А. И. Вагабов, Условия регулярности пучка обыкновенных дифференциальных операторов общего вида,
Дифференц. уравнения, 2004, том 40, номер 3, 299–309

https://www.mathnet.ru/de11035

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 299–309

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928

УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ ПУЧКА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОБЩЕГО ВИДА

© 2004 г. А. И. Вагабов

Теория обыкновенного регулярного линейного дифференциального оператора n-го порядка на конечном отрезке была разработана в классических работах [1, 2]. Дальнейшее обобщение она получила в работах [3–7] и многих других. Для широких классов дифференциальных операторов, в том числе в частных производных, оригинальные и завершенные исследования даны в работах В.А. Ильина и его учеников [8–14]. Начиная с работ [15–28] изучались и другие классы дифференциальных операторов: нерегулярные дифференциальные операторы и пучок обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Однако в литературе отсутствует законченная теория регулярных пучков обыкновенных дифференциальных операторов общего вида (см. ниже формулы (10), (11)).

В частности:

1) не выяснены окончательные условия гладкости коэффициентов пучка;

2) понятие регулярности, удачно сформулированное Биркгофом для частного случая, не нашло ясного продолжения, оно приводилось в запутанной форме, связанной с массой параметров и недоступной с практической стороны;

3) строго говоря, нет ни одной работы, конкретно посвященной именно пучку (10), (11), являющемуся важным обобщением случая, рассмотренного Биркгофом.

Нами предложены новые асимптотические по параметру формулы решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при предельно слабых условиях гладкости коэффициентов уравнения. Сформулировано определение регулярности на языке простых алгебраических параметров пучка и приведены необходимые условия регулярности в терминах “индексов”.

§ 1. АСИМПТОТИКА ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ И ПОНЯТИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y' - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j+1} A_j(x) y = 0, \quad -\infty < a \le x \le b < \infty, \tag{1}$$

где A_j, y – $n\times n$-матрицы. Предполагается, что

1) $A_0'(x)$, $A_j(x)$, $j>0$, – комплекснозначные суммируемые на $[a,b]$ матрицы;

2) характеристические корни $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ матрицы $A(x)\equiv A_0(x)$ различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x.

Разобьем λ-плоскость на конечное число секторов S с центром в начале координат, для которых при определенной нумерации φ-корней справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_1(x) \le \operatorname{Re}\lambda\varphi_2(x) \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda\varphi_n(x). \tag{2}$$

Зафиксировав некоторый сектор S и соответствующую ему нумерацию φ-корней, определим матрицу $m(x)$: $m^{-1}(x)A(x)m(x) = D(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$. Матрица $M(x) = m(x)\eta(x)$, где $\eta(x)$ – произвольная диагональная невырожденная матрица, является произвольной матрицей, трансформирующей $A(x)$ в $D(x)$.

В дальнейшем мы используем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть модуль непрерывности непрерывной на* $[a,b]$ *функции* f *удовлетворяет условию* $\omega(\delta, f) = o(1/|\ln\delta|)$ *при* $\forall\delta > 0$ *(условие Дини–Липшица), тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_a^b f(x)e^{imx}\,dx = o\left(\frac{1}{\ln m}\right), \quad m \gg 1. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$J_m = \int\limits_a^b f(x)e^{imx}\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\exp\{im(x-\pi/m)\}\,dx.$$

Отсюда имеем

$$2J_m = \int\limits_a^b f(x)e^{imx}\,dx - \int\limits_a^b f(x)\exp\{im(x-\pi/m)\}\,dx =$$

$$= -\int\limits_a^{b-\pi/m} (f(y+\pi/m) - f(y))e^{imy}\,dy - \int\limits_a^{a+\pi/m} f(x)\exp\{im(x-\pi/m)\}\,dx + \int\limits_{b-\pi/m}^b f(x)e^{imx}\,dx =$$

$$= o(1/\ln m) + O(1/m) = o(1/\ln m).$$

Всюду ниже будем использовать обозначение

$$e_f(a,b) = \exp\left\{\int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi\right\}.$$

Теорема 1. *При условиях 1), 2) существует фундаментальная матрица решений системы (1), аналитическая в любом фиксированном секторе* S *при* $\lambda \gg 1$ *и допускающая в* S *асимптотическое представление*

$$y(x,\lambda) = \{M(x) + E(x,\lambda)\}e_D(a,x), \tag{4}$$

где $E(x,\lambda)$ *– величина порядка* $E(x,\lambda) \underset{|\lambda|\gg 1}{\sim} \int_c^x e_D(t,x)M^{-1}(t)(A_1(t)M(t) - M'(t))e_D(x,t)\,dt$, $M(x)$ *– матрица из условия 2), подобранная так, что диагональные элементы матрицы* $M^{-1}(t)(A_1(t)M(t) - M'(t))$ *равны нулю (*$c = b$ *при интегрировании элементов ниже главной диагонали,* $c = a$ *при интегрировании остальных элементов матрицы).*

Если вдобавок элементы матриц $A_0'(x)$, $A_1(x)$ *непрерывны и принадлежат модулю непрерывности, равному* $\omega(\delta) = o(1/|\ln\delta|)$, *то для элементов матрицы* $E(x,\lambda)$ *справедливы равномерные по* x *оценки*

$$|E_{ks}(x,\lambda)| = o(1/\ln|\lambda|), \quad |\lambda| \gg 1, \quad \lambda \in S. \tag{5}$$

Доказательство. Представление (4) установлено в [26]. Асимптотическая оценка для $E(x,\lambda)$ вытекает из вида итераций для решения $y(x,\lambda)$.

В случае, когда элементы матриц $A_0'(x)$, $A_1(x)$ имеют модуль непрерывности $\omega(\delta) = o(1/|\ln\delta|)$, то же самое можно сказать об элементах матрицы $M^{-1}(t)(A_1(t)M(t) - M'(t))$. Но тогда с учетом леммы 1 из выражения для порядка $E(x,\lambda)$ непосредственно получим оценку (5).

2. Рассмотрим случай одного дифференциального уравнения

$$\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\ k_0<n}} \lambda^{k_0} a^{(k_0,k_1)}(x)\frac{d^{k_1}v}{dx^{k_1}} - \lambda^n v = 0, \quad a \le x \le b. \tag{6}$$

Сводя его к системе вида (1) и опираясь на теорему 1, придем к следующей теореме [29, теорема 3].

Теорема 2. *Пусть* $da^{(k_0,k_1)}(x)/dx$ *при* $k_0+k_1=n$ *и* $a^{(k_0,k_1)}(x)$ *при* $k_0+k_1\le n$ *суммируемы на* $[a,b]$ *и пусть корни* $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ *уравнения*

$$a^{(0,n)}(x)\varphi^n + a^{(1,n-1)}(x)\varphi^{n-1} + \ldots + a^{(n-1,1)}(x)\varphi - 1 = 0 \tag{7}$$

различны при всех x, *отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от* x. *Тогда уравнение (6) в любом секторе* S, *определяемом неравенствами (2), обладает фундаментальной системой решений, допускающей при* $|\lambda| \gg 1$ *вместе с производными представление*

$$\frac{d^{k-1}v_s(x,\lambda)}{dx^{k-1}} = \lambda^{k-1} e_{\varphi_s}(a,x)\{\varphi_s^{k-1}(x)\eta_s(x) + E_{ks}(x,\lambda)\}, \quad k=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где

$$E_{ks}(x,\lambda) = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^{k-1}(x)\eta_l(x)\int_c^x \varepsilon_{ls}(t,\lambda)e_{\varphi_s-\varphi_l}(x,t)\,dt \tag{9}$$

($c=b$ *при* $l>s$, $c=a$ *при* $l\le s$*),* $\eta_l(x)\ne 0$ *при* $x\in[a,b]$, $\varepsilon_{ll}(t,\lambda)\to 0$ *при* $\lambda\to\infty$, *а* ε_{ls} *ограничены при* $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S$.

Если $da^{(k_0,k_1)}(x)/dx$ *при* $k_0+k_1=n$ *и* $a^{(k_0,k_1)}(x)$ *при* $k_0+k_1=n-1$ *непрерывны и принадлежат модулю* $\omega(\delta)=o(1/\ln\delta)$, *то справедливы равномерные по* x *оценки (5).*

3. Рассмотрим пучок обыкновенных линейных дифференциальных операторов

$$l(v) \equiv \sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\ k_0<n}} \lambda^{k_0} a^{(k_0,k_1)}(x)\frac{d^{k_1}v}{dx^{k_1}} - \lambda^n v, \quad a<x<b, \tag{10}$$

с комплексным параметром λ и граничными условиями вида

$$U(v) \equiv \sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\ k_1<n}} \lambda^{k_0}\left\{\alpha^{(k_0,k_1)}\frac{d^{k_1}v}{dx^{k_1}}\bigg|_{x=a} + \beta^{(k_0,k_1)}\frac{d^{k_1}v}{dx^{k_1}}\bigg|_{x=b}\right\} = 0. \tag{11}$$

Здесь $a^{(k_0,k_1)}$, v – комплекснозначные функции, $a^{(0,n)}(x)\ne 0$; $\alpha^{(k_0,k_1)}$, $\beta^{(k_0,k_1)}$ – n-мерные столбцы констант. Для обращения с условиями (11) удобно определить $n\times n$-матрицы

$$\alpha^{(k)} = (\alpha^{(k,0)},\alpha^{(k-1,1)},\ldots,\alpha^{(0,k)},\overbrace{0\ldots0}^{n-k-1}), \quad k=\overline{0,n-1}, \quad \alpha^{(n)} = (\alpha^{(n,0)},\alpha^{(n-1,1)},\ldots,\alpha^{(1,n-1)}),$$

$\beta^{(k)}$ имеют такой же смысл. Условия (11) можно считать пронормированными в следующем смысле. Первые n_1 $(0\le n_1\le n)$ строк матрицы $(\alpha^{(n)},\beta^{(n)})$ линейно независимы, остальные нулевые. Если $n_1=n$, то процесс нормировки окончен. Пусть $n_1<n$. У матрицы $(\alpha^{(n-1)},\beta^{(n-1)})$ строки от n_1 до n_2 (исключая n_1, но включая n_2; $n_1<n_2\le n$) линейно независимы, последующие – нулевые. Если $n_2<n$, продолжаем процедуру. У матрицы $(\alpha^{(n-2)},\beta^{(n-2)})$ строки от n_2 до n_3 $(n_2<n_3\le n)$ линейно независимые, последующие – нулевые и т.д.

Нормировка достигается путем перестановки местами граничных условий или их линейного комбинирования. С помощью матриц $(\alpha^{(k)},\beta^{(k)})$, $k=\overline{0,n-1}$, построим важную для нас матрицу (α,β). Первые n_1 строк матрицы $(\alpha^{(n)},\beta^{(n)})$ берем за первые n_1 строк матрицы (α,β). Строки от номера n_1 до n_2 для (α,β) берем из соответствующих строк матрицы $(\alpha^{(n-1)},\beta^{(n-1)})$. Строки от номера n_2 до n_3 набираем из матрицы $(\alpha^{(n-2)},\beta^{(n-2)})$ и т.д.

Определение 1. Построенная выше $n\times 2n$-матрица (α,β) называется определяющей матрицей граничных условий (11).

Сформулируем требования, предъявляемые нами к пучку (10), (11).

а) Функции $da^{(k_0,k_1)}(x)/dx$ при $k_0+k_1=n$ и $a^{(k_0,k_1)}(x)$ при $k_0+k_1=n-1$ непрерывны на $[a,b]$ и относятся к модулю непрерывности $\omega(\delta)=o(1/|\ln\delta|)$; $a^{(k_0,k_1)}(x)$ суммируемы на $[a,b]$ при $k_0+k_1<n-1$.

б) Корни $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ характеристического уравнения (7) различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x.

Для формулировки следующего условия определим некоторые конфигурации φ-корней и числа. Пусть c – любое фиксированное число из отрезка $[a,b]$, а d – векторная прямая в комплексной плоскости, не содержащей точек $\varphi_i(c)$, $i=\overline{1,n}$. В полуплоскостях, разделенных прямой d, содержатся соответственно два набора из чисел $\varphi_i(c)$. Вращая d вокруг нуля, переберем конечное число подобных ситуаций, а следовательно, конечное количество наборов чисел $\varphi_i(c)$ отмеченного типа. Условимся обозначать буквой τ мощности указанных наборов, τ – переменная величина, принимающая конечное число значений. Важно заметить, что в силу условия б) ни числа τ, ни φ-корни в наборах не зависят от выбора c, и условимся считать $c=a$.

в) Отличны от нуля определители

$$\Phi_\tau(\alpha,\beta)=\begin{vmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\varphi_1^{j-1}(a) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\varphi_\tau^{j-1}(a) & \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{1j}\varphi_{\tau+1}^{j-1}(b) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{1j}\varphi_n^{j-1}(b)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{nj}\varphi_1^{j-1}(a) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{nj}\varphi_\tau^{j-1}(a) & \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{nj}\varphi_{\tau+1}^{j-1}(b) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{nj}\varphi_n^{j-1}(b)\end{vmatrix}, \qquad (12)$$

соответствующие всем наборам чисел $\varphi_i(a)$, указанным выше (при разных нумерациях чисел $\varphi_1(a),\ldots,\varphi_\tau(a)$ определитель может лишь поменять знак), α_{ij}, β_{ij} – элементы матрицы (α,β).

Определение 2. Операторный пучок, удовлетворяющий условиям а)–в), называется регулярным пучком.

Данное определение обобщает определение регулярности пучка (10), (11) весьма частного типа, восходящее к Биркгофу [1] и широко известное в литературе.

Определение 3. Число $\tau^*=\max\limits_d\tau(d)$ назовем индексом дифференциального выражения (10) (первый индекс регулярности). Например, $\tau^*=2$ в случае характеристических чисел $\{\pm1,\pm i\}$.

Определение 4. Число $r=\min(\operatorname{rank}\alpha,\operatorname{rank}\beta)$ назовем индексом граничных условий (11) (второй индекс регулярности).

Определение 5. Числа τ^*, r назовем индексами регулярности пучка (10), (11).

В заключение параграфа приведем одно простое необходимое условие регулярности.

Теорема 3. *Неравенство $\tau^*\le r$ между индексами регулярности пучка (10), (11) необходимо для его регулярности.*

Доказательство. Пусть неравенство $\tau^*\le r$ нарушено, т.е. $\tau^*>\min(\operatorname{rank}\alpha,\operatorname{rank}\beta)$. Пусть, скажем, $\tau^*>\operatorname{rank}\alpha$, $\varphi_1,\ldots,\varphi_{\tau^*}$ – корни уравнения (7), содержащиеся в некоторой полуплоскости. По теореме о ранге произведения матриц, примененной к матрице α и матрице из первых τ^* столбцов матрицы Вандермонда $V(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, получим $\Phi_\tau(\alpha,\beta)=0$, т.е. пучок (10), (11) не является регулярным.

Пример. Для пучка $y'''(x) - \lambda^3 y(x) = 0,\ 0 < x < 1,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = 0$ имеем $\varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = e^{2\pi i/3},\ \varphi_3 = e^{-2\pi i/3}$ и поэтому $\tau^* = 2,\ \operatorname{rank}\alpha = 2,\ \operatorname{rank}\beta = 1,\ r = 1$ и $\tau^* > r$. Следовательно, этот пучок нерегулярный.

§ 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА РЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА (10), (11) И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

1. Определение 6. Функцией Грина для пучка (10), (11) называется функция $G(x,\xi,\lambda)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция $G(x,\xi,\lambda)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех $x,\xi \in [a,b]$;

2) при любом фиксированном ξ из интервала $[a,b]$ функция $G(x,\xi,\lambda)$ имеет непрерывные производные до n-го порядка в каждом из интервалов $[a,\xi)$, $(\xi,b]$, причем производная $(n-1)$-го порядка имеет единичный скачок при $x=\xi$:

$$\frac{\partial^{n-1}G(\xi+0,\xi,\lambda)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1}G(\xi-0,\xi,\lambda)}{\partial x^{n-1}} = 1;$$

3) в каждом из полуинтервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi,\lambda)$ как функция x удовлетворяет уравнению $l(v)=0$ и краевым условиям (11).

Теорема 4. *Функция Грина пучка (10), (11) существует, единственна и является мероморфной по λ функцией вида*

$$G(x,\xi,\lambda) = \Delta(x,\xi,\lambda)/\Delta(\lambda), \quad \Delta(\lambda) = \det\{u_{ik}(\lambda)\}_l^n, \quad u_{ik}(\lambda) = U_i(v_k), \tag{13}$$

где $v_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$, – фундаментальная система решений уравнения $l(v)=0$, U_i – i-е из граничных условий (11),

$$\Delta(x,\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & v_1(x,\lambda) & \dots & v_n(x,\lambda) \\ U_1(g)_x & u_{11}(\lambda) & \dots & u_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(g)_x & u_{n1}(\lambda) & \dots & u_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{\tau} v_s(x,\lambda) z_s(\xi,\lambda) & \text{при } \xi \le x, \\ -\sum\limits_{s=\tau+1}^{n} v_s(x,\lambda) z_s(\xi,\lambda) & \text{при } x < \xi, \end{cases} \qquad z_k(\xi,\lambda) = \frac{W_k(\xi,\lambda)}{W(\xi,\lambda)}, \tag{14}$$

W – вронскиан решений $v_1,\dots,v_n$, а $W_k(\xi,\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов его последней строки.

Доказательство. Единственность функции G легко следует из ее построения с помощью любой фундаментальной системы решений $v_1,\dots,v_n$ уравнения $l(v)=0$ (см. [7, с. 166]). Из представлений (13), (14) непосредственно следует, что функция G обладает всеми свойствами из определения 6 функции Грина. Разлагая определитель в (14) по первой строке, запишем функцию Грина в виде

$$G(x,\xi,\lambda) = g(x,\xi,\lambda) + \sum_{s=1}^{n} \frac{v_s(x,\lambda)\Delta^s(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{15}$$

где $\Delta^s(\xi,\lambda) = \begin{vmatrix} u_{11}(\lambda) & \dots & U_1(g)_x & \dots & u_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(\lambda) & \dots & \underbrace{U_n(g)_x}_{s} & \dots & u_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}.$

2. Для изучения нулей $\Delta(\lambda)$, иначе полюсов функции $G(x,\xi,\lambda)$, как и в классической ситуации [4, 25], путем подстановки решений (8) в элементы определителя $\Delta(\lambda)$ приходим к исследованию нулей асимптотически показательного многочлена вида

$$[H_1]e^{\mu_1\omega\lambda}+\ldots+[H_r]e^{\mu_r\omega\lambda}=0, \tag{16}$$

где $|\omega|=1$ и $\arg\omega$ принимает ν значений, ν – число различных аргументов чисел $\varphi_1(0),\ldots,\varphi_n(0)$, $\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_r$, H_1 и H_r – отличные от нуля определители типа (12), $[H]\equiv H+\delta(\lambda)$, где $\delta(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S$. Теория уравнения (16) изложена в [4, 25]. То, что смысл обозначения $[H]$ в нашем случае более широкий, не вносит существенных изменений. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ функции Грина пучка (10), (11) имеет бесконечное множество нулей, лежащих в полуполосах ограниченной ширины, содержащих лучи $\arg\lambda=\pm\pi/2-\arg\varphi_k$. В каждой из этих полуполос для нулей λ_k справедлива асимптотика $|\lambda_k|=(2\pi k/(m_r-m_1))[1]$ при нумерации λ_k в порядке роста модуля, $m_1<m_r$ – вещественные числа, разные для различных полуполос. Для любого $q>0$ в выбранной полуполосе количество нулей (считая их с кратностями), для которых $\lambda_k\in(N_0,N_0+q)$, меньше некоторого числа $c_q>0$, не зависящего от $N_0>0$.*

В секторах S справедлива асимптотика

$$\Delta(\lambda)=\lambda^N K(\lambda)\exp\biggl(\lambda\sum_{k=r+1}^{n}\int\limits_a^b\varphi_k(t)\,dt\biggr),\quad N=nn_1+(n-1)(n_1-n_2)+\ldots, \tag{17}$$

$|K(\lambda)|>C_\delta>0$, *вне δ-окрестности нулей λ_k.*

3. Установим асимптотику функции Грина, используя в формулах (13), (14) вместо $v_1,\ldots,v_n$ фундаментальную систему решений (8) из теоремы 2 для случая уравнения $l(v)=0$, имеющую место в каждом секторе S. Подставляя выражения (8) в формулу (14) для $z_k(\xi,\lambda)$ и выполняя простые преобразования, найдем

$$z_s(\xi,\lambda)=\frac{V_s(\xi)}{\lambda^{n-1}\eta_s(\xi)V(\xi)}(1+E_s(\xi,\lambda))e_{\varphi_s}(\xi,a), \tag{18}$$

где $V(x)\equiv V(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ – определитель Вандермонда, а V_s, $s=\overline{1,n}$, – алгебраические дополнения элементов последней строки определителя $V(x)$. Буквой E здесь и далее обозначаются функции типа (9), имеющие оценку (5).

На основании формул (8), (14) и (18) найдем представление

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=1}^{r}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)}{\lambda^{n-1}}\frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)}\{1+E_s(x,\xi,\lambda)\} & \text{при } \xi<x,\\ \displaystyle-\sum_{s=r+1}^{n}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)}{\lambda^{n-1}}\frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)}\{1+E_s(x,\xi,\lambda)\} & \text{при } a\le x\le\xi\le b,\ \lambda\in S.\end{cases} \tag{19}$$

Согласно формулам (8), (17), (18), сумма в выражении (15) может быть записана в секторе S в асимптотической при больших $|\lambda|$ форме

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{v_s(x,\lambda)\Delta^s(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\widetilde{\varepsilon}_{kl}(x,\lambda)}{\lambda^{n-1}}(V_1(\xi)+E_{ks}(\xi,\lambda))e_{\varphi_l}(\xi,c_1)e_{\varphi_k}(c_2,x),\quad \lambda\in S, \tag{20}$$

$\widetilde{\varepsilon}_{kl}(x,\lambda)$ – функции, ограниченные вне δ-окрестности полюсов функции Грина ($c_1=b$, если $l\le r$; $c_1=a$, если $l>r$; $c_2=a$, если $k\le r$; $c_2=b$, если $k>r$).

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Для функции Грина пучка (10), (11) справедливы асимптотические формулы (19), (20).*

4. Индукцией по n доказывается

Лемма 2. *Определитель*

$$\Delta = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{n-2} & \varphi_2^{n-2} & \dots & \varphi_n^{n-2} \\ \varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n & \varphi_1\varphi_3\cdots\varphi_n & \dots & \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-1} \end{vmatrix} \tag{21}$$

равен определителю Вандермонда $V(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

Лемма 3. *Пусть* $\widetilde{E}(\xi,\lambda)$ *– непрерывная функция, определенная в полуплоскости* $\operatorname{Re} c\lambda$, $c = \text{const} \neq 0$, $0 \le \xi \le 1$, *такая, что равномерно* $|\widetilde{E}(\xi,\lambda)| \ln|\lambda| \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$, *тогда* $J_m = \int_0^x d\xi \int_{\Gamma_m} \widetilde{E}(\xi,\lambda) e^{c\lambda\xi}\, d\lambda \to 0$, $x > 0$, *при* $m \to \infty$ *для контура* Γ_m *типа полуокружности из полуплоскости* $\operatorname{Re} c\lambda \le 0$ *[3, с. 177], кратчайшее расстояние* R_m *которого от начала стремится к* ∞ *при* $m \to \infty$.

Доказательство. Сначала оценим интеграл по λ, обозначив через R'_m наибольшее отклонение Γ_m от нуля:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \widetilde{E}(\xi,\lambda) e^{c\lambda\xi}\, d\lambda\right| \le 2R'_m \max_{\Gamma_m} |\widetilde{E}(\xi,\lambda)| \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-R_m|c|\xi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} d\theta \le$$

$$\le 2R'_m \max_{\Gamma_m} |\widetilde{E}(\xi,\lambda)| \int\limits_0^{\pi/2} \exp\left\{-R_m|c|\xi \cdot \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right\} d\theta \le L \max_{\Gamma_m} |\widetilde{E}(\xi,\lambda)| \frac{1 - e^{-R_m|c|\xi}}{\xi}, \quad L = \text{const}.$$

Мы имеем в виду, что для контуров Γ_m отношение R'_m/R_m ограничено. Продолжим оценку

$$|J_m| \le L \max_{\Gamma_m} |\widetilde{E}(\xi,\lambda)| \int\limits_0^x \frac{1 - e^{-R_m|c|\xi}}{\xi}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^{1/R_m} + \int\limits_{1/R_m}^x \le \frac{L\delta_m}{\ln|R_m|}\left(\int\limits_0^{1/R_m} R_m|c|\, d\xi + \int\limits_{1/R_m}^x \frac{d\xi}{\xi}\right) \le \frac{L\delta_m}{\ln R_m}(|c| + \ln R_m),$$

$J_m \to 0$ при $m \to \infty$. Через δ_m обозначена величина, стремящаяся к нулю при $m \to 0$. Данная лемма существенно обобщает соответствующую лемму из [4, с. 43].

§ 3. ФОРМУЛА n-КРАТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ ПУЧКА (10), (11)

Пусть Γ_m $(m = 1, 2, \dots)$ – последовательность замкнутых расширяющихся контуров в λ-плоскости, проходящих вне δ-окрестности нулей определителя $\Delta(\lambda)$ [7, с. 177].

Теорема 7. *Пусть для пучка (10), (11) выполнены условия регулярности. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой на* $[a,b]$ *функции* $h(x)$ *справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \lambda^p\, d\lambda \int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi = \begin{cases} h(x) & \text{при } p = n-1, \\ 0 & \text{при } p < n-1, \end{cases} \tag{22}$$

причем стремление к пределу равномерно на $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ $\forall \alpha,\beta$.

Доказательство. Формулу (22) докажем непосредственным вычислением предела в левой части. Для этого воспользуемся разложением (15) и асимптотическими в секторах S представлениями (19), (20).

1) Вычислим сперва предел

$$J_p = \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \lambda^p \, d\lambda \sum_{s=1}^{n} \int\limits_a^b \frac{v_s(x,\lambda)\Delta^s(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} (a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \sum_{k,l=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_m} e_{\varphi_k}(c_2,x) \frac{\varepsilon_{kl}(x,\lambda)\, d\lambda}{\lambda^{n-1-p}} \int\limits_a^b (V_l(\xi) + E_{k,l}(\xi,\lambda)) h(\xi) e_{\varphi_l}(\xi,c_1)\, d\xi.$$

Интеграл от ε в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S$ (любой сектор). Отсюда по лемме Жордана следует, что $J_p = 0$ при $p \le n-1$. При этом учитывается возможность интегрирования по частям по ξ в правой части и оценка (5).

2) Перейдем к вычислению предела

$$J_p^1(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \lambda^p \, d\lambda \int\limits_a^b g(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi, \quad p \le n-1.$$

Используя формулу (19), имеем

$$J_p^1(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\tau} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\, d\lambda}{\lambda^{n-1-p}} \int\limits_a^b \left\{ \frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)} + E_s(x,\xi,\lambda) \right\} (a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=\tau+1}^{n} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\, d\lambda}{\lambda^{n-1-p}} \int\limits_a^b \left\{ \frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)} + E_s(x,\xi,\lambda) \right\} (a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi. \tag{23}$$

Покажем равенство нулю пределов в (23), которые соответствуют интегральным слагаемым, содержащим букву E. Заменой переменной ξ : $\int_\xi^x |\varphi_s(t)|\, dt = z$ в интеграле

$$\int\limits_{\Gamma_m \cap S} \frac{E_s(x,\xi,\lambda)}{\lambda^{n-1-p}}\, d\lambda \int\limits_a^b e_{\varphi_s}(\xi,x)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi, \quad s \le \tau, \quad \lambda \in S,$$

придем к интегралу

$$\int\limits_0^Z dz \int\limits_{\Gamma_m \cap S} \frac{E_s(x,\xi(z),\lambda)(a^{(0,n)}(\xi(z)))^{-1} h(\xi(z)) \exp(\lambda |z| e^{i \arg \varphi_s})}{|\varphi(\xi(z))| \lambda^{n-1-p}}\, d\lambda,$$

$Z = \int_a^b |\varphi_1(t)| dt$, предел которого при $m \to \infty$ равен нулю согласно оценке (9) для E_s и простой перефразировке леммы 3.

Аналогично равны нулю все пределы в (23), содержащие букву E. Таким образом,

$$J_p^1(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{\tau} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\, d\lambda}{\lambda^{n-1-p}} \int\limits_a^b \frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)} (a^{(0,n)}(\xi))^{-1} h(\xi)\, d\xi +$$

$$+\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\sum_{s=\tau+1}^{n}\int\limits_{\Gamma_m}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\,d\lambda}{\lambda^{n-1-p}}\int\limits_a^b\frac{V_s(\xi)\eta_s(x)}{V(\xi)\eta_s(\xi)}(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)\,d\xi.$$

Интегрируя по частям по ξ, получим

$$J_p^1(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{\tau}\eta_s(x)\int\limits_{\Gamma_m}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\,d\lambda}{\lambda^{n-1-p}}\frac{V_s(\xi)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)}{V(\xi)\varphi_s(\xi)\eta_s(\xi)}\Bigg|_a^x-$$

$$-\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{\tau}\eta_s(x)\int\limits_{\Gamma_m}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\,d\lambda}{\lambda^{n-1-p}}\int\limits_a^b\left(\frac{V_s(\xi)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)}{V(\xi)\varphi_s(\xi)\eta_s(\xi)}\right)'d\xi-$$

$$-\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=\tau+1}^{n}\eta_s(x)\int\limits_{\Gamma_m}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\,d\lambda}{\lambda^{n-p}}\frac{V_s(\xi)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)}{V(\xi)\varphi_s(\xi)\eta_s(\xi)}\Bigg|_x^b-$$

$$-\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\sum_{s=\tau+1}^{n}\eta_s(x)\int\limits_{\Gamma_m}\frac{e_{\varphi_s}(\xi,x)\,d\lambda}{\lambda^{n-p}}\int\limits_a^b\left(\frac{V_s(\xi)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}h(\xi)}{V(\xi)\varphi_s(\xi)\eta_s(\xi)}\right)'d\xi.$$

Очевидно обращение в нуль при $p\le n-1$ пределов слагаемых, содержащих интегралы по ξ, а также пределов от слагаемых, полученных при подстановке $\xi=a$ и $\xi=b$ во внеинтегральных членах. Следовательно,

$$J_p^1(x)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\eta_s(x)V_s(x)(a^{(0,n)}(x))^{-1}h(\xi)}{V(x)\varphi_s(x)\eta_s(x)}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\frac{d\lambda}{\lambda^{n-p}},$$

откуда получаем, что

$$J_p^1(x)=0\quad\text{при}\quad p<n-1,\quad J_{n-1}^1(x)=\sum_{s=1}^{n}\frac{V_s(x)(a^{(0,n)}(x))^{-1}}{V(x)\varphi_s(x)}h(\xi).$$

По теореме Виета для свободного коэффициента $(a^{(0,n)}(x))^{-1}$ характеристического уравнения дифференциального выражения (10) имеем $(a^{(0,n)}(x))^{-1}=(-1)^{n-1}\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)$. Следовательно,

$$J_{n-1}^1(x)=\frac{h(x)}{V(x)}\sum_{s=1}^{n}\varphi_1(x)\ldots\varphi_{s-1}(x)\varphi_{s+1}(x)\ldots\varphi_n(x)V_s(x)=\frac{h(x)}{V(x)}\Delta$$

с определителем Δ из (21). Используя лемму 2, получаем $J_{n-1}^1(x)=h(x)V(x)/V(x)=h(x)$, чем завершается доказательство теоремы.

Теорема 8. *Пусть $h_0(x),\ldots,h_{n-2}(x)$ – функции из области определения регулярного пучка (10), (11), функция $h_{n-1}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и выполнены условия теоремы 7. Тогда справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda^p\,d\lambda\int\limits_a^x G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}F(\xi,h,\lambda)\,d\xi=h_p(x),\quad p=\overline{0,n-1},\tag{24}$$

где

$$F(x,h,\lambda)=\sum_{k_0=0}^{n-1}\lambda^{n-1-k_0}h_{k_0}(x)-\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\1\le k_0\le n-1}}a^{(k_0,k_1)}(x)\frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}}\{\lambda^{k_0-1}h_0(x)+\ldots+h_{k_0-1}(x)\}.\tag{25}$$

Доказательство. При $p=0$ формула (24) непосредственно следует из формул (22) и (25). Пусть $p=1$, тогда перепишем выражение (25) с множителем λ в виде

$$\lambda F(\xi,h,\lambda)=\Bigg(\lambda^n-\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\0\le k_0<n}}a^{(k_0,k_1)}(\xi)\lambda^{k_0}\frac{d^{k_1}}{d\xi^{k_1}}\Bigg)h_0(\xi)+\sum_{k_0=1}^{n-1}\lambda^{n-k_0}h_{k_0}(\xi)-$$

$$-\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\1\le k_0\le n-1}}a^{(k_0,k_1)}(\xi)\frac{d^{k_1}}{d\xi^{k_1}}(\lambda^{k_0-1}h_1(\xi)+\ldots+h_{k_0-1}(\xi))+\sum_{0\le k_1\le n}a^{(0,k_1)}(\xi)\frac{d^{k_1}}{d\xi^{k_1}}h_0(\xi).$$

Замечая, что первая сумма в правой части представляет собой оператор $l(h_0)$ (см. (10)), а оператор $\int_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}\ldots$ обращает l, получим

$$\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\lambda\,d\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}F(\xi,h,\lambda)\,d\xi=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}h_0(x)\,d\lambda-\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}d\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}\Bigg\{\sum_{k_0=1}^{n-1}\lambda^{n-k_0}h_{k_0}(\xi)-$$

$$-\sum_{\substack{k_0+k_1\le n\\1\le k_0\le n-1}}a^{(k_0,k_1)}(\xi)\frac{d^{k_1}}{d\xi^{k_1}}(\lambda^{k_0-1}h_1(\xi)+\ldots+h_{k_0-1}(\xi))\Bigg\}d\xi+$$

$$+\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}d\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}\sum_{0\le k_1\le n}a^{(0,k_1)}(\xi)\frac{d^{k_1}}{d\xi^{k_1}}h_0(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно равенство нулю первого предела. Третий предел равен нулю согласно формуле (22). Но по той же формуле средний предел равен $h_1(x)$. Случаи $p=2,\ldots$ рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Заменяя в формуле (24) интеграл по контуру Γ_m суммой вычетов по полюсам функции Грина, мы придем к следующей теореме.

Теорема 9. *При условиях теоремы 8 справедлива формула n-кратного разложения функции $h_i(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, в ряды Фурье по производным цепочкам для собственных и присоединенных функций пучка (10), (11)*

$$\frac{-1}{2\pi i}\sum_v\int\limits_{c_v}\lambda^p\,d\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)(a^{(0,n)}(\xi))^{-1}F(\xi,h,\lambda)\,d\xi=h_p(x),\tag{26}$$

$p=\overline{0,n-1}$, где c_v – простой замкнутый контур, окружающий только один полюс подынтегральной функции из теоремы 5.

Суммирование ряда (26) понимается в смысле суммирования со "скобками": в одну скобку собираются вычеты, соответствующие полюсам, расположенным между соседними контурами Γ_m и Γ_{m+1}. Строение производных цепочек подробно описано в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birkhoff G.D.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V. 9. P. 337–395.
2. *Birkhoff G.D., Langer R.E.* // Proc. Amer. Acad. 1923. V. 58. P. 51–128.
3. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
4. *Tamarkin J.* // Math. Z. 1927. V. 27. P. 1–54.
5. *Келдыш М.В.* // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
7. *Расулов М.Л.* Метод контурного интеграла. М., 1964.
8. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 1. С. 87–180.
9. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13. № 2. С. 61–120.
10. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 5. С. 771–794.
11. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 789–792.
12. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1048–1053.
13. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
14. *Ильин В.А., Йо И.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1175–1193.
15. *Hopkins J.W.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1919. V. 20. P. 245–259.
16. *Jacksen D.* // Proc. Amer. Acad. 1916. V. 51. P. 383–417.
17. *Ward L.* // Ann. Math. 1925. V. 26. P. 21–36.
18. *Ward L.* // Amer. J. of Math. 1935. V. 57. P. 345–362.
19. *Лидский В.Б.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1962. Т. 11. С. 3–35.
20. *Хромов А.П.* // Мат. сб. 1966. Т. 70. № 3. С. 310–329.
21. *Хромов А.П.* // Мат. сб. 1977. Т. 102 (144). № 3. С. 457–472.
22. *Костюченко А.Г., Шкаликов А.А.* // Функц. анализ. 1978. Т. 12. № 4. С. 24–40.
23. *Шкаликов А.А.* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
24. *Eberhard W.* // Math. Z. 1976. № 146. S. 213–221.
25. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-на-Дону, 1994.
26. *Вагабов А.И.* // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 2. С. 219–223.
27. *Freiling G.* // Math. Z. 1984. Bd 188. S. 55–68.
28. *Freiling G.* // Z. Angew. Math. und Mech. 1985. Bd 65. № 5. S. 336–338.
29. *Вагабов А.И.* // Вестн. Дагест. научного центра. 2002. № 13. С. 10–15.

Дагестанский государственный университет,
г. Махачкала

Поступила в редакцию
01.10.2002 г.