Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения

$$u'' - q(u,\lambda,x)u + \lambda u = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Все фигурирующие в работе величины предполагаются вещественными. Функция $q(u,\lambda,x)$ определена на множестве $\Omega = \{-\infty < u < \infty,\ -\infty < \lambda < \infty,\ 0 \le x \le 1\}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $q(u,\lambda,x)$ непрерывна на множестве Ω;

2) существуют такие постоянные M_0 и M, что $|q(u,\lambda,x)| \le M$ на множестве $\Omega_0 = \{|u| \le M_0,\ -\infty < \lambda < \infty,\ 0 \le x \le 1\}$;

3) для каждого фиксированного λ существует постоянная $B(\lambda)$ такая, что $|q(u_2,\lambda,x) - q(u_1,\lambda,x)| \le B(\lambda)|u_2 - u_1|$ для любых u_1, u_2, x, таких, что $|u_1| \le M_0$, $|u_2| \le M_0$, $0 \le x \le 1$;

4) для любого λ, $-\infty < \lambda < \infty$, и любого x, $0 \le x \le 1$, $\partial q(0,\lambda,x)/\partial\lambda = 0$.

Тогда существует система $\{u_n(x)\}$ $(n = 0,1,\ldots)$ собственных функций задачи (1), (2), образующая базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство. Обозначим $\lambda_0 = M + 1$, $\tilde q(u,\lambda,x) = q(u,\lambda-\lambda_0,x) + \lambda_0$. Очевидно, что функция $\tilde q(u,\lambda,x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы, лишь вместо неравенства из условия 2) выполняется неравенство $1 \le \tilde q(u,\lambda,x) \le M_1$, где $M_1 = 2M + 1$. Заметим, что из очевидного равенства $\tilde u_n'' - \tilde q(\tilde u_n,\tilde\lambda_n,x)\tilde u_n + \tilde\lambda_n\tilde u_n = \tilde u_n'' - q(\tilde u_n,\tilde\lambda_n - \lambda_0,x)\tilde u_n + (\tilde\lambda_n - \lambda_0)\tilde u_n$ вытекает, что собственная функция $\tilde u_n(x)$ задачи

$$\tilde u'' - \tilde q(\tilde u,\tilde\lambda,x)\tilde u + \tilde\lambda\tilde u = 0, \quad \tilde u(0) = \tilde u(1) = 0,$$

отвечающая собственному значению $\tilde\lambda_n$, является собственной функцией задачи (1), (2), отвечающей собственному значению $\lambda_n = \tilde\lambda_n - \lambda_0$. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что функция $q(u,\lambda,x)$ удовлетворяет неравенству

$$1 \le q(u,\lambda,x) \le M_1 \tag{3}$$

на множестве Ω_0.

Пусть $u(x)$ – собственная функция задачи (1), (2), соответствующая собственному значению $\lambda = \mu^2$ $(\mu \ge 0)$ и удовлетворяющая условию

$$|u(x)| \le M_0. \tag{4}$$

Докажем, что $\lambda > 1$. Умножая уравнение (1) на $u(x)$ и интегрируя его на отрезке $[0,1]$, получаем, учитывая краевые условия (2), что

$$\lambda\int_0^1 u^2(x)\,dx = \int_0^1 q(u(x),\lambda,x)u^2(x)\,dx + \int_0^1 (u'(x))^2\,dx,$$

откуда следует, что

$$\lambda > \int_0^1 q(u(x),\lambda,x)u^2(x)\,dx \left(\int_0^1 u^2(x)\,dx\right)^{-1} \geq 1.$$

Лемма 1. *Для любого $\lambda > 1$ и любого b, такого, что $|b| \leq b_0$, где b_0 – некоторое число, зависящее лишь от постоянных M_0 и M_1, на отрезке $[0,1]$ существует единственное решение начально-краевой задачи*

$$u'' - q(u,\lambda,x)u + \lambda u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = b\mu, \tag{5}$$

удовлетворяющее условию (4).

Рассмотрим два случая: $\mu > 2M_1$ и $1 < \mu \leq 2M_1$. В первом случае построим решение задачи (5) методом последовательных приближений. Пусть $u_0(x) = b\sin\mu x$, где $|b| \leq M_0/2$,

$$u_{i+1}(x) = u_0(x) + \frac{1}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-t)u_i(t)q(u_i(t),\lambda,t)\,dt \tag{6}$$

$(i = 0,1,\ldots)$. Докажем по индукции, что $|u_n(x)| \leq M_0$ для любого n. Очевидно, $|u_0(x)| \leq \leq M_0/2$. Если $|u_i(x)| \leq M_0$, то, используя неравенство (3) для оценки второго слагаемого в правой части выражения (6), находим, что $|u_{i+1}(x)| \leq M_0$.

Пусть $x_2 > x_1$. Из формул (3) и (6) вытекает, что при всех n

$$|u_{n+1}(x_2) - u_{n+1}(x_1)| \leq |u_0(x_2) - u_0(x_1)| + \frac{1}{\mu}\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin\mu(x_2-t)u_n(t)q(u_n(t),\lambda,t)\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left|\int_0^{x_1} (\sin\mu(x_2-t) - \sin\mu(x_1-t))u_n(t)q(u_n(t),\lambda,t)\,dt\right| \leq L_1(\mu)(x_2-x_1).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0,1]$, стало быть, по теореме Арцела она имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $u(x)$. Легко видеть, что $u(x)$ удовлетворяет условию (4) и уравнению

$$u(x) = b\sin\mu x + \frac{1}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-t)u(t)q(u(t),\lambda,t)\,dt.$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем, что $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и, кроме того, $u'(0) = b\mu$. Единственность вытекает из условия 3 теоремы [1, с. 30–31].

Пусть теперь $1 < \mu \leq 2M_1$. Рассмотрим линеаризованное уравнение

$$u'' - q(0,\lambda,x)u + \lambda u = 0. \tag{7}$$

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (7), причем $\varphi(0,\lambda) = 0$, $\varphi'_x(0,\lambda) = \mu$, $\psi(0,\lambda) = 1$, $\psi'_x(0,\lambda) = 0$. Известно (см., например, [2, с. 184, 192]), что функции $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ непрерывны со своими частными производными по совокупности переменных и, следовательно, при $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \leq \hat\lambda$, где $\hat\lambda$ – произвольное число $(\hat\lambda \geq 1)$, имеют место оценки

$$\begin{gathered} |\varphi(x,\lambda)| \leq C_1(\hat\lambda), \quad |\psi(x,\lambda)| \leq C_1(\hat\lambda), \quad |\varphi'_x(x,\lambda)| \leq C_1(\hat\lambda), \\ |\psi'_x(x,\lambda)| \leq C_1(\hat\lambda), \quad |\varphi(x,\lambda_2) - \varphi(x,\lambda_1)| \leq C_1(\hat\lambda)|\lambda_2 - \lambda_1|. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $W(x,\lambda)$ – определитель Вронского функций $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$, а $K(x,t,\lambda) = (\psi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\psi(t,\lambda))/W(t,\lambda)$. Непосредственно проверяется, что $W(0,\lambda) = -\mu$. Отсюда и из формулы Лиувилля находим, что $W(x,\lambda) = -\mu$ при любом x. Из последнего равенства и оценок (8) следует, что

$$|K(x,t,\lambda)| \le C_2(\hat\lambda)/\mu, \tag{9}$$

где $C_2(\hat\lambda) = 2C_1^2(\hat\lambda)$. Из условия 1) теоремы вытекает существование такой постоянной $\tilde M_0 > 0$, что

$$|q(u,\lambda,x) - q(0,\lambda,x)| \le 1/(2C_2(4M_1^2)), \tag{10}$$

если $|u| < \tilde M_0$, $1 \le \mu \le 2M_1$, $0 \le x \le 1$. Обозначим $\hat M_0 = \min(M_0, \tilde M_0)$. Для построения решения задачи (5) вновь воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть $u_0(x) = b\varphi(x,\lambda)$, где $|b| \le \hat M_0/(2C_1(4M_1^2))$,

$$u_{i+1}(x) = b\varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t,\lambda)u_i(t)(q(u_i(t),\lambda,t) - q(0,\lambda,t))\,dt \tag{11}$$

$(i = 0,1,\ldots)$. Как и выше, по индукции докажем, что $|u_n(x)| \le \hat M_0$ для любого n. Очевидно, $|u_0(x)| \le \hat M_0/2$. Если $|u_i(x)| \le \hat M_0$, то, оценивая правую часть равенства (11), согласно (9), (10), находим, что $|u_{i+1}(x)| \le \hat M_0$.

Пусть $x_2 > x_1$. Из (8)–(11) следует, что при всех n

$$|u_{n+1}(x_2) - u_{n+1}(x_1)| \le |b(\varphi(x_2,\lambda) - \varphi(x_1,\lambda))| + \left|\int_{x_1}^{x_2} K(x_2,t,\lambda)u_n(t)(q(u_n(t),\lambda,t) - q(0,\lambda,t))\,dt\right| +$$

$$+ \left|\int_0^{x_1} (K(x_2,t,\lambda) - K(x_1,t,\lambda))u_n(t)(q(u_n(t),\lambda,t) - q(0,\lambda,t))\,dt\right| \le L_2(x_2 - x_1).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0,1]$, стало быть, она имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $u(x)$, удовлетворяющей условию (4) и являющейся решением уравнения

$$u(x) = b\varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t,\lambda)u(t)(q(u(t),\lambda,t) - q(0,\lambda,t))\,dt.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и, кроме того, $u'(0) = b\mu$. Единственность вытекает из условия 3 теоремы [1, с. 30–31].

Докажем существование и установим оценки для собственных значений задачи (1), (2). Вначале рассмотрим две линейные краевые задачи

$$u'' + Q_i(\lambda,x,d)u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad i \in \{1,2\}, \tag{12_i}$$

где $Q_1(\lambda,x,d) = -q(0,\lambda,x) - d + \lambda$, $Q_2(\lambda,x,d) = -q(0,\lambda,x) + d + \lambda$, d – произвольное положительное число. Пусть функция $\theta_i(\lambda,x,d)$ является решением уравнения $\theta_i' = \cos^2\theta_i + Q_i(\lambda,x,d)\sin^2\theta_i$, причем $\theta_i(\lambda,0,d) = 0$ $(i = 1,2)$. Согласно осцилляционной теореме [3, с. 251], задача (12_1) имеет собственные значения $\lambda_0^{(1)}(d) < \lambda_1^{(1)}(d) < \ldots$, а задача (12_2) – собственные значения $\lambda_0^{(2)}(d) < \lambda_1^{(2)}(d) < \ldots$ Ясно, что $\lambda_n^{(1)}(d) = \lambda_n^{(2)}(d) + 2d$. Из [3, с. 251] также следует, что

$$\theta_i(\lambda_n^{(i)}(d),1,d) = \pi(n+1), \quad n = 0,1,\ldots \tag{13}$$

Пусть $u(x,\lambda)$ – решение задачи (5) при произвольном b, $0 < |b| \le b_0$, удовлетворяющее условию (4). Существование и единственность такого решения гарантируется леммой 1. Заметим, что

$$Q_1(\lambda, x, 2M) \le -q(u(x,\lambda),\lambda,x) + \lambda \le Q_2(\lambda, x, 2M). \tag{14}$$

Применяя для исследования свойств функции $u(x,\lambda)$ преобразование Прюфера [3, с. 248] $u(x,\lambda) = r(x)\sin\theta(\lambda,x)$, $u'(x,\lambda) = r(x)\cos\theta(\lambda,x)$ и повторяя рассуждения [3, с. 248–250], где теорема сравнения установлена лишь для линейного оператора Штурма–Лиувилля, но доказательство которой остается аналогичным и в нелинейном случае, находим, что функция $\theta(\lambda,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'(\lambda,x) = \cos^2\theta(\lambda,x) + (\lambda - q(u,\lambda,x))\sin^2\theta(\lambda,x),$$

откуда следует, что

$$\theta(\lambda,x) = \int\limits_0^x \frac{[u'(t,\lambda)]^2 + u^2(t,\lambda)(\lambda - q(u,\lambda,t))}{[u'(t,\lambda)]^2 + u^2(t,\lambda)}\,dt. \tag{15}$$

Из указанной выше теоремы сравнения и (14) вытекает, что $\theta_1(\lambda,x,2M) \le \theta(\lambda,x) \le \theta_2(\lambda,x,2M)$. Из последнего неравенства и соотношения (13) следует, что для любого $n = 0,1,\ldots$

$$\theta(\lambda_n^{(1)}(2M),1) \ge \theta_1(\lambda_n^{(1)}(2M),1,2M) = \pi(n+1),$$

$$\theta(\lambda_n^{(2)}(2M),1) \le \theta_2(\lambda_n^{(2)}(2M),1,2M) = \pi(n+1),$$

откуда получаем, что

$$\theta(\lambda_n^{(2)}(2M),1) \le \pi(n+1) \le \theta(\lambda_n^{(1)}(2M),1). \tag{16}$$

В силу единственности решения задачи (5) функции $u(x,\lambda)$ и $u'(x,\lambda)$ непрерывны по λ равномерно на отрезке $[0,1]$ [1, с. 72]. Отсюда и из выражения (15) вытекает непрерывность по λ функции $\theta(\lambda,1)$, что в сочетании с неравенством (16) позволяет утверждать, что для любого $n = 0,1,\ldots$ существует такое число $\lambda_n(b)$, удовлетворяющее неравенству

$$\lambda_n^{(2)}(2M) \le \lambda_n(b) \le \lambda_n^{(1)}(2M), \tag{17}$$

что $\theta(\lambda_n(b),1) = \pi(n+1)$ и, стало быть, $u(1,\lambda_n(b)) = 0$, т.е. $u(x,\lambda_n(b))$ – собственная функция задачи (1), (2), отвечающая собственному значению $\lambda_n(b)$.

Пусть $\overset{0}{u}_n(x)$ – полная ортонормированная в $L_2(0,1)$ система собственных функций линейной самосопряженной задачи (7), (2), $\lambda_n^{(0)}$ – соответствующие собственные значения, $\mu_n^{(0)} = \sqrt{\lambda_n^{(0)}}$, $n = 0,1,\ldots$ Рассуждая так же, как и при выводе оценки снизу собственных значений задачи (1), (2), находим, что $\lambda_n^{(0)} > 1$. Из [4] следует, что $\overset{0}{u}{}'_n(0) = \alpha_n\mu_n^{(0)}$, где $0 < c_0 < |\alpha_n| < C_0$. Согласно [3, с. 254], при любом $d > 0$

$$\lambda_n^{(2)}(d) \le \lambda_n^{(0)} \le \lambda_n^{(1)}(d). \tag{18}$$

Лемма 2. *Существуют $p \ne 0$ и система собственных функций задачи (1), (2) $\{u_n(x,\lambda_n,p)\}$ $(n = 0,1,\ldots)$, удовлетворяющих начальному условию $u'_n(0,\lambda_n,p) = p\alpha_n\mu_n$, где $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, такая, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n(x,\lambda_n,p)/p - \overset{0}{u}_n(x)\|^2_{L_2(0,1)} < 1.$$

Пусть p – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < |p| < \min(b_0/(C_0+1), M_0/(2C_0+1)), \tag{19}$$

$p_n = \alpha_n p$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Для каждого n $\lambda_n(p_n)$ – собственное значение задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенству (17), а $u_n(x, \lambda_n(p_n))$ – соответствующая собственная функция, удовлетворяющая начальному условию $u_n'(0, \lambda_n(p_n)) = p_n \mu_n(p_n)$, где $\mu_n(p_n) = \sqrt{\lambda_n(p_n)}$. Из формул (17), (18) вытекает, что $|\lambda_n(p_n) - \lambda_n^{(0)}| \le 4M$. Из последнего неравенства и асимптотической формулы $\mu_n^{(0)} = n + O(n^{-1})$ [5, с. 49] следует, что при всех $N > N_0$, где N_0 – некоторое достаточно большое число,

$$|\mu_n(p_n) - \mu_n^{(0)}| \le 4M/(\mu_n(p_n) + \mu_n^{(0)}) \le 5M/n. \tag{20}$$

Отсюда находим, что при всех $n > N_1$ $(N_1 > N_0)$, где N_1 – некоторое достаточно большое число, справедливы неравенства

$$\mu_n^{(0)} > n/2, \quad \mu_n(p_n) > 2M_1, \quad \mu_n(p_n) > n/2. \tag{21}$$

Пусть $n > N_1$. Обозначим $u_{n,0}(x) = p_n \sin \mu_n(p_n) x$,

$$u_{n,i+1}(x) = u_{n,0}(x) + \frac{1}{\mu_n(p_n)} \int\limits_0^x \sin \mu_n(p_n)(x - t) u_{n,i}(t) q(u_{n,i}(t), \lambda_n(p_n), t)\, dt \tag{22}$$

$(i = 0, 1, \ldots)$. Докажем по индукции, что для любого i $|u_{n,i}(x)| \le M_0$ и $|u_{n,i}(x)| \le 2C_0|p|$. Очевидно, $|u_{n,0}(x)| \le M_0/2$, $|u_{n,0}(x)| \le C_0|p|$. Если $|u_{n,i}(x)| \le M_0$, то, оценивая правую часть выражения (22), согласно (19), (21), получаем, что $|u_{n,i+1}(x)| \le M_0$. Если $|u_{n,i}(x)| \le$ $\le 2C_0|p|$, то, вновь оценивая правую часть выражения (22), согласно (19), (21), находим, что $|u_{n,i+1}(x)| \le 2C_0|p|$. Рассуждая аналогично лемме 1, заключаем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_{n,i}(x)\}$, сходящаяся к функции $\tilde{u}_n(x)$, удовлетворяющей условию (4) и являющейся решением уравнения

$$\tilde{u}_n(x) = p_n \sin \mu_n(p_n) x + \frac{1}{\mu_n(p_n)} \int\limits_0^x \sin \mu_n(p_n)(x - t) \tilde{u}_n(t) q(\tilde{u}_n(t), \lambda_n(p_n), t)\, dt \tag{23}$$

и соответственно задачи (5) при $b = p_n$, $\mu = \mu_n(p_n)$, причем

$$|\tilde{u}_n(x)| \le 2C_0|p|. \tag{24}$$

Тогда из единственности решения задачи (5) вытекает, что $\tilde{u}_n(x) = u_n(x, \lambda_n(p_n))$ при $0 \le x \le 1$, следовательно, $\tilde{u}_n(1) = 0$.

Хорошо известно, что функция $\overset{0}{u}_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\overset{0}{u}_n(x) = \alpha_n \sin \mu_n^{(0)} x + \frac{1}{\mu_n^{(0)}} \int\limits_0^x \sin \mu_n^{(0)}(x - t) \overset{0}{u}_n(t) q(0, \lambda_n^{(0)}, t)\, dt. \tag{25}$$

Из выражений (20), (23)–(25) следует, что

$$|\tilde{u}_n(x)/p - \overset{0}{u}_n(x)| \le |\alpha_n| |\sin \mu_n(p_n) x - \sin \mu_n^{(0)} x| +$$

$$+ \frac{1}{p\mu_n(p_n)} \left| \int\limits_0^x \sin \mu_0^{(0)}(x - t) \tilde{u}_n(t) q(\tilde{u}_n(t), \lambda_n(p_n), t)\, dt \right| +$$

$$+ \frac{1}{\mu_n^{(0)}} \left| \int\limits_0^x \sin \mu_n^{(0)}(x - t) \overset{0}{u}_n(t) q(0, \lambda_n^{(0)}, t)\, dt \right| \le \tilde{C}/n.$$

Легко видеть, что существует такое N_2 $(N_2 > N_1)$, что $\tilde{C}^2 \sum_{n=N_2}^{\infty} n^{-2} < 1/2$. Из двух последних неравенств находим, что для любого p, удовлетворяющего неравенству (19), справедлива оценка

$$\sum_{n=N_2}^{\infty} \left| \frac{u_n(x, \lambda_n(p_n))}{p} - \overset{0}{u}_n(x) \right|^2 < \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Пусть $0 \le n < N_2$. Тогда в силу неравенства (17) будем иметь, что

$$\lambda_n(p_n) \le \lambda_n^{(1)}(2M) \le \lambda_{N_2}^{(1)}(2M). \tag{27}$$

Из оценок (8), (9) и неравенства (27) вытекает, что

$$\begin{gathered} |\varphi(x, \lambda_n(p_n))| \le C_1', \quad |\psi(x, \lambda_n(p_n))| \le C_1', \\ |\varphi(x, \lambda_2) - \varphi(x, \lambda_1)| \le C_1'|\lambda_2 - \lambda_1|, \quad |K(x, t, \lambda_n(p_n))| \le C_2'/\mu_n(p_n), \end{gathered} \tag{28}$$

где $C_2' = 2(C_1')^2$. Пусть $u_{n,0}(x) = p_n \varphi(x, \lambda_n(p_n))$,

$$u_{n,i+1}(x) = u_{n,0}(x) + \int_0^x K(x, t, \lambda_n(p_n)) u_{n,i}(t)(q(u_i(t), \lambda_n(p_n), t) - q(0, \lambda_n(p_n), t))\, dt. \tag{29}$$

Докажем, что при всех достаточно малых по абсолютной величине p для любого i справедливо неравенство

$$|u_{n,i}(x)| \le \min(M_0, 2C_0C_1'|p|). \tag{30}$$

Обозначим $\varepsilon = 1/(2(C_0C_1' + 1)(\lambda_{N_2}^{(1)}(2M) + C_2')\sqrt{2N_2})$. Из условия 1) теоремы вытекает существование такой постоянной δ, $0 < \delta < 1/M_0$, что если $|u| < \delta$, $1 \le \lambda \le \lambda_{N_2}^{(1)}(2M)$, $0 \le t \le 1$, то

$$|q(u, \lambda, t) - q(0, \lambda, t)| < \varepsilon. \tag{31}$$

Из неравенства (27) следует, что неравенство (31) выполняется при любом $\lambda = \lambda_n(p_n)$. Дополнительно предположим, что

$$|p| < \delta/(2C_0C_1'). \tag{32}$$

Очевидно, $|u_{n,0}(x)| \le M_0/2$ и $|u_{n,0}(x)| \le C_0C_1' < \delta/2$. Если неравенство (30) верно при некотором $i \ge 0$, то в силу (32) $|u_{n,i}(x)| < \delta$, следовательно, оценивая правую часть выражения (29), согласно (28), (31), находим, что $|u_{n,i+1}(x)| \le M_0$ и $|u_{n,i+1}(x)| \le 2C_0C_1'|p|$. Рассуждая далее аналогично лемме 1, получаем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_{n,i}\}$, сходящаяся к функции $\tilde{u}_n(x)$, удовлетворяющей условию (4) и являющейся решением уравнения

$$\tilde{u}_n(x) = p_n \varphi(x, \lambda_n(p_n)) + \int_0^x K(x, t, \lambda_n(p_n)) \tilde{u}_n(t)(q(\tilde{u}_n(t), \lambda_n(p_n), t) - q(0, \lambda_n(p_n), t))\, dt \tag{33}$$

и соответственно задачи (5) при $b = p_n$, $\mu = \mu_n(p_n)$, причем справедливо неравенство

$$|\tilde{u}_n(x)| \le 2C_0C_1'|p| < \delta. \tag{34}$$

Тогда из единственности решения задачи (5) вытекает, что $\tilde{u}_n(x) = u_n(x, \lambda_n(p_n))$ при $0 \le x \le 1$, следовательно, $\tilde{u}_n(1) = 0$.

Из неравенства (31) находим, что $Q_1(\lambda, x, \varepsilon) \le -q(u, \lambda, x) + \lambda \le Q_2(\lambda, x, \varepsilon)$ для любого $\lambda \le \lambda_{N_2}^{(1)}(2M)$, откуда по теореме сравнения [3, с. 249] следует, что $\theta_1(\lambda, x, \varepsilon) \le \theta(\lambda, x) \le \theta_2(\lambda, x, \varepsilon)$ для любого $\lambda \le \lambda_{N_2}^{(1)}(2M)$ и, стало быть, $\theta_1(\lambda_n(p_n), 1, \varepsilon) \le \theta(\lambda_n(p_n), 1) \le$

$\leq \theta_2(\lambda_n(p_n), 1, \varepsilon)$. С другой стороны, $\theta_1(\lambda_n^{(1)}(\varepsilon), 1, \varepsilon) = \theta(\lambda_n(p_n), 1) = \theta_2(\lambda_n^{(2)}(\varepsilon), 1, \varepsilon) = \pi(n+1)$. Из двух последних соотношений вытекает, что

$$\theta_1(\lambda_n(p_n), 1, \varepsilon) \leq \theta_1(\lambda_n^{(1)}(\varepsilon), 1, \varepsilon), \quad \theta_2(\lambda_n^{(2)}(\varepsilon), 1, \varepsilon) \leq \theta_2(\lambda_n(p_n), 1, \varepsilon),$$

откуда в силу монотонности функций $\theta_i(\lambda, 1, \varepsilon)$ [3, с. 251] следует, что $\lambda_n^{(2)}(\varepsilon) \leq \lambda_n(p_n) \leq$ $\leq \lambda_n^{(1)}(\varepsilon)$. Отсюда и из неравенства (18) получаем, что $|\lambda_n(p_n) - \lambda_n^{(0)}| \leq 2\varepsilon$. Из последнего неравенства, (28), (31), (33), (34) и очевидного равенства $\overset{0}{u}_n(x) = \alpha_n \varphi(x, \lambda_n^{(0)})$ находим, что

$$|\tilde{u}_n(x)/p - \overset{0}{u}_n(x)| \leq |\alpha_n||\varphi(x, \lambda_n(p_n)) - \varphi(x, \lambda_n^{(0)})| +$$

$$+ |p|^{-1} \left| \int\limits_0^x K(x, t, \lambda_n(p_n)) \tilde{u}_n(t) (q(\tilde{u}_n(t), \lambda_n(p_n), t) - q(0, \lambda_n(p_n), t))\, dt \right| < (2N_2)^{-1/2}. \tag{35}$$

Из оценок (26) и (35) вытекает, что при любом p, удовлетворяющем условиям (19) и (32),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{u_n(x, \lambda_n(p_n))}{p} - \overset{0}{u}_n(x) \right\|^2 \leq \sum_{n=0}^{N_2-1} \left| \frac{u_n(x, \lambda_n(p_n))}{p} - \overset{0}{u}_n(x) \right|^2 + \sum_{n=N_2}^{\infty} \left| \frac{u_n(x, \lambda_n(p_n))}{p} - \overset{0}{u}_n(x) \right|^2 < 1.$$

Из последнего неравенства следует [6, с. 333; 7, с. 382], что системы функций $\{u_n(x, \lambda_n(p_n))/p\}$ и $\{u_n(x, \lambda_n(p_n))\}$ являются соответственно базисами Бари и Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Теорема доказана.

Заметим, что если функция $q(u, \lambda, x)$ не зависит от λ, то условия 2) и 4) теоремы выполняются автоматически.

Нелинейные задачи на собственные значения исследовались многими авторами. Обширная библиография приведена в монографии [8]. Из более поздних работ отметим [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
2. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1974.
3. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М., 1984.
4. *Тихомиров В.В.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 807–810.
5. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распределение собственных значений. М., 1979.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
7. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
8. *Махмудов А.П.* Нелинейные задачи на собственные значения и теория бифуркаций. Баку, 1996.
9. *Жидков П.Е.* // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 43–52.

Московская государственная академия
приборостроения и информатики

Поступила в редакцию
18.11.2002 г.