



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотическая связь между решениями различных нелинейных уравнений при больших временах. II,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 8, 1432–1444

<https://www.mathnet.ru/de8451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

28 апреля 2025 г., 21:05:58



УДК 517.95 + 535.5

П. И. НАУМКИН, И. А. ШИШМАРЕВ

**АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ
РАЗЛИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ. II**

1. Введение. В первой части настоящей работы [1] мы выявили связь между поведением при больших временах решений некоторого класса нелинейных нелокальных уравнений и решением уравнения Бенджамена—Оно—Бюргерса. Важным частным случаем рассмотренного класса нелинейных нелокальных уравнений является уравнение Кортевега—де Фриза—Бюргерса (КдФБ)

$$u_t + 2uu_x - u_{xx} + (a/3)u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

В п. 2 [1] мы показали, что асимптотика при $t \rightarrow \infty$ в области $\chi = x/\sqrt{t} = O(1)$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ совпадает (в главном члене) с асимптотикой при $t \rightarrow \infty$ решения $v(x, t)$ задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$v_t + 2vv_x - v_{xx} = 0 \quad (1.2)$$

с тем же начальным условием $v(x, 0) = u(x, 0) = \bar{u}(x)$. Решение $v(x, t)$ находится с помощью преобразования Хопфа—Коула

$$v(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln Z(x, t), \quad (1.3)$$

где функция $Z(x, t)$ является решением уравнения теплопроводности и вычисляется с помощью функции Грина $G(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp(-x^2/4t)$:

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy G(x-y, t) \exp\left(-\int_{-\infty}^y \bar{u}(\xi) d\xi\right). \quad (1.4)$$

Если начальные данные $\bar{u}(x)$ таковы, что $U \equiv \int_{R_1} \bar{u}(x) dx \neq 0$, $\int_{R_1} |\bar{u}(x)| \times (1+|x|) dx < \infty$, то асимптотика $v(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\chi = x/\sqrt{t} \in R_1$ имеет вид

$$v(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial \chi} \ln H(\chi) + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (1.5)$$

где

$$H(\chi) = e^{-U/2} (\text{ch}(U/2) - \text{sh}(U/2) \text{Erf}(\chi/2)), \quad (1.6)$$

$\text{Erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-q^2} dq$ — интеграл ошибок.

В настоящей работе найдем первые два члена асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1). Насколько нам известно, это первый случай, когда удалось найти в явном виде второй член асимптотики для решений нелинейного уравнения, не линеаризуемого с помощью замены переменных. Отметим, что в работах [2—4] получены

оценки убывания в различных нормах решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса с использованием преобразования Хопфа—Коула.

В п. 2 настоящей работы рассмотрим асимптотику при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения (1.1) в области $\chi = x/\sqrt{t} = O(1)$ и покажем, что она имеет вид

$$u(x, t) = (1/\sqrt{t})A(\chi) + ((\ln t)/t)\bar{A}(\chi) + O(\sqrt{\ln t}/t) \quad (1.7)$$

равномерно по $\chi \in R_1$. Величины $A(\chi)$ и $\bar{A}(\chi)$ в явной форме представлены в п. 2. Интересно отметить, что начальное условие $\bar{u}(x)$ входит в выражения для A и \bar{A} лишь в виде интеграла $\int_{R_1} \bar{u}(x) dx$.

Хотя асимптотика (1.7) формально справедлива равномерно по $\chi \in R_1$ при $t \rightarrow \infty$, однако коэффициенты $A(\chi)$ и $\bar{A}(\chi)$ сами быстро стремятся к нулю при $\chi \rightarrow \infty$, так что при $\chi \rightarrow \infty$ остаточный член в (1.7) становится больше главного, т. е. в действительности асимптотика (1.7) имеет смысл в области $\chi = O(1)$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому в п. 3 изучена асимптотика решения задачи Коши для уравнения (1.1) в области $\chi \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Эта асимптотика имеет квазилинейный характер, определяемый уравнением $v_t - v_{xx} + (a/3)v_{xxx} = 0$, а вклад нелинейности учитывается видом коэффициентов в асимптотической формуле. Точный вид асимптотики довольно громоздок и приведен в п. 3 (см. формулы (3.3)–(3.5)).

2. Асимптотика в области $t \rightarrow \infty$, $x/\sqrt{t} = O(1)$. Целью настоящего пункта является вычисление второго члена асимптотики при $t \rightarrow \infty$, $\chi = x/\sqrt{t} = O(1)$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1). Разность $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, где $v(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения Бюргерса (1.2), удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$w_t + \frac{\partial}{\partial x} (w(w + 2v)) - w_{xx} + (a/3)w_{xxx} + (a/3)v_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

$$w|_{t=0} = 0. \quad (2.2)$$

Проводя эвристические рассуждения так же, как в п. 1 [1], сравнивая порядки убывания различных членов в уравнении (2.1), видим, что главный член асимптотики при $t \rightarrow \infty$ функции $w(x, t)$ должен описываться следующей линейной задачей Коши:

$$f_t + 2 \frac{\partial}{\partial x} (fv) - f_{xx} + (a/3)v_{xxx} = 0, \quad f|_{t=0} = 0. \quad (2.3)$$

Чтобы избавиться от второго слагаемого в уравнении (2.3), проинтегрируем (2.3) по x и сделаем замену $\int_{-\infty}^x f(y, t) dy = g(x, t)/Z(x, t)$, получим

$$g_t - g_{xx} + (a/3)Zv_{xx} = 0, \quad g|_{t=0} = 0, \quad (2.4)$$

так как функция $Z(x, t)$ является решением уравнения теплопроводности $Z_t = Z_{xx}$ и дается формулой (1.4). Уравнение (2.4) легко проинтегрируем:

$$g(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_1} dy G(x-y, t-\tau) F(y, \tau), \quad (2.5)$$

где $F(y, t) = -\frac{a}{3}Z(y, t)v_{(2)}(y, t)$, $v_{(l)}(y, t) \equiv \frac{\partial^l v(y, t)}{\partial y^l}$, $l=0, 1, 2, \dots$

В следующей лемме вычислим асимптотику при $t \rightarrow \infty$ функции

$$f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g(x, t)}{Z(x, t)} \right) = \int_0^t d\tau \int_{R_1} dy (G_{(1)}(x-y, t-\tau) +$$

$$+ G(x-y, t-\tau)v(x, t)F(y, \tau)Z^{-1}(x, t) \quad (2.6)$$

(индекс снизу означает дифференцирование по пространственной переменной).

Л е м м а 1. Пусть $\bar{u}(x) \in W_1^2(R_1)^*$, $x\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\chi = x/\sqrt{t} \in R_1$ справедлива асимптотика

$$f(x, t) = \bar{A}(\chi)(\ln t)/t + O(\sqrt{\ln t}/t), \quad (2.7)$$

где

$$\bar{A}(\chi) = -\frac{ae^{-\chi^2/4}}{12\sqrt{\pi}H(\chi)} \left(A(\chi) - \frac{\chi}{2} \right) \int_{R_1} H(q)A^3(q) dq,$$

$$A(q) = -\frac{\partial}{\partial q} \ln H(q), \quad H(q) = e^{-U/2}(\operatorname{ch}(U/2) - \operatorname{sh}(U/2) \operatorname{Erf}(q/2)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем интеграл по τ в формуле (2.6) на три части ($t > e$):

$$\int_0^t d\tau = \int_0^1 + \int_{1/\ln t}^1 + \int_1^{t/\ln t} \equiv I_1 + I_2 + I_3. \quad (2.8)$$

Для всех $x \in R_1$ и $t > 0: 0 < c_1 < Z(x, t) < c_2$ и, кроме того, при всех $t > 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|Z_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_\infty} &\leq c(1+t)^{-l/2}, \quad \|Z_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_1} \leq c(1+t)^{(1-l)/2}, \quad l=1, 2, 3, \\ \|G_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_\infty} &\leq ct^{-(l+1)/2}, \quad \|G_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_1} \leq ct^{-l/2}, \quad l=0, 1, 2, \\ \|v_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_\infty} &\leq c(1+t)^{-(l+1)/2}, \quad \|v_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_1} \leq c(1+t)^{-l/2}, \quad l=0, 1, 2; \end{aligned} \quad (2.9)$$

здесь и всюду далее через c обозначаем различные положительные постоянные. Ввиду (2.9) первый и второй интегралы в (2.8) легко оцениваются

$$|I_1| \leq \frac{c}{t} \int_0^1 d\tau \int_{R_1} |v_{(2)}(y, \tau)| dy = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{1/\ln t}^1 d\tau \|v_{(2)}\|_{L_\infty} (\|G_{(1)}\|_{L_1} + \|v\|_{L_\infty} \|G\|_{L_1}) \leq \\ &\leq c \int_{1/\ln t}^1 d\tau \tau^{-3/2} ((t-\tau)^{-1/2} + t^{-1/2}) = O\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В интеграле I_3 проинтегрируем по частям по y :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_0^\infty dy \Lambda_y(x, y, t, \tau) \int_y^\infty F(q, \tau) dq - \\ &- \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_{-\infty}^0 dy \Lambda_y(x, y, t, \tau) \int_{-\infty}^y F(q, \tau) dq + \\ &+ \int_1^{t/\ln t} d\tau \Lambda(x, 0, t, \tau) \int_{R_1} dy F(y, \tau) dy \equiv I_4 + I_5 + I_6, \end{aligned}$$

где $\Lambda(x, y, t, \tau) = Z^{-1}(x, t) (G_{(1)}(x-y, t-\tau) + v(x, t)G(x-y, t-\tau))$. Поскольку

$$\sup_{\substack{x \in R_1, y \in R_1 \\ 1 \leq \tau \leq \frac{t}{\ln t}}} |\Lambda_y(x, y, t, \tau)| \leq ct^{-3/2}, \quad \|xZ_{(l)}(x, t)\|_{L_1(R_1)} \leq c(1+t)^{(2-l)/2}, \quad l=1, 2, 3,$$

^{*}) $W_p^l(R_1)$ — пространство Соболева функций из $L_p(R_1)$, производные до l -го порядка которых также принадлежат $L_p(R_1)$.

и поэтому $\|xv_{(2)}(x, t)\|_{L_1(R_1)} \leq c(1+t)^{-1/2}$, то для I_4 получим

$$|I_4| \leq ct^{-3/2} \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_0^\infty dy \int_y^\infty |v_{(2)}(q, \tau)| dq = O(t^{-1}). \quad (2.12)$$

Аналогично оценивается интеграл I_5 . Пользуясь равенствами $G_{(l)}(x, t - \tau) = G_{(l)}(x, t) + O(\ln^{-1}t \cdot t^{-(l+1)/2})$, $l=0, 1$, справедливыми при $1 \leq \tau \leq t/\ln t$, получим

$$I_6 = \frac{1}{H(x)} \left(G_{(1)}(x, t) + \frac{A(x)}{\sqrt{t}} G(x, t) \right) \int_1^{t/\ln t} d\tau \int_{R_1} F(y, \tau) dy + O(t^{-1}), \quad (2.13)$$

так как

$$Z_{(l)}(x, t) = t^{-l/2} \left(\frac{d^l H(x)}{dx^l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right), \quad l=0, 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Интегрирование по частям с учетом равенства $Z_{(1)} = -Zv$ в силу (2.14) дает

$$\begin{aligned} \int_{R_1} F(y, \tau) dy &= -\frac{a}{6} \int_{R_1} v^3(y, \tau) Z(y, \tau) dy = \\ &= -\frac{a}{6\tau} \int_{R_1} A^3(y) H(y) dy + O(\tau^{-3/2}). \end{aligned}$$

Поэтому из (2.13) ввиду оценок (2.10)–(2.12) приходим к асимптотике (2.7). Лемма 1 доказана.

Для остатка $\psi(x, t) = w(x, t) - f(x, t)$ из (2.1)–(2.3) получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \psi_t + 2 \frac{\partial}{\partial x} (v\psi) + \frac{\partial}{\partial x} (\psi + f)^2 - \psi_{xx} + \frac{a}{3} (\psi + f)_{xxx} &= 0, \\ \psi|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Чтобы устранить второе слагаемое в уравнении (2.15), проинтегрируем его

по x и введем новую функцию $r(x, t) = Z(x, t) \int_{-\infty}^x \psi(y, t) dy$, найдем

$$r_t - r_{xx} + Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2 + (aZ/3)(Z^{-1}(g+r))_{xxx} = 0, \quad r|_{t=0} = 0, \quad (2.16)$$

где функция $g(x, t)$ определена выше в (2.5). Оценки функции $r(x, t)$ даны в следующей лемме.

Лемма 2. Пусть $\bar{u}(x) \in W_1^2(R_1) \cap W_2^5(R_1)$, $x\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$, причем норма $\bar{u}(x)$ в этих пространствах достаточно мала.

Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеют место оценки

$$r_{(l)}(x, t) = O(t^{-1/2-l/2}), \quad l=0, 1, \quad (2.17)$$

где $r_{(l)} = \frac{\partial^l r}{\partial x^l}(x, t)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий леммы вытекают оценки ($t \geq 0$) -

$$\left\| \frac{\partial^l Z^{\pm 1}}{\partial x^l}(x, t) \right\|_{L_\infty} \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-l/2}, \quad l=1, 2, 3, \quad (2.18)$$

$$\|g_{(l)}\|_{L_2}^2 \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-1/2-l} \ln^2(1+t), \quad l=0, 1, 2, 3, \quad (2.19)$$

где $g_{(l)}(x, t) = \frac{\partial^l g(x, t)}{\partial x^l}$, величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала (она зависит от малости начальных данных $\bar{u}(x)$).

Действительно, в силу (2.10) имеем при $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \|Z_{(l)}\|_{L_\infty} &= \left\| \int_{R_1} dy G_{(l-1)}(x-y, t) \bar{u}(y) \exp\left(-\int_{-\infty}^y \bar{u}(\eta) d\eta\right) \right\|_{L_\infty} \leq \\ &\leq \|G_{(l-1)}\|_{L_\infty} \|\bar{u}\|_{L_1} \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-l/2}, \quad l=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Вторая оценка в (2.18) для Z^{-1} получается аналогично. При доказательстве оценки (2.19) достаточно рассмотреть случай $t > 1$. Представим $g_{(l)}$, $l=0, 1, 2, 3$, в виде

$$\begin{aligned} g_{(l)}(x, t) &= \int_0^{t/2} d\tau \int_{R_1} dy G_{(l)}(x-y, t-\tau) F(y, \tau) + \\ &+ \int_{t/2}^t d\tau \int_{R_1} dy G(y, t-\tau) F_{(l)}(x-y, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\begin{aligned} \|g_{(l)}\|_{L_2} &\leq \int_0^{t/2} d\tau \|G_{(l)}(\cdot, t-\tau)\|_{L_2} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_1} + \\ &+ \int_{t/2}^t d\tau \|G(\cdot, t-\tau)\|_{L_1} \|F_{(l)}(\cdot, \tau)\|_{L_2} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл в силу неравенств ($l=0, 1, 2, 3$) $\|G_{(l)}\|_{L_2} \leq ct^{-(1+2l)/4}$, $\|F(\cdot, t)\|_{L_1} \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-1}$ оценим следующим образом:

$$I_1 \leq c\varepsilon^9 \int_0^{t/2} d\tau (t-\tau)^{-(1+2l)/4} (1+\tau)^{-1} \leq c\varepsilon^9 (1+t)^{-(1+2l)/4} \ln(1+t).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся неравенствами (2.9) с учетом малости начального условия $\bar{u}(x)$: $\|Z_{(l+1)}\|_{L_\infty} \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-l/2}$, $l=0, 1, 2$, $\|Z_{(l+1)}\|_{L_2} \leq \|G_{(l)}\|_{L_2} \|\bar{u}\|_{L_1} \leq \varepsilon^9 (1+t)^{-(1+2l)/4}$, $l=0, 1, 2, 3, 4, 5$, $t \geq 1$. Так что при $l=0, 1, 2, 3$ $\|F_{(l)}(\cdot, t)\|_{L_2} \leq c\varepsilon^9 (1+t)^{-(5+2l)/4}$, и поэтому

$$I_2 \leq c\varepsilon^9 \int_{t/2}^t d\tau (1+\tau)^{-(5+2l)/4} \leq c\varepsilon^9 (1+t)^{-(1+2l)/4}.$$

Таким образом, приходим к оценке (2.19).

Докажем теперь при всех $t \geq 0$ следующие неравенства:

$$J_l(t) \equiv \int_{R_1} r_{(l)}^2(x, t) dx < \varepsilon^3 (1+t)^{-(1+2l)/2}, \quad l=0, 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

$$r_0(t) \equiv \sup_{p \in R_1} |\hat{r}(p, t)| < \varepsilon^2, \quad (2.21)$$

где $\hat{r}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} r(x, t) dx$ — преобразование Фурье функции $r(x, t)$.

Будем рассуждать от противного. Пусть $T > 0$ — первый момент времени, когда нарушается хотя бы одна из оценок (2.20), (2.21). В силу непрерывности по t на $[0, T]$ получим

$$J_{(l)}(t) \leq \varepsilon^3 (1+t)^{-l-1/2}, \quad l=0, 1, 2, 3; \quad r_0(t) \leq \varepsilon^2. \quad (2.22)$$

Умножим уравнение (2.16) на r и проинтегрируем по x по R_1 , найдем

$$J_0 + 2J_1 + \frac{2a}{3} \int_{R_1} dx r (Z^{-1}(g+r))_{(3)} Z + 2 \int_{R_1} dx r Z ((g+r)/Z)_x)^2 = 0.$$

Отсюда ввиду (2.18), (2.19) и (2.22) получим

$$J_0 + 2J_1 \leq \varepsilon^5 (1+t)^{-3/2}, \quad (2.23)$$

поскольку $\varepsilon > 0$ мало. Продифференцировав равенство (2.16) по x трижды, умножив на $r_{(3)}$ и проинтегрировав по x по R_1 , найдем

$$J_3 + 2J_4 + \frac{2a}{3} \int_{R_1} r_{(3)}(Z((g+r)/Z)_{(3)})_{(3)} dx + \\ + 2 \int_{R_1} r_{(3)}(Z(((g+r)/Z)_x)^2)_{(3)} dx = 0. \quad (2.24)$$

Слагаемые со старшими производными в интегралах в левой части равенства (2.24) с помощью интегрирования по частям оцениваются величиной J_4 , так что из (2.24) в силу (2.18), (2.19) и (2.22) найдем

$$J_3 \leq -J_4 + \varepsilon^4 (1+t)^{-9/2}, \quad (2.25)$$

опять-таки в силу малости $\varepsilon > 0$. Благодаря теореме Планшереля и неравенству (2.22) оценим интегралы J_1 и J_4 следующим образом ($l=0, 3$):

$$J_{l+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} |\hat{r}(p, t)|^2 p^{2l+2} dp > \frac{1}{2\pi} \int_{|p| \geq 2(1+t)^{-1/2}} |\hat{r}(p, t)|^2 p^{2l+2} dp \geq \\ \geq \frac{4J_l}{1+t} - \varepsilon^4 (1+t)^{-l-3/2}. \quad (2.26)$$

Подстановка (2.26) в (2.23) и (2.25) дает ($l=0, 3$) $J_l < -4J_l/(1+t) + 2\varepsilon^4(1+t)^{-l-3/2}$, откуда, интегрируя по t и учитывая неравенство $J_l \leq J_0^{1-l/3} J_3^{l/3}$ при $l=1, 2$, получим (2.20) при всех $t \in [0, T]$.

Докажем теперь (2.21). Применим преобразование Фурье к уравнению (2.16):

$$\hat{r}_t(p, t) + p^2 \hat{r}(p, t) - \frac{ia}{3} p^3 \hat{r}(p, t) + \int_{R_1} dx e^{-ipx} Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2 - \\ - \frac{ia}{3} p^3 \hat{g}(p, t) + a \int_{R_1} dx e^{-ipx} \{v(g+r)_{xx} + (v^2 + v)(g+r)_x + \\ + (vv_x + v_{xx}/3 + v^3/3)(g+r)\} = 0, \quad \hat{r}(p, 0) = 0, \quad (2.27)$$

откуда, интегрируя по t , находим

$$\hat{r}(p, t) = - \int_0^t d\tau e^{-(p^2 - (ia/3)p^3)(t-\tau)} \left(- \frac{ia}{3} p^3 \hat{g}(p, \tau) + \right. \\ \left. + \int_{R_1} dx e^{-ipx} \{Z((Z^{-1}(g+r))_x)^2 + a(v(g+r)_{xx} + (v^2 + v_x)(g+r)_x + \right. \\ \left. + (vv_x + v_{xx}/3 + v^3/3)(g+r)\} \right). \quad (2.28)$$

Учитывая оценку $|p\hat{g}(p, t)| \leq \|g_{(1)}\|_{L_1} \leq \varepsilon^9$, из (2.28), применяя в интеграле по x неравенство Коши, в силу (2.18), (2.19), (2.22) получаем оценку (2.21). Полученное противоречие доказывает оценки (2.20) и (2.21) для всех $t \geq 0$. Из оценки (2.20) и неравенства $\|r_{(l)}\|_{L_\infty} \leq (4J_l J_{l+1})^{1/2}$, $l=0, 1$, вытекают требуемые неравенства (2.17). Лемма 2 доказана.

Оценки (2.17) показывают, в частности, что

$$\psi(x, t) = O(1/t). \quad (2.29)$$

Сопоставляя (2.7) и (2.29), видим, что второй член асимптотического разложения при $t \rightarrow \infty$, $\chi = O(1)$ для решения $u(x, t)$ задачи Коши для

уравнения КдФБ определяется решением $f(x, t)$ задачи (2.3). Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\bar{u}(x) \in W_1^2(R_1) \cap W_2^5(R_1)$, $x\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$ и нормы $\|\bar{u}\|_{W_1^2}$, $\|\bar{u}\|_{W_2^5}$ и $\|x\bar{u}\|_{L_1}$ достаточно малы, а величина $U = \int_{R_1} \bar{u} dx \neq 0$.

Тогда при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\chi = x/\sqrt{t} \in R_1$ для решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения КдФБ (1.1) с начальным условием $\bar{u}(x)$ справедлива асимптотическая формула (1.7): $u(x, t) = A(\chi) (1/\sqrt{t}) + \bar{A}(\chi) \times \times \frac{\ln t}{t} + O\left(\frac{\sqrt{\ln t}}{t}\right)$, где $A(\chi) = \left(\text{sh} \frac{U}{2} / \sqrt{\pi} H(\chi)\right) e^{-\chi^2/4}$,

$$\begin{aligned} \bar{A}(\chi) &= -\frac{a(A(\chi) - \chi/2)e^{-\chi^2/4}}{12\sqrt{\pi}H(\chi)} \int_{R_1} A^3(q)H(q) dq, \quad H(q) = \\ &= e^{-U/2} (\text{ch}(U/2) - \text{sh}(U/2) \text{Erf}(q/2)). \end{aligned}$$

3. Асимптотика в области $t \rightarrow \infty$, $x/\sqrt{t} \rightarrow \infty$. В этом пункте изучим асимптотику при $t \rightarrow \infty$, $\chi = x/\sqrt{t} \rightarrow \infty$ решения $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (1.1). Будем считать для определенности, что $a > 0$ в уравнении КдФБ (этого легко можно достичь с помощью замены $u(x, t) = -\tilde{u}(-x, t)$). При больших значениях χ решение линеаризованного уравнения (1.1) сильно диспергирует и может быть найдено с помощью метода перевала. По сравнению с рассмотренным в предыдущем пункте случаем $\chi = O(1)$, когда нелинейность имела тот же порядок убывания по времени, что и линейная часть в уравнении, в случае $\chi \rightarrow \infty$ решение $u(x, t)$ обретает дополнительное убывание, приводящее к тому, что нелинейный член в уравнении КдФБ оказывается подчиненным линейной части. Поэтому асимптотика решения $u(x, t)$ имеет квазилинейный характер. Целью п. 3 является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть Фурье-образ $\hat{u}(p)$ начального условия $\bar{u}(x)$ аналитичен в области $\text{Im } p \geq -1/a$, $a > 0$, и удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{d^l \hat{u}(p)}{dp^l} \right| \leq \varepsilon M^{-8}(p) e^{b\mu(p)}, \quad l=0, 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

где $b > 0$, $0 < \varepsilon < c$, $c > 0$ — некоторая постоянная,

$$M(p) = \max(1, |p|), \quad \mu(p) = \eta^2(1 + a\eta/3), \quad \eta = \text{Im } p. \quad (3.2)$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы:

1) при $X \equiv x/t > 0$ или $-1/a < X < 0$

$$u(x, t) = \frac{e^{-\nu t}}{\sqrt{t}} \left(A(i\sigma) + \frac{1}{t} \bar{A}(i\sigma) + O\left(\frac{e^{b\mu(i\sigma)}}{t^{3/2} m^8(\sigma) m^5(1+a\sigma)}\right) \right), \quad (3.3)$$

где $\sigma = (\sqrt{1+aX} - 1)/a$, $\nu = (2/3a^2)((1+aX)^{3/2} - 1 - 3aX/2)$;

2) при $X = -1/a$

$$u(x, t) = \frac{e^{-t/3a^2}}{t^{1/3}} \left(A\left(-\frac{i}{a}\right) + t^{-1/3} \bar{A}\left(-\frac{i}{a}\right) + O(t^{-2/3} \ln t) \right); \quad (3.4)$$

3) при $X < -1/a$

$$u(x, t) = \frac{e^{-\omega t}}{\sqrt{t}} \left(\text{Re} \left(A\left(\beta - \frac{i}{a}\right) e^{i\pi/4 - 2i\alpha\beta^3 t/3} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{t} \operatorname{Re} \left(\bar{A} \left(\beta - \frac{i}{a} \right) e^{3ix/4 - 2ia\beta^2 t/3} \right) + O \left(\frac{\ln t}{t^{3/2} m^2(\beta)} \right), \quad (3.5)$$

где $\omega = -2/(3a^2) - X/a$, $\beta = (1/a)\sqrt{-1 - aX} > 0$. Коэффициенты A и \bar{A} выражаются через Фурье-образ $\hat{u}(p)$ начального условия $\bar{u}(x)$ (см. формулы (3.25), (3.26), (3.30), (3.31), (3.37) и (3.38)).

З а м е ч а н и е. Условие (3.1) теоремы означает, что начальное возмущение $u(x)$ должно достаточно быстро убывать на бесконечности и иметь некоторую гладкость (достаточно, например, потребовать, чтобы $\bar{u}(x) \in C_0^\infty(R_1)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Применив преобразование Фурье к уравнению (1.1) и проинтегрировав по t , получим

$$\hat{u}(p, t) = \hat{\bar{u}}(p) e^{-K(p)t} - ip \int_0^t d\tau e^{-K(p)(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} dq \hat{u} \left(\frac{p}{2} - q, \tau \right) \hat{u} \left(\frac{p}{2} + q, \tau \right), \quad (3.6)$$

где $K(p) = p^2 - (ia/3)p^3$. Обозначим $\hat{u}(p) = \varepsilon \bar{u}(p)$ и запишем решение

$\hat{u}(p, t)$ в виде ряда теории возмущений $\hat{u}(p, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} u^{(N)}(p, t)$, где функции $u^{(N)}(p, t)$ определяются рекуррентно ($N \geq 1$):

$$u^{(0)}(p, t) = \bar{u}(p) e^{-K(p)t}, \quad (3.7)$$

$$u^{(N)}(p, t) = -ip \int_0^t d\tau e^{-K(p)(t-\tau)} \int_{R_1} dq \sum_{j=1}^N u^{(j-1)} \left(\frac{p}{2} - q, \tau \right) \times \\ \times u^{(N-j)} \left(\frac{p}{2} + q, \tau \right). \quad (3.8)$$

Из формул (3.7) и (3.8) по индукции легко заключаем, что все функции $u^{(N)}(p, t)$ аналитичны в области $\operatorname{Im} p \geq -1/a$ при всех $N \geq 0$, ибо начальная функция $\bar{u}(p)$ является таковой по условию теоремы.

Докажем при $\operatorname{Im} p \geq -1/a$ следующие оценки:

$$|u^{(N)}(p, t)| \leq c^N h^{(N)}(p, t) (1 + |p| \theta(-1 - 2a\eta)), \quad (3.9)$$

где $h^{(N)}(p, t) = M^{-8}(p) (N+1)^{-8} \exp(\mu(p)(t+b) - t\kappa_N(p))$, $\kappa_N(p) = = p^2(N+1)^{-2} m(1+a\eta)/2$, $m(p) = \min(1, |p|)$, $M(p)$ и $\mu(p)$ определены в (3.2), $\eta = \operatorname{Im} p$, $\rho = \operatorname{Re} p$, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда. Че-

рез $c > 0$ здесь и далее обозначены различные постоянные, не зависящие от N . Заметим, что $\operatorname{Re} K(p) = p^2(1+a\eta) - \mu(p) \geq 2\kappa_0(p) - \mu(p)$, поэтому при $N=0$ оценки (3.9) следуют из условий (3.1) и (3.7). При $N \geq 1$ по индукции найдем

$$|u^{(N)}(p, t)| \leq c^{N-1} J, \quad (3.10)$$

где

$$J = |p| \int_{R_1} dq \sum_{j=1}^N (N+1-j)^{-8} j^{-8} M^{-8}(p/2-q) M^{-8}(p/2+q) \times \\ \times \exp(\mu(p/2-q)b + \mu(p/2+q)b) I, \\ I = \int_0^t d\tau \exp(-2\kappa_0(p)t + \mu(p)(t-\tau) + \mu(p/2-q)\tau) \times \\ \times \tau + \mu(p/2+q)\tau + \mathcal{L}\tau,$$

$$\mathcal{L} = 2\kappa_0(p) - \kappa_{j-1}(p/2 - q) - \kappa_{N-j}(p/2 + q).$$

При всех комплексных $p = \rho + i\eta$, $\eta \geq -1/a$ имеем

$$2\mu(p/2) \leq \mu(p) - \eta^2/4 \quad (3.11)$$

и для всех $q \in R_1$, $N \geq 1$, $1 \leq j \leq N$ $M^{-8}(p/2 - q)M^{-8}(p/2 + q) \leq 2^8 \times$
 $\times M^{-8}(p)(M^{-8}(p/2 - q) + M^{-8}(p/2 + q))$, $(N + 1 - j)^{-8}j^{-8} \leq 2^8(N +$
 $+ 1)^{-8}((N + 1 - j)^{-8} + j^{-8})$, поэтому для J найдем

$$J \leq 4^8 M^{-8}(p)(N + 1)^{-8} \sum_{j=1}^N ((N + 1 - j)^{-8} + j^{-8}) e^{\mu(p)(t+b)} \times$$

$$\times |p| \int_{R_1} dq (M^{-8}(p/2 + q) + M^{-8}(p/2 - q)) I_1, \quad (3.12)$$

где

$$I_1 = \int_0^t d\tau \exp(-2\kappa_0(p)t - \eta^2\tau/4 + \mathcal{L}\tau).$$

Для функции $\kappa_N(p)$ справедливо неравенство

$$\kappa_{j-1}(p/2 - q) + \kappa_{N-j}(p/2 + q) \geq \kappa_N(p) \quad (3.13)$$

при всех $q \in R_1$, $N \geq 1$, $1 \leq j \leq N$, $p = \rho + i\eta$, $\eta \geq -1/a$. Пользуясь (3.13), получим (см. подробнее в [1] формулу (2.18))

$$|I_1| \leq \frac{c \exp(-\kappa_N(p)t)}{\max(\kappa_0(p), \eta^2, |\mathcal{L}|)}. \quad (3.14)$$

При $\eta \geq -1/(2a)$ знаменатель в (3.14) оценим следующим образом:

$$\max(\kappa_0(p), \eta^2, |\mathcal{L}|) \geq c \max((N + 1 - j)^{-2}, j^{-2})(|p|^2 + q^2), \quad (3.15)$$

поэтому из (3.12) при $\eta \geq -1/(2a)$ найдем

$$J \leq c M^{-8}(p)(N + 1)^{-8} \exp(\mu(p)(t+b) - \kappa_N(p)t) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N ((N + 1 - j)^{-6} + j^{-6}) \int_{R_1} |p| (|p|^2 + q^2)^{-1} dq \leq ch^{(N)}(p, t). \quad (3.16)$$

Из (3.16) и (3.10) следует (3.9) при $\eta \geq -1/(2a)$ (т. е. первое слагаемое в правой части (3.9)). Второе слагаемое в оценке (3.9) возникает в области $-1/a \leq \eta \leq -1/(2a)$, поскольку знаменатель в (3.14) оценивается снизу следующим образом: $\max(\kappa_0(p), \eta^2, |\mathcal{L}|) \geq c$. Итак, оценка (3.9) установлена.

Теперь докажем оценку для производных

$$\left| e^{-\kappa(p)t} \frac{\partial^l}{\partial p^l} (u^{(N)}(p, t) e^{\kappa(p)t}) \right| \leq c^{N+1} h^{(N)}(p, t) m^{-2l}(\eta) M^{2l}(p) \times$$

$$\times (1 + |p|\theta(-1 - 2a\eta)), \quad l = 1, 2, 3, \quad \eta \geq -1/a. \quad (3.17)$$

Достаточно рассмотреть только третью производную. Проведем индукцию по $N \geq 0$. При $N = 0$ оценка (3.17) следует из (3.7) и (3.1). При $N \geq 1$ продифференцируем трижды по p равенство (3.8), после несложных вычислений получим при $p = \rho + i\eta$, $\eta \geq -1/a$

$$\left| e^{-\kappa(p)t} \frac{\partial^3}{\partial p^3} (u^{(N)}(p, t) e^{\kappa(p)t}) \right| \leq c^N \sum_{j=1}^N \int_0^t d\tau e^{-(2\kappa_0(p) - \mu(p))(t-\tau)} \times$$

$$\times \int_{R_1} dq h^{(N-j)}(p/2 + q, \tau) h^{(j-1)}(p/2 - q, \tau) [1 + |p|(M^2(p/2 - q) +$$

$$+ M^2(p/2 + q))(\tau + m^{-2}(\eta))] (M^4(p/2 - q) +$$

$$+ M^4(p/2 + q))(\tau^2 + m^{-4}(\eta)). \quad (3.18)$$

Как и выше, интеграл по τ оценим следующим образом:

$$I_2 \equiv \int_0^t d\tau \tau^l \exp(-2\kappa_0(p)t + \mathcal{L}\tau - \eta^2\tau/4) \leq c / \max(\kappa_0^{l+1}(p), \eta^{2l+2}, |\mathcal{L}|^{l+1}).$$

Для слагаемого в формуле (3.18), содержащего единицу, применим оценку $I_2 \leq cm^{-2l-2}(\eta)$, а для второго слагаемого, содержащего $|\rho|$, оценим I_2 по-другому: $I_2 \leq cm^{-2l}(\eta) (|\rho|^2 + q^2)^{-1} \max(j^{-2}, (N+1-j)^{-2})$. Используя эти неравенства и рассуждения так же, как выше (см. (3.10)–(3.16)), приходим к оценке (3.17).

Обратимся теперь к доказательству асимптотики (3.3). Решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (1.1) представим в виде ряда теории возмущений

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1} e^{ipx} \hat{u}(p, t) dp = \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Psi^{(N)}(x, t), \quad (3.19)$$

где $\Psi^{(N)}(x, t) = \int_{R_1} dp e^{ipx} u^{(N)}(p, t)$. В силу аналитичности функций

$u^{(N)}(p, t)$ в области $\text{Im } p \geq -1/a$ и доказанных оценок (3.9), можем сдвинуть контур интегрирования в интеграле $\Psi^{(N)}$ на величину $i\sigma = \frac{i}{a} (\sqrt{1+aX} - 1)$, $X = x/t \geq -1/a$ и представить $\Psi^{(N)}$ в виде ($p = \rho + i\eta$)

$$\begin{aligned} \Psi^{(N)} &= \int_{R_1} d\rho e^{i\rho x - \sigma x} u^{(N)}(\rho + i\sigma, t) = \int_{R_1} d\rho e^{i\rho x - \sigma x - K(\rho + i\sigma)t} \times \\ &\times \left\{ \sum_{l=0}^2 \frac{\rho^l}{l!} \Phi_{(l)}^{(N)}(i\sigma) + \sum_{l=0}^2 \frac{\rho^l}{l!} (Q_l - \Phi_{(l)}^{(N)}(i\sigma)) + \right. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\left. + \left(u^{(N)}(\rho + i\sigma, t) e^{K(\rho + i\sigma)t} - \sum_{l=0}^2 \frac{\rho^l}{l!} Q_l \right) \right\} \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

где $\Phi_{(l)}^{(N)}(p) = \frac{\partial^l}{\partial p^l} \Phi^{(N)}(p)$, $\Phi^{(N)}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} (u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t})$, $Q_l = \frac{\partial^l}{\partial p^l} (u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t})|_{p=i\sigma}$. Разность $u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t} - \Phi^{(N)}(p)$ представляется в виде (3.8) с интегралом по τ , взятым в пределах от t до $+\infty$. Используя оценки (3.9) и (3.17) при $l=0, 1, 2$, получим

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial p^l} (u^{(N)}(p, t) e^{K(p)t} - \Phi^{(N)}(p)) \right| \leq \frac{ce^{b\mu(p)}}{(t+1)^2 m^8(\eta)}, \quad (3.21)$$

где $\rho=0$ при $\eta > -1/a$ или $\rho \in R_1$ при $\eta = -1/a$. Благодаря определению величины σ имеем равенство $i\rho x - \sigma x - K(\rho + i\sigma)t = -vt - \rho^2(1+a\sigma)t + (ia/3)\rho^3 t$, где $v = \sigma X - \mu(i\sigma) = (2/(3a^2))((1+aX)^{3/2} - 1 - 3aX/2) > 0$.

Интеграл J_1 разобьем на две области: $|\rho| \leq 1$ и $|\rho| \geq 1$. Интеграл по второй области тривиально оценивается и имеет кроме множителя e^{-vt} дополнительное экспоненциальное убывание по времени. Интеграл по первой области дает основной вклад в асимптотику (см. [5, с. 263]), таким образом, при $X > 0$ или $-1/a < X < 0$ получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{e^{-vt}}{\sqrt{t}} \left\{ \Phi^{(N)}(i\sigma) \sqrt{\frac{\pi}{1+a\sigma}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4t\sqrt{1+a\sigma}} \left(\frac{5a^2\Phi^{(N)}(i\sigma)}{12(1+a\sigma)^3} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{ia\Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma)}{(1+a\sigma)^2} + \frac{\Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma)}{1+a\sigma} \right) + O\left(\frac{1}{t^{3/2}m^5(1+a\sigma)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Для интеграла J_2 ввиду неравенства (3.21) сразу же получим следующую оценку:

$$|J_2| \leq c^N e^{-\nu t} t^{-5/2} m^{-8}(\sigma) m^{-1/2} (1+a\sigma) e^{b\mu(i\sigma)}. \quad (3.23)$$

Далее, в силу (3.17) и так как $\operatorname{Re} K(\rho) \geq \operatorname{Re} K(r)$ при $|\operatorname{Re} \rho| \geq |\operatorname{Re} r|$, получаем при всех $\rho \in R_1$, $\rho = \rho + i\sigma$

$$\begin{aligned} & \left| e^{-K(\rho)t} \left(u^{(N)}(\rho, t) e^{K(\rho)t} - \sum_{l=0}^2 \frac{\rho^l}{l!} Q_l \right) \right| \leq \\ & \leq \rho^2 e^{-\operatorname{Re} K(\rho)t} \int_0^t dq \left| \frac{\partial^3}{\partial q^3} (u^{(N)}(q+i\sigma, t) e^{K(q+i\sigma)t}) \right| \leq \\ & \leq c^{N+1} m^3(\rho) (N+1)^{-8} m^{-6}(\sigma) \exp(\mu(i\sigma)(t+b) - \chi_N(\rho)t), \end{aligned}$$

а это дает следующую оценку для J_3 :

$$\begin{aligned} |J_3| & \leq \int_0^\infty d\rho m^3(\rho) e^{-\nu t} c^{N+1} (N+1)^{-8} m^{-6}(\sigma) \exp(\mu(i\sigma)b - \chi_N(\rho)t) \leq \\ & \leq c^N e^{-\nu t} t^{-2} m^{-6}(\sigma) m^{-4} (1+a\sigma) e^{b\mu(i\sigma)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из формул (3.19)–(3.24) получаем асимптотику (3.3). Величины A и \bar{A} равны:

$$A(i\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1+a\sigma)} \sum_{N=0}^\infty \varepsilon^{N+1} \Phi^{(N)}(i\sigma), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}(i\sigma) & = \frac{1}{8\sqrt{\pi}(1+a\sigma)^{3/2}} \sum_{N=0}^\infty \varepsilon^{N+1} \left(\frac{5a^2 \Phi^{(N)}(i\sigma)}{12(1+a\sigma)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{ia}{1+a\sigma} \Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma) + \Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Значения A и \bar{A} вещественны, поскольку ввиду действительности решения $u(x, t)$ величины $\Phi^{(N)}(i\sigma)$ и $\Phi_{(2)}^{(N)}(i\sigma)$ также вещественны, а $\Phi_{(1)}^{(N)}(i\sigma)$ — чисто мнимая величина. Функции $\Phi^{(N)}(i\sigma)$ могут быть вычислены из рекуррентных соотношений (3.7) и (3.8) с помощью диаграммной техники, как в работе [6].

Рассмотрим второй случай $\chi = -1/a$. Воспользуемся представлением (3.20) с суммами по l от 0 до 1. Теперь $\sigma = -1/a$, $\nu = 1/(3a^2)$. Интеграл J_1 непосредственно вычисляется с помощью замены $(at)^{1/3} \rho = z$ (см. [7, с. 60]):

$$\begin{aligned} J_1 & = e^{-t/3a^2} \int_{R_1} d\rho e^{i a \rho^3 t/3} \left(\Phi^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right) + \rho \Phi_{(1)}^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right) \right) = \\ & = (at)^{-1/3} e^{-t/3a^2} (3^{-1/6} \Gamma(1/3) \Phi^{(N)}(-i/a) + \\ & + (i \cdot 3^{1/6} / (at)^{1/3}) \Gamma(2/3) \Phi_{(1)}^{(N)}(-i/a)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Интеграл J_2 вычислим так же, как интеграл J_1 , и воспользуемся оценкой (3.21), получим

$$J_2 \leq c^N t^{-2} e^{-t/3a^2}. \quad (3.28)$$

В интеграле J_3 , воспользовавшись тождеством $e^{i a \rho^3 t/3} d\rho = \frac{1}{i a \rho^2 t} d(e^{i a \rho^3 t/3})$ —

— 1), проинтегрируем по ρ по частям, найдем, что

$$J_3 = e^{-t/3a^2} \int_{R_1} d\rho (e^{iap^3t/3} - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{ia\rho^2 t} \left(u^{(N)}(\rho + i\sigma, t) e^{K(\rho + i\sigma)t} - \sum_{l=0}^1 \frac{\rho^l}{l!} Q_l \right) \right).$$

Отсюда ввиду оценки (3.17) получим

$$|J_3| \leq c^N e^{-t/3a^2} \int_{R_1} d\rho \frac{1}{\rho t} |e^{iap^3t/3} - 1| e^{b u(-i/a)} M^{-1}(\rho) = c^N O(t^{-1} \ln t). \quad (3.29)$$

Из (3.27) — (3.29) приходим к асимптотике (3.4). Величины A и \tilde{A} имеют вид

$$A\left(-\frac{i}{a}\right) = \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi \cdot 3^{1/6} a^{1/3}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Phi^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right), \quad (3.30)$$

$$\tilde{A}\left(-\frac{i}{a}\right) = \frac{i \cdot 3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\pi a^{2/3}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Phi_{(1)}^{(N)}\left(-\frac{i}{a}\right). \quad (3.31)$$

Наконец, рассмотрим оставшийся случай $X < -1/a$. Снова сдвинем контур интегрирования в формуле (3.19) на величину $i\sigma = -i/a$ и представим интегралы $\Psi^{(N)}$ ввиду вещественности решения $u(x, t)$ следующим образом ($\varphi(\rho) \in C_0^\infty(R_1) : \varphi(\rho) = 1$ при $|\rho| - \beta \leq \beta/3$ и $\varphi(\rho) = 0$ при $|\rho| - \beta > 2\beta/3$):

$$\begin{aligned} \Psi^{(N)} &= 2e^{-\omega t} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} d\rho \varphi(\rho) e^{(ia/3)\rho(\rho^2 - 3\beta^2)} \left(\sum_{l=0}^2 \frac{(\rho - \beta)^l}{l!} \Phi_{(l)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{a} \right) + \sum_{l=0}^2 \frac{(\rho - \beta)^l}{l!} \left(\tilde{Q}_l - \Phi_{(l)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(u^{(N)}\left(\rho - \frac{i}{a}, t\right) e^{K(\rho - i/a)t} - \sum_{l=0}^2 \frac{(\rho - \beta)^l}{l!} \tilde{Q}_l \right) \right\} + \\ &+ e^{-\omega t} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho (1 - \varphi(\rho)) e^{(ia/3)\rho(\rho^2 - 3\beta^2) + K(\rho - i/a)t} u^{(N)}\left(\rho - \frac{i}{a}, t\right) \equiv \\ &\equiv J_4 + J_5 + J_6 + J_7, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $\tilde{Q}_l = \frac{\partial^l}{\partial \rho^l} (u^{(N)}(\rho, t) e^{K(\rho)t})|_{\rho = \beta - i/a}$, $l = 0, 1, 2$. Здесь мы воспользовались тождеством $i\rho x + x/a - K(\rho - i/a)t = -\omega t + (iat/3)\rho(\rho^2 - 3\beta^2)$, $\omega = -X/a - 2/(3a^2) > 0$, $\beta = (1/a)\sqrt{-1 - aX} > 0$.

Асимптотику интеграла J_4 вычислим с помощью метода стационарной фазы (см. [5, с. 163]):

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a\beta t}} e^{-\omega t} \operatorname{Re} \left\{ e^{-(i2a/3)t\beta^3 + i\pi/4} \left(\Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) + \right. \right. \\ &+ \frac{i}{4a\beta t} \left(\frac{5}{12\beta^2} \Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) - \frac{1}{\beta} \Phi_{(1)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \Phi_{(2)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) \right) \right\} + c^N O(e^{-\omega t} t^{-2} m^{-2}(\beta)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Интеграл J_5 , как и выше, оценим с помощью неравенства (3.21):

$$|J_5| \leq c^N e^{-\omega t} t^{-2} m^{-2}(\beta). \quad (3.34)$$

В интеграле J_6 проинтегрируем по ρ дважды по частям:

$$J_6 = 2e^{-\omega t} \operatorname{Re} \left\{ e^{-(i2a/3)t\beta^3} \int_0^\infty d\rho (e^{(ia/3)t(\rho-\beta)^3} - 1) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{iat(\rho^2 - \beta^2)} \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Phi(\rho)}{iat(\rho^2 - \beta^2)} \left(u^{(N)} \left(\rho - \frac{i}{a}, t \right) e^{K(\rho - i/a)t} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \sum_{l=0}^2 \frac{(\rho - \beta)^l}{l!} \tilde{Q}_l \right) \right) \right\}.$$

Отсюда, учитывая оценку для производной (3.17), получим

$$|J_6| \leq \frac{c^N e^{-\omega t}}{t^2} \int_0^{2\beta} d\rho \frac{|e^{(ia/3)t(\rho-\beta)^3} - 1|}{|\rho - \beta|\beta^2} = c^N O\left(\frac{e^{-\omega t} \ln t}{t^2 m^2(\beta)}\right). \quad (3.35)$$

Интеграл J_7 тривиально оценивается с помощью интегрирования по частям:

$$|J_7| \leq c^N e^{-\omega t} t^{-2} m^{-2}(\beta). \quad (3.36)$$

Из (3.33)–(3.36) получаем асимптотику (3.5). Величины A и \tilde{A} равны

$$A\left(\beta - \frac{i}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \beta}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right), \\ \tilde{A}\left(\beta - \frac{u}{a}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}(a\beta)^{3/2}} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{N+1} \left(\frac{5}{12\beta^2} \Phi^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta} \Phi_{(1)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) + \Phi_{(2)}^{(N)}\left(\beta - \frac{i}{a}\right) \right).$$

Теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–131).

Литература

1. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 873–881.
2. Amick C. J., Vona J. L., Schonbek M. E. // J. Diff. Equat. 1989. Vol. 81, N 1. P. 1–49.
3. Biler P. // Bull. Polish. Acad. Sci. 1984. Vol. 32. P. 275–280.
4. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 290–293.
5. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М., 1987.
6. Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 3. С. 75–88.
7. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М., 1990.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
24 января 1994 г.