Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. М. Шумафов, О диссипативности случайных процессов, определяемых некоторыми нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка,
Дифференц. уравнения, 1993, том 29, номер 1, 175–176

https://www.mathnet.ru/de8027

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
9 декабря 2025 г., 02:27:03

ЯНВАРЬ 1993 г., ТОМ 29, № 1

УДК 517.925.51

М. М. ШУМАФОВ

О ДИССИПАТИВНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА*)

В настоящей работе рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=\sigma(x,\dot{x})\xi(t,\omega), \tag{1}$$

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+g(x)=\sigma(x,\dot{x})\xi(t,\omega), \tag{2}$$

$$\ddot{x}+g(x)=\varphi(x,\dot{x},t)+\sigma(x,\dot{x})\xi(t,\omega), \tag{3}$$

где функции $f(x,y)$, $F(y)$, $g(x)$, $\varphi(x,y,t)$, $\sigma(x,y)$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, $t\geqslant t_0$ $(\dot{x}=y)$, удовлетворяют локальному условию Липшица относительно своих аргументов, а $\xi(t,\omega)$ — измеримый случайный процесс, абсолютно интегрируемый на каждом конечном интервале с вероятностью 1, причем функция σ ограничена.

В детерминированном случае (т. е. когда $\sigma(x,\dot{x})\equiv 0$) различные свойства решений уравнений (1)—(3), включая диссипативность, изучались многими авторами, обзор этих результатов приводится, например, в [1].

В том частном случае, когда $f(x,\dot{x})\equiv f(x)$, уравнение (1) рассмотрено в [2, с. 40, 41] и для него установлены достаточные условия диссипативности решений.

Нами получены достаточные условия диссипативности решений соответственно уравнений (1)—(3). Эти условия даются в виде обобщенных (в какой-либо форме) условий Рауза — Гурвица.

При сделанных предположениях относительно функций, входящих в уравнения (1)—(3), существует и единственно [2, с. 26—28] решение (представляющее собой абсолютно непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс) соответствующей задачи Коши $(x(t_0)=x_0(\omega)$, $\dot{x}(t_0)=y_0(\omega)$, где $x_0(\omega)$, $y_0(\omega)$ — случайные величины) для каждого из уравнений (1)—(3).

1. Вместо уравнений (1)—(3) будем рассматривать соответствующие им эквивалентные системы

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-f(x,y)y-g(x)+\sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{1'}$$

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-F(y)-g(x)+\sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{2'}$$

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=\varphi(x,y,t)-g(x)+\sigma(x,y)\xi(t,\omega). \tag{3'}$$

Во всех следующих ниже теоремах утверждается также неограниченная продолжаемость решений при всех $t\geqslant t_0$ [2, с. 28].

Теорема 1. *Пусть в системе (1′) случайный процесс $\xi(t,\omega)$ имеет ограниченное математическое ожидание: $\sup\limits_{t\geqslant t_0}M|\xi(t,\omega)|<\infty$, функция $\sigma(x,y)$ ограничена: $|\sigma(x,y)|<B$, а функции $f(x,y)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям*

a) $0<c_1<g(x)/x<c_2$ для $|x|>X_0$;

b) $0\leqslant f(x,y)\leqslant k(|x|+|y|)$ для $|x|>X_0$, $|y|\leqslant Y_0$ и $|x|\leqslant X_0$, $|y|>Y_0$;

c) $f(x,y)\geqslant f_0>0$ для $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy>0$; $0<c_3<f(x,y)<c_4$ для $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy<0$,

где c_1, c_2, c_3, c_4, f_0, X_0, Y_0 — некоторые положительные числа, а положительная константа k удовлетворяет определенному неравенству

$$k<\min\left\{\frac{A}{\Phi_0},\ \frac{c_1\varphi_0}{Y_0\varphi_1}\right\},$$

причем положительные числа A, Φ_0, φ_0, φ_1 связаны с некоторой непрерывно дифференцируемой (возможно также нарушение дифференцируемости в отдельных точках) функцией $\Phi(x)$, $x\in\mathbf{R}$, такой, что

$$\Phi'(x)<-A \text{ при } |x|\leqslant X_0;\ \Phi_0=\max_{|x|\leqslant X_0}|\Phi(x)|,$$

*) Рукопись полностью депонирована в ВИНИТИ 19.05.92, № 1646— В92.

$$0<\varphi_0<\Phi'(x)<\varphi_1 \text{ при } |x|>X_0'\geqslant X_0. \tag{4}$$

Тогда система (1′) диссипативна.

Теорема 2. *Пусть в системе (3′)*

$$\sup_{t\geqslant t_0} M|\xi(t,\omega)|<\infty,\ |\sigma(x,y)|<B,$$

а функции $g(x)$ и $\varphi(x,y,t)$ удовлетворяют условиям

a) $0<c_1<g(x)/x<c_2$ *для* $|x|>X_0$;

b) $\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn} y<-c_3|y|$ *для* $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy>0$; $-\alpha(|x|+|y|)<\varphi\operatorname{sgn} y<-c_3|y|$ *для* $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy<0$;

c) $-\beta|y|(|y|+X_0)<\varphi\operatorname{sgn} y<\theta A_0|y|$ *для* $|x|\leqslant X_0$, $|y|>Y_0$;

d) $|\varphi(x,y,t)|\leqslant\varkappa Y_0(|x|+\tilde{Y}_0)$ *для* $|x|>X_0$, $|y|\leqslant Y_0$,

где c_1, c_2, c_3, A_0, X_0, Y_0, $\tilde{Y}_0$ — некоторые положительные числа, а α, β, $\varkappa$, θ подчиняются соответственно неравенствам

$$0<\alpha<c_1\varphi_0/\varphi_1,\ 0<\beta<A/\Phi_0,\ 0<\varkappa<c_1\varphi_0/Y_0\varphi_1,$$

$$0<\theta<\min\left\{\frac{c_3}{\varphi_1};\ \frac{\sqrt{c_1}}{\varphi_1};\ \frac{4c_3(c_1\varphi_0-\alpha\varphi_1)}{\alpha^2\varphi_1^2+4\varphi_1(c_1\varphi_0-\alpha\varphi_1)}\right\},$$

причем положительные константы A, Φ_0, φ_0, φ_1 связаны с некоторой гладкой (или кусочно-гладкой) функцией $\Phi(x)$, удовлетворяющей соотношениям (4) теоремы 1.

Тогда система (3′) диссипативна.

Полагая в системе (3′) $\varphi(x,y,t)\equiv-F(y)$, получим из теоремы 2

Следствие. *Пусть в системе (2′)* $\sup\limits_{t\geqslant t_0} M|\xi(t,\omega)|<\infty$, $|\sigma(x,y)|<B$. *Тогда условия*

a) $0<c_1<g(x)/x<c_2$ *для* $|x|>X_0$;

b) $0<c_3<F(y)/y<c_4$ *для* $|y|>Y_0$

обеспечивают принадлежность системы (2′) к классу диссипативных систем.

2. Беря случайный процесс $\xi(t,\omega)$ из более узкого класса случайных процессов, можно получить менее жесткие условия диссипативности систем (1′)—(3′).

3. Из теорем 1, 2, используя теорему 3.1 [2, с. 80, гл. 1], получим следующие предложения.

Теорема 3. *Пусть в уравнениях (1)—(3) $\xi(t,\omega)$ — стационарный случайный процесс. Тогда условия теорем 1, 2 и следствия теоремы 2 (порознь) достаточны для существования стационарного решения соответственно уравнений (1), (3) и (2).*

Теорема 4. *Пусть в уравнениях (1)—(3) функции $f(x,\dot{x})$, $F(\dot{x})$ и $\sigma(x,\dot{x})$ заменены соответственно $f(x,\dot{x},t)$, $F(\dot{x},t)$ и $\sigma(x,\dot{x},t)$. Пусть, далее, функции $f(x,y,t)$, $F(y,t)$, $\varphi(x,y,t)$ и $\sigma(x,y,t)$ T-периодичны по t и удовлетворяют локальному условию Липшица, причем $f(0,0,t)$, $F(0,t)$, $\varphi(0,0,t)$ абсолютно интегрируемы на любом конечном интервале и $|\sigma(x,y,t)|<B$ для всех x, y и t.*

Тогда условия теорем 1, 2 и следствия теоремы 2 (порознь) обеспечивают существование T-периодического решения соответственно уравнений (1), (3) и (2) для любого T-периодического стохастически непрерывного процесса $\xi(t,\omega)$ с конечным математическим ожиданием.

Доказательства всех приведенных выше теорем проводятся построением специальных функций Ляпунова и изучением свойств этих функций вдоль решений детерминированных систем, соответствующих (1′)—(3′).

Литература

1. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

2. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969.

Всесоюзный научно-исследовательский и проектный институт по автоматизированным системам управления в газовой промышленности, г. Москва

Поступила в редакцию 12 августа 1991 г.