N. V. Norin, O. G. Smolyanov, Logarithmic derivatives of measures, and Gibbs distributions,
Dokl. Akad. Nauk, 1997, Volume 354, Number 4, 456–460

https://www.mathnet.ru/eng/dan3754

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 354, № 4, с. 456–460

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ МЕР И ГИББСОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

© 1997 г. **Н. В. Норин, О. Г. Смолянов**

Представлено академиком В.П. Масловым 10.05.95 г.

Поступило 12.05.95 г.

Задача восстановления (борелевской счетно-аддитивной) меры на локально-выпуклом пространстве (ЛВП) по ее логарифмической производной (= логарифмическому градиенту), поставленная в 1971 г. (см. [1]) как (довольно специальная) задача теории гладких мер на ЛВП, оказалась тесно связанной с несколькими центральными задачами математической теории бесконечномерных систем. В частности, именно к ней сводятся задача построения гильбертова пространства состояний квантового аналога бесконечномерной гамильтоновой системы с разделяющимися "кинетической" и "потенциальной" энергиями и квадратической зависимостью первой из них от импульсных координат (она равносильна также задаче построения меры, описывающей так называемое основное состояние этого квантового аналога), а также проблема построения инвариантной меры для диффузионных процессов в (бесконечномерном) пространстве, являющаяся, в свою очередь, одной из основных задач так называемого стохастического квантования [8, 5].

В настоящем сообщении показано, что к задаче восстановления меры на ЛВП по ее логарифмической производной сводится также одна из центральных проблем равновесной статистической механики гамильтоновых систем с линейным фазовым пространством (называемых иногда системами с непрерывным спином [3]) – проблема восстановления гиббсовской меры по гамильтониану взаимодействия. Как известно, гамильтониан определяет (фактически в соответствии с первоначальным постулатом самого Гиббса) семейство (некоторых) конечномерных условных распределений гиббсовской меры. Таким образом, задача восстановления гиббсовской меры по гамильтониану (соответствующей гамильтоновой системы) сводится к задаче восстановления меры по (некоторому) семейству ее конечномерных условных мер, называемому спецификацией (см. [4], а также [3] и имеющиеся там ссылки). Но условная мера, соответствующая гладкой мере, может рассматриваться как поверхностная, а логарифмическая производная поверхностной меры совпадает с ограничением на соответствующее подпространство логарифмической производной меры, порождающей эту поверхностную меру. Таким образом, задание (достаточно богатого) семейства конечномерных условных мер равносильно заданию логарифмической производной искомой меры, так что восстановление гиббсовской гладкой меры по гамильтониану сводится к восстановлению гладкой меры по ее логарифмической производной. При этом существование различных мер с одной и той же логарифмической производной означает существование различных стационарных состояний, соответствующих одному и тому же гамильтониану, т.е. возможность фазового перехода.

Отметим еще два частных результата, полученных в заметке. В ней вычислена логарифмическая производная гиббсовского распределения, для которой получено явное выражение через гамильтониан, а также через потенциал взаимодействия. В гауссовском случае приведено явное выражение для логарифмической производной спецификации и, исходя из совпадения логарифмических производных гиббсовской меры и спецификации, новым способом получено известное условие того, что данная гауссовская мера задается гауссовской спецификацией.

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всюду далее предполагается, что все рассматриваемые векторные пространства являются вещественными, а все топологические (векторные) пространства – хаусдорфовыми. Для каждого ЛВП E символом $\mathcal{B}(E)$ обозначается σ-алгебра борелевских подмножеств E, а символом $\mathfrak{M}(E)$ – векторное пространство всех мер Радона [10] на E, принимающих вещественные значения. Мы

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

всегда предполагаем, что ЛВП E таково, что пространство $\mathfrak{M}(E)$, наделенное топологией сходимости на каждом борелевском множестве, секвенциально полно.

Мера $\nu \in \mathfrak{M}(E)$ называется дифференцируемой по Фомину вдоль вектора $h \in E$ [1], если для всякого множества $A \in \mathcal{B}(E)$ функция $\varphi_\nu: t \mapsto \nu(A + th)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема (в нуле, а потому и всюду). Тогда функция $\mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$: $A \mapsto \varphi'_\nu(0)$, обозначаемая символом $d_h\nu$, представляет собой меру Радона на $\mathcal{B}(E)$, называемую производной (по Фомину) меры ν; доказывается [1, 11], что мера $d_h\nu$ абсолютно непрерывна относительно ν, и ее производная Радона–Никодима относительно ν, обозначаемая символом $\beta_\nu(h, \cdot)$, называется логарифмической производной меры ν вдоль h. Для каждого семейства $h_1, \ldots, h_n \in E$ производная меры ν по направлению $(h_1, \ldots, h_n)$, обозначаемая символом $d_{h_1, \ldots, h_n}\nu$, определяется по индукции.

2. СПЕЦИФИКАЦИИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Если $(E_1, \mathcal{B}_1)$ и $(E_2, \mathcal{B}_2)$ – два измеримых пространства (это значит, что E_j – множества, $\mathcal{B}_j$ – σ-алгебра их подмножеств), то интегральным ядром (и.я.) из $(E_1, \mathcal{B}_1)$ в $(E_2, \mathcal{B}_2)$ называется [3] функция ψ: $(\mathcal{B}_2, E_1) \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

(1) каково бы ни было $z \in E_1$, функция $\psi(\cdot, z)$ – (счетно-аддитивная) мера на $\mathcal{B}_2$;

(2) каково бы ни было $A \in \mathcal{B}_2$, функция $\psi(A, \cdot)$ $\mathcal{B}_1$-измерима;

(если $\psi(\cdot, z)$ – вероятностная мера для каждого $z \in E_2$, то и.я. называется вероятностным).

Наконец в случае, если $E_1 = E_2$ и $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, вероятностное и.я. называется собственным, если для всякого $B \in \mathcal{B}_1$ $\psi(B, \cdot) = I_B$, где I_B – индикатор множества B. Если $(E_j, \mathcal{B}_j)$ – измеримые пространства, то композиция и.я. γ_{12} из $(E_1, \mathcal{B}_1)$ в $(E_2, \mathcal{B}_2)$ и γ_{23} из $(E_2, \mathcal{B}_2)$ в $(E_3, \mathcal{B}_3)$ определяется так:

$$\gamma_{12} \circ \gamma_{23}(B, x) = \int_{E_2} \gamma_{12}(B, z)\gamma_{12}(dz, x).$$

Отметим еще, что если $E_2 = E_3$, $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_3$, то правая часть последнего равенства определяет также композицию и.я. γ_{12} из $(E_1, \mathcal{B}_1)$ в $(E_3, \mathcal{B}_3)$ и γ_{23} из $(E_2, \mathcal{B}_2)$ в $(E_3, \mathcal{B}_3)$.

Пусть теперь G – ЛВП, $S = \{e_n\}$ – топологически свободное счетное подмножество G и T – множество всех конечных подмножеств множества S. Множество S может описывать как одномерную, так и многомерную решетку; результаты настоящей работы от размерности решетки не зависят. Для каждого $\Lambda \in T$ символ σ_Λ будет обозначать проекцию пространства G на подпространство G_Λ пространства G, порожденное множеством Λ, параллельно подпространству пространства G, порожденному множеством $S\backslash\Lambda$; положим еще $\sigma_{S\backslash\Lambda} = \mathrm{Id} - \sigma_\Lambda$, $\mathcal{B}_{S\backslash\Lambda} = \sigma_{S\backslash\Lambda}^{-1}(\mathcal{B}(\sigma_{S\backslash\Lambda}(G)))$.

Определение 1. Спецификацией на G с множеством параметров S называется семейство $\gamma = (\gamma_\Lambda | \Lambda \in T)$, где для каждого $\Lambda \in T$ γ_Λ – собственное вероятностное и.я. из $(G, \mathcal{B}_{S\backslash\Lambda})$ в $(G, \mathcal{B}(G))$, удовлетворяющее условию согласованности: если $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, $\Lambda_j \in T, j = 1, 2$), то $\gamma_{\Lambda_1} \circ \gamma_{\Lambda_2} = \gamma_{\Lambda_2}$.

Замечание. Если ν – мера на $\mathcal{B}(G)$, то для каждого $\Lambda \in T$ можно выбрать такое регулярное условное распределение γ_Λ меры ν относительно $\mathcal{B}_{S\backslash\Lambda}$, что семейство $\gamma = (\gamma_\Lambda | \Lambda \in T)$ будет спецификацией на G с множеством параметров S. При этом говорят, что мера ν задается спецификацией γ; множество всех мер, задаваемых спецификацией γ, будем обозначать $\mathfrak{G}(\gamma)$. Всякую меру из множества $\mathfrak{G}(\gamma)$ будем (допуская вольность речи) называть гиббсовской.

Наша ближайшая цель – описать связь между спецификациями и логарифмическими производными соответствующих им гиббсовских мер.

Теорема 1 (ср. [2, теорема 2.5]). *Пусть E – ЛВП, причем $E = Y \oplus F$, где F – сепарабельное пространство Фреше, а $h_1, \ldots, h_n \in F$. Пусть далее $\mu \in \mathfrak{M}(E)$, ν – образ меры μ относительно естественной проекции E на Y. Предположим, что $\mu(\cdot, \cdot)$: $\mathcal{B}(E) \times Y \to \mathbb{R}$ – такая регулярная условная мера, что при всех $y \in Y$ мера $\mu(\cdot, y)$ дифференцируема по направлению $(h_1, \ldots, h_n)$. Тогда мера μ также дифференцируема по направлению $(h_1, \ldots, h_n)$ и для всех $B \in \mathcal{B}(E)$ справедливо равенство*

$$d_{h_1} \ldots d_{h_n}\mu(B) = \int_Y d_{h_1} \ldots d_{h_n}\mu(B, y)\nu(dy),$$

причем μ-п.в. $\beta_\mu(h_1, \ldots, h_n; x) = \beta_{\mu(\cdot, y)}(h_1, \ldots, h_n; x)$.

Пусть для каждого $\Lambda \in T$ $G_\Lambda = \mathrm{span}\{e_i | e_i \in \Lambda\}$ и для каждого $x \in G$ $x_\Lambda = \sigma_\Lambda(x) \in G_\Lambda$, а $x_{S\backslash\Lambda} = \sigma_{S\backslash\Lambda}(x)$.

Следствие 1. *Если меры $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{G}(\gamma)$ дифференцируемы по направлению $h \in G_\Lambda$, то $\beta_{\mu_1}(h, x) = \beta_{\gamma_\Lambda}(h, x) = \beta_{\mu_2}(h, x)$ γ_Λ-п.в.*

Таким образом, задача восстановления дифференцируемой гиббсовской меры по ее спецификации (в случае непрерывного спина) совпадает с задачей восстановления дифференцируемой меры по семейству ее логарифмических производных

$\{\beta_{\gamma_\Lambda}(h, x) | \Lambda \in T, h \in G_\Lambda\}$. Последняя задача, как уже отмечалось, впервые была поставлена в [1, с. 152] и до сих пор интенсивно изучается (см. [9, 6]).

Пусть $\Phi = (\Phi_A)_{A \in T}$ – семейство функций, называемое потенциалом взаимодействия. При этом предполагается, что для каждого $A \in T$ функция Φ_A является измеримой относительно $\mathcal{B}_A = \sigma_A^{-1}(\mathcal{B}(\sigma_A(G)))$ и ряды

$$H_\Lambda^\Phi(x) = \sum_{A \in T, A \cap \Lambda \neq \varnothing} \Phi_A(x)$$

сходятся. Функция H_Λ^Φ называется гамильтонианом в Λ для Φ, а ее значение $H_\Lambda^\Phi(x)$ – полной энергией конфигурации x в Λ для Φ. Пусть λ – неотрицательная мера на $\mathbb{R}$ (называемая свободной). Мы предполагаем, что потенциал Φ таков, что статистическая сумма

$$Z_\Lambda^\Phi(x) = \int_{G_\Lambda} \exp[-H_\Lambda^\Phi(x_\Lambda + x_{S\setminus\Lambda})]\lambda^\Lambda(dx_\Lambda)$$

конечна для всех $\Lambda \in T$ и $x \in X$ (где λ^Λ – произведение Card(Λ) копий λ). При этих предположениях символом γ^Φ обозначается спецификация, определяемая соотношением

$$(A, x) \mapsto \gamma_\Lambda^\Phi(A, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_\Lambda^\Phi(x)} \times$$

$$\times \int_{G_\Lambda} \exp[-H_\Lambda^\Phi(x_\Lambda + x_{S\setminus\Lambda})] I_A(x_\Lambda + x_{S\setminus\Lambda})\lambda^\Lambda(dx_\Lambda),$$

а каждая из мер $\gamma_\Lambda^\Phi(\cdot, x)$ называется гиббсовским распределением в Λ с граничным условием $x_{S\setminus\Lambda}$.

Теорема 2. *Предположим, что для каждого $\Lambda \in T$ потенциал взаимодействия Φ_Λ дифференцируем вдоль направления $h \in G_\Lambda$ и свободная мера λ дифференцируема. Тогда для каждого $x \in X$ гиббсовское распределение $\gamma_\Lambda^\Phi(\cdot, x)$ дифференцируемо вдоль h, причем*

$$\beta_{\gamma_\Lambda^\Phi}(h, x) = -\sum_{A \in T, A \cap \Lambda \neq \varnothing} d_h\Phi_A(x) + \beta_{\lambda^\Lambda}(h, x).$$

Следствие 2. *Пусть потенциал взаимодействия Φ_Λ дифференцируем вдоль направления $h \in G_\Lambda$, а λ – мера Лебега на прямой. Тогда гиббсовское распределение $\gamma_\Lambda^\Phi(\cdot, x)$ дифференцируемо вдоль h, причем*

$$\beta_{\gamma_\Lambda^\Phi}(h, x) = -\sum_{A \in T, A \cap \Lambda \neq \varnothing} d_h\Phi_A(x).$$

Пусть теперь

$$\Phi_A(x) = \begin{cases} J_{ij}\varphi(x_i, x_j), \text{ если } A = \{i, j\}, \ i \neq j, \\ J_{ii}\psi(x_i), \text{ если } A = \{i\}, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

парный потенциал, где $J = (J_{ij})_{i,j \in S}$ – бесконечная симметричная матрица, индексированная элементами множества S, φ: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевские функции, причем φ симметрична. Тогда если $h \in G_\Lambda$, то

$$\beta_{\gamma_\Lambda^\Phi}(h, x) = -\sum_{i \in \Lambda} J_{ii}d_h\psi(x_i) - \\ - \sum_{i \in \Lambda, j \in S\setminus\Lambda} J_{ij}d_h\varphi(x_i, x_j) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{i, j \in \Lambda, i \neq j} J_{ij}d_h\varphi(x_i, x_j) + \beta_{\lambda^\Lambda}(h, x);$$

в частности, если λ является мерой Лебега, то

$$\beta_{\gamma_\Lambda^\Phi}(h, x) = -\sum_{i \in \Lambda} J_{ii}d_h\psi(x_i) - \\ - \sum_{i \in \Lambda, j \in S\setminus\Lambda} J_{ij}d_h\varphi(x_i, x_j) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{i, j \in \Lambda, i \neq j} J_{ij}d_h\varphi(x_i, x_j)$$

при условии сходимости всех рассматриваемых рядов и законности перестановки операций суммирования и дифференцирования. Для выполнения этого условия достаточно, например, чтобы потенциал Φ имел конечный радиус взаимодействия, т.е. $J_{ij} = 0$, если $|i - j| > M$ для некоторого натуральном M.

3. ГАУССОВСКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ

Пусть свободная мера является мерой Лебега, а парный потенциал $\Phi^{J,g}$ (где J: $S \times S \to \mathbb{R}$ – симметричная функция, а $g \in X$) определен равенством

$$\Phi_A^{J,g}(x) = \begin{cases} J_{ij}x_ix_j, \text{ если } A = \{i, j\}, \ i \neq j, \\ \frac{1}{2}J_{ii}x_i^2 + g_ix_i, \text{ если } A = \{i\}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно [3, (13.13)], такой потенциал задает гиббсовскую спецификацию $\gamma^{J,g}$ тогда и только тогда, когда J положительно определена. При этом

$$\gamma_\Lambda^{J,g}(A,x) = $$
$$= \begin{cases} (Z_\Lambda^{J,g}(x))^{-1}\int\limits_{G_\Lambda} I_A \exp(-H_\Lambda^{J,g})d\lambda^\Lambda, & \text{если } x\in\Omega_J,\\ \delta_{0_\Lambda + x_{S\setminus\Lambda}}(A) & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\Omega_J = \{x\in X \mid \sum_{j\in S}|J_{ij}x_j| < \infty$ для всех $i\in S\}$. Такая спецификация называется гауссовской [3, (13.18)].

Теорема 3. *Если гауссовская мера μ со средним $m = (m_1, m_2, \ldots)$ и ковариационной функцией $C = (C_{ij})$ задается гауссовской спецификацией $\gamma^{J,g}$, то $g_i + \sum_{j\in S} J_{ij}m_j = 0$ для всех $i\in S$.*

Доказательство основано на том, что логарифмическая производная гауссовской меры определяется логарифмической производной задающей эту меру спецификации (см. теорему 1). Пусть $h\in G_\Lambda$. Тогда вторая из названных логарифмических производных вычисляется так:

$$\beta_{\gamma_\Lambda^{J,g}}(h,x) = -\sum_{i\in\Lambda}(J_{ii}h_ix_i + h_ig_i) -$$
$$-\sum_{i\in\Lambda,\, j\in S\setminus\Lambda} J_{ij}h_ix_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\Lambda,\, i\neq j} J_{ij}(h_ix_j + h_jx_i) =$$
$$= -\sum_{i\in\Lambda} h_i\left[g_i + \sum_{j\in S}J_{ij}x_j\right]. \qquad (1)$$

К тому же [1]

$$\beta_\mu(h,x) = -\sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in S}J_{ij}h_i(x_j - m_j) =$$
$$= -\sum_{i\in\Lambda}h_i\left[\sum_{j\in S}J_{ij}x_j - \sum_{j\in S}J_{ij}m_j\right] =$$
$$= -\sum_{i\in\Lambda}h_i\left(\sum_{j\in S}J_{ij}x_j + g_i\right) - \sum_{i\in\Lambda}h_i\left(\sum_{j\in S}J_{ij}m_j + g_i\right) =$$
$$= \beta_{\gamma_\Lambda^{J,g}}(h,x) - \sum_{i\in\Lambda}h_i\left(\sum_{j\in S}J_{ij}m_j + g_i\right). \qquad (2)$$

Поскольку правые части (1) и (2) должны совпадать, $g_i + \sum_{j\in S}J_{ij}m_j = 0$ для всех $i\in S$.

Отметим также, что приведенные рассуждения представляют собой новое доказательство одного из утверждений теоремы 13.22 из [3].

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ ПО ЕЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть G – ЛВП, являющееся пространством Радона [10], $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – билинейная форма, определяющая двойственность между G^* и G, H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и нормой $|\cdot|$, плотно вложенное в G таким образом, что $\langle g, x\rangle = \langle g, x\rangle_H$ для всех $x\in H$, $g\in G^*$. При этом мы считаем, что H отождествлено с H^*, а следовательно, $G^*\subset H^* = H\subset G$. В описанной ситуации для всякого $m\in G$ существует G^*-цилиндрическая гауссовская мера γ_m^*, определенная на G, преобразование Фурье $F_{\gamma_m^*}$ которой определяется равенством $F_{\gamma_m^*}(g) = \exp(i\langle g, m\rangle - |g|^2/2)$; в случае ее счетной аддитивности она продолжается (единственным образом) до борелевской меры γ_m на G. Давно известно [1], что мера γ_m дифференцируема вдоль каждого вектора $h\in H$, причем $\beta_{\gamma_m}(h,x) = -\langle h, x-m\rangle$ для всякого $h\in G^*(\subset H)$.

Теорема 4. *Если (счетно-аддитивная) борелевская мера μ на G дифференцируема по подпространству G^*, причем $\beta_\mu(h,x) = -\langle h, x-m\rangle$ для каждого $h\in G^*$, то $\mu = C\gamma_m$, где $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

Доказательство. Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства $d_h\mu = -\langle h, \cdot - m\rangle\mu$, получим, что

$$(F_\mu)'(g)h = (i\langle h, m\rangle - \langle h, g\rangle)F_\mu(g). \qquad (3)$$

То, что функция $\psi(g) = \mu(G)F_\gamma(g)$ является решением уравнения (3), проверяется непосредственно. Единственность следует из теоремы Фробениуса.

О связи этой теоремы с проблемой существования фазовых переходов мы собираемся написать в другом месте.

При работе над статьей второй из авторов пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93–011–1693) и Международного научного фонда (грант ND8000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 24. С. 133–174.
2. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* // УМН. 1990. Т. 45. В. 3. С. 3–83.

3. *Georgii H.-O.* Gibbs Measures and Phase Trasitions. B.: Gruyter, 1988 (рус. пер.: Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы). М.: Мир, 1992. 621 с.
4. *Добрушин Р.Л.* // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Т. 13. В. 2. С. 201–229.
5. *Кириллов А.И.* // УМН. 1994. Т. 49. В. 3. С. 43–92.
6. *Кириллов А.И.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. В. 1. С. 121–138.
7. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976. С. 190.
8. *Мигдал А.Б.* // УФН. 1986. Т. 149. В. 1. С. 3–44.
9. *Норин Н.В., Смолянов О.Г.* // Мат. заметки. 1993. Т. 54. В. 6. С. 135–138.
10. *Смолянов О.Г., Фомин С.В.* // УМН. 1976. Т. 31. В. 4. С. 3–56.
11. *Smolyanov O.G., Weizsäcker H.* // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. P. 455–476.