Т.А.Суслина

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КОЛЕБАНИЯМИ ЖИДКОСТЕЙ

В [I] (см.также [2, 3]) Н.Д.Копачевский сформулировал ряд задач о спектре нормальных колебаний для некоторых физических моделей жидкостей и из эвристических соображений указал асимптотические формулы спектра в поставленных задачах. В настоящей работе оправданы асимптотические формулы спектра во всех задачах из [I] , которые еще не были решены. Предварительно обсуждается одна задача общего характера. Подробное изложение большей части данных результатов имеется в [4] . Постановки даны в [I] в виде краевых задач на собственные значения и в виде вариационных задач о спектре отношения форм. Характерными являются два обстоятельства : I) наличие "эллиптической"связи, 2) негладкость области. Для оправдания асимптотических формул применяется метод исследования негладких вариационных задач, разработанной М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком в [5] , и техника псевдодифференциальных операторов, позволяющая изучать вариационные задачи с эллиптическими связями в гладкой ситуации (см. [6]).

I. "Нелокальная" задача типа Стеклова. Через H^s обозначаются пространства С.Л.Соболева; $\mathcal{K}$ - класс областей, удовлетворяющих условиям обычных теорем вложения и продолжения (для $\Omega\in\mathcal{K}$ достаточно липшицевости $\partial\Omega$). Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^{m+1}$ - ограниченная область. Предполагается выполненным

УСЛОВИЕ I. $\Omega\in\mathcal{K}$; граница $\partial\Omega$ содержит гладкую m - мерную поверхность Γ с гладким $(m-1)$ -мерным краем γ .

Через $n(x)$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x\in\Gamma$. Пусть в Ω задана форма $A[u]$ с гладкими вещественными коэффициентами

$$A[u]=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{m+1} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\bar u}{\partial x_j}+c(x)|u|^2\right)dx. \quad (I)$$

Матрица $a(x)=\{a_{ij}(x)\}$ равномерно положительна в $\bar\Omega$, $c(x)>0$. Далее, пусть $q>0$ - целое число, B_Γ - скалярное сильно эллиптическое дифференциальное выражение на Γ порядка $2q$, $T_1,\dots,T_q$ - дифференциальные операторы следа, действующие "с Γ на γ ", $\operatorname{ord} T_j\leqslant 2q-1$. Коэффициенты операторов B_Γ и T_j, $1\leqslant j\leqslant q$, бесконечно гладкие. Для $B_\Gamma, T_1,\dots,T_q$

предполагается выполненным условие Шапиро-Лопатинского. Через $\mathbb{B}_\Gamma$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением B_Γ на области определения $\mathcal{D}(\mathbb{B}_\Gamma)=\{u\in H^{2q}(\Gamma): T_j u=0 \text{ (на } \gamma\text{)},\ j=1,\dots,q\}$. Предположим, что $\mathbb{B}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Тогда на $L_2(\Gamma)$ определен компактный оператор $\mathbb{B}_\Gamma^{-1}$. Пусть $B(x,\xi)$, $x\in\Gamma$, $\xi\perp n(x)$, – главный символ выражения B_Γ;

$$M(x,\xi)\overset{\text{def}}{=}\left[(a(x)\xi\cdot\xi)(a(x)n(x)\cdot n(x))-(a(x)\xi\cdot n(x))^2\right]^{1/2}.$$

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma b(y)(\mathbb{B}_\Gamma^{-1}u)\bar{u}\,dS(y)}{A[u]},\quad u\in H^1(\Omega), \tag{2}$$

где вещественнозначная функция $b\in L_r(\Gamma)$, а число r удовлетворяет условиям: $r>1$ при $m=1$, $r^{-1}=1/2+1/2m$ при $1<m<4q+1$, $r^{-1}<1/2+1/2m$ при $m=4q+1$, $r=m(2q+1)^{-1}$ при $m>4q+1$. Отметим, что экстремали отношения (2) автоматически удовлетворяют однородному эллиптическому уравнению $Lu=0$ (в Ω), где оператор L отвечает форме A.

Через $\lambda_n^{\pm}(2)$ обозначаются последовательные максимумы отношения (2), а через $N_\pm(\lambda,(2))=\operatorname{card}\{n:\lambda_n^{\pm}(2)>\lambda\}$ – функции распределения спектра. Ниже используются аналогичные обозначения и для других вариационных отношений. Если отрицательного спектра нет, то пишем просто $N(\lambda,(\cdot))\equiv N_+(\lambda,(\cdot))$.

ТЕОРЕМА I. Справедлива асимптотика

$$N_\pm(\lambda,(2))\underset{\lambda\to+0}{\sim}\frac{(2\pi)^{-m}}{m}\lambda^{-\theta}\int_\Gamma dS(x)\int_{\xi\perp n(x),\,|\xi|=1}d\xi\,R_\pm(x,\xi), \tag{3}$$

где $\theta=m(2q+1)^{-1}$, $R_\pm(x,\xi)\overset{\text{def}}{=}(b_\pm(x)B^{-1}(x,\xi)M^{-1}(x,\xi))^{\theta}$, $2b_\pm(x)\overset{\text{def}}{=}b(x)\pm|b(x)|$.

2. <u>Применения теоремы I к задачам о колебаниях жидкостей.</u>

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию I. Пусть P – ортопроектор в $L_2(\Gamma)$ на $\hat{L}_2(\Gamma)=L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$; Δ_Γ – оператор Лапласа-Бельтрами на Γ, $\sigma>0$ – постоянная; $a\in C^\infty(\bar{\Gamma})$, $\varkappa\in C^\infty(\gamma)$ – вещественнозначные функции. Через $\mathcal{B}_\Gamma$ обозначим самосопряженный оператор в $\hat{L}_2(\Gamma)$, заданный выражением $P(-\sigma\Delta_\Gamma+a)$

на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{B}_\Gamma)=\{u\in H^2(\Gamma): \partial u/\partial l+\chi u=0$ (на γ), $\int_\Gamma u\,dS=0\}$. Здесь $\partial/\partial l$ – производная по нормали к γ. Предполагается, что $\mathcal{B}_\Gamma$ положительно определен. Тогда оператор $\mathcal{B}_\Gamma^{-1}$ компактен в $\hat{L}_2(\Gamma)$.

Задача о спектре нормальных колебаний капиллярной идеальной (либо капиллярной стратифицированной) жидкости сводится (см. [I], [2]) к задаче о спектре вариационного отношения

$$\frac{\int_\Gamma(\mathcal{B}_\Gamma^{-1}u)\,\bar{u}\,dS}{\int_\Omega \rho^{-1}(x)\,|\nabla u|^2dx}\,,\quad u\in H^1(\Omega),\quad \int_\Gamma u\,dS=0. \tag{4}$$

Здесь $\rho\in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\rho(x)>0$; для идеальной жидкости $\rho(x)=Const$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Справедлива асимптотика

$$N(\lambda,(4))\underset{\lambda\to 0}{\sim}\lambda^{-2/3}(4\pi)^{-1}\sigma^{-2/3}\int_\Gamma \rho^{2/3}(x)\,dS(x). \tag{5}$$

Теорема I находит применение и в теории гидроупругости. Пусть Δ_Γ^2 – бигармонический оператор на Γ; D, $\rho>0$ – постоянные. Через $\hat{\mathcal{B}}_\Gamma$ обозначим оператор в $\hat{L}_2(\Gamma)$, заданный выражением $\rho D\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2$ на области определения $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{B}}_\Gamma)=H^4(\Gamma)\cap\overset{\circ}{H}{}^2(\Gamma)\cap\hat{L}_2(\Gamma)$. Оператор $\hat{\mathcal{B}}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Оператор $\hat{\mathcal{B}}_\Gamma^{-1}$ компактен. В теории гидроупругости возникает задача о спектре отношения

$$\Big(\int_\Gamma(\hat{\mathcal{B}}_\Gamma^{-1}u)\,\bar{u}\,dS\Big)\Big/\Big(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\Big),\quad u\in H^1(\Omega),\quad \int_\Gamma u\,dS=0. \tag{6}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Справедлива асимптотика

$$N(\lambda,(6))\underset{\lambda\to 0}{\sim}\lambda^{-2/5}(4\pi)^{-1}\rho^{2/5}D^{-2/5}\,mes\,\Gamma \tag{7}$$

3. Задача, связанная с колебаниями тяжелой вязкой жидкости.

Задачи для вязкой жидкости формулируются для вектор-функции $u(x)$ (u – ковариантный вектор) и скалярной функции $p(x)$. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – ограниченная область и выполнено

УСЛОВИЕ 2. $\Omega\in\mathcal{K}$; граница $\partial\Omega$ содержит гладкую двумерную поверхность Γ с липшицевой границей $\gamma=\partial\Gamma$. (В отличие от условия I, не предполагается гладкости γ).

Обозначим $S=\partial\Omega\setminus\bar{\Gamma}$. Пусть u_n – нормальная компонента u на Γ, τ – тензор напряжений в жидкости. В декартовых координатах $\tau_{(ik)}=-p\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$. Обозначим

$\tau_{(i)n}(x)=\sum_{k=1}^{3}\tau_{(ik)}(x)n_k(x)$, $i=1,2,3$, $x\in\Gamma$; $\tau_{tn}(x)$ – касательная составляющая поля $\{\tau_{(i)n}\}_{i=1,2,3}$ на Γ; $\tau_{nn}(x)=\sum_{i,k=1}^{3}\tau_{(ik)}(x)n_i(x)n_k(x)$ – нормальная компонента поля $\{\tau_{(i)n}\}$.

В Ω определим квадратичную форму

$$E[u]=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

В теории колебаний тяжелой вязкой жидкости возникает (см. [I], [3]) задача о спектре вариационного отношения

$$\pm\frac{\int_{\Gamma}a(x)|u_n|^2 dS}{\mu E[u]},\quad u\in H^1(\Omega),\ \operatorname{div}u=0,\ u|_S=0, \tag{8}$$

где $\mu>0$ – постоянная, $a\in L_2(\Gamma)$ – вещественнозначная функция. Отметим, что экстремали отношения (8) автоматически удовлетворяют условиям: а) $-\mu\Delta u+\nabla p=0$ для некоторого $p\in L_2(\Omega)$, б) $\tau_{tn}=0$ (на Γ).

ТЕОРЕМА 2. Справедлива асимптотика

$$N_{\pm}(\lambda,(8))\underset{\lambda\to+0}{\sim}\lambda^{-2}(16\pi)^{-1}\mu^{-2}\int_{\Gamma}a_{\pm}^2(x)\,dS(x) \tag{9}$$

4. <u>Задача, связанная с колебаниями капиллярной вязкой жидкости</u>. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega=\overline{\Gamma}\cup\overline{S}$, где Γ и S – гладкие двумерные поверхности, при пересечении образующие гладкое одномерное ребро γ, причем угол при ребре больше нуля и меньше 2π.

С колебаниями капиллярной вязкой жидкости связана (см. [I], [2]) следующая краевая задача:

$$\left.\begin{aligned}&-\mu\Delta u+\nabla p=0,\ \operatorname{div}u=0\quad(\text{в }\Omega),\\&u=0\quad(\text{на }S),\ \tau_{tn}(u)=0\quad(\text{на }\Gamma),\\&(-\sigma\Delta_{\Gamma}+a(x))u_n=-\lambda^{-1}(\tau_{nn}+c_{\tau})\quad(\text{на }\Gamma),\\&u_n=0\quad(\text{на }\gamma).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь μ, $\sigma>0$ – постоянные, $a\in C^{\infty}(\overline{\Gamma})$ – вещественнозначная функция. Постоянная c_{τ} ищется вместе с решением.

Через B_{Γ} обозначим оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выра-

жением $(-\sigma\Delta_\Gamma + a)$ на области определения $\mathcal{D}(\mathbb{B}_\Gamma) = H^2(\Gamma) \cap \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Gamma)$. Оператор $\mathbb{B}_\Gamma$ самосопряжен. Предполагается, что $\mathbb{B}_\Gamma$ положительно определен на $\mathcal{D}(\mathbb{B}_\Gamma) \cap \hat{L}_2(\Gamma)$. Следовательно, $\dim Z_B \leqslant 1$, где $Z_B \overset{def}{=} \operatorname{Ker} \mathbb{B}_\Gamma = \operatorname{Coker} \mathbb{B}_\Gamma$. Через z_1 обозначим базисный вектор в Z_B. На $L_2(\Gamma) \ominus Z_B$ определен компактный оператор $\mathbb{B}_\Gamma^{-1}$.

Положим $\mathcal{H} = \{\{u, p\} \mid u \in H^1(\Omega),\ p \in L_2(\Omega)/\{1\},\ \operatorname{div} u = 0,\ -\mu\Delta u + \nabla p = 0,\ u|_S = 0\}$. (Равенство $-\mu\Delta u + \nabla p = 0$ понимается в смысле теории распределений.) Форма $E[u]$ определяет в $\mathcal{H}$ норму, эквивалентную норме в $H^1(\Omega) \times (L_2(\Omega)/\{1\})$. Через $H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} = \iint_{\Gamma\Gamma} dS(x)\, dS(y)\, \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^3} + \int_\Gamma dS(x)\, \frac{|\varphi(x)|^2}{\varrho(x)},$$

где $\varrho(x)$ – расстояние на Γ до ребра γ. Пусть $(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$ – негативное пространство, построенное по позитивному $H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ и нулевому $L_2(\Gamma)$. Далее, по функции $z \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $\int_\Gamma \bar{z}\, dS \neq 0$, определим проектор P_z в $L_2(\Gamma)$ по формуле

$$(P_z f)(x) = f(x) - \left(\int_\Gamma f(y)\bar{z}(y)\, dS(y)\right) \Big/ \left(\int_\Gamma \bar{z}\, dS\right), \quad x \in \Gamma.$$

Можно показать, что для $\{u, p\} \in \mathcal{H}$ справедливы неравенства

$$\|\tau_{tn}(u)\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|P_z \tau_{nn}(u, p)\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant c_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{12}$$

Неравенство (11) показывает, что условие $\tau_{tn}(u) = 0$ выделяет в $\mathcal{H}$ замкнутое подпространство $\mathcal{H}^\tau$. Рассмотрим отношение

$$\pm \frac{\operatorname{Re} \int_\Gamma b(y)(\mathbb{B}_\Gamma^{-1} P_z \tau_{nn})\overline{P_z \tau_{nn}}\, dS(y)}{\mu E[u]}, \quad \{u, p\} \in \mathcal{H}^\tau, \tag{13}$$

$$\int_\Gamma (P_z \tau_{nn})\bar{z}_1\, dS = 0,$$

где $b \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ – вещественнозначная функция.

Оказывается, что задаче (I0) отвечает вариационное отношение вида (I3) при $b(y)\equiv 1$ и специальном выборе функции z. Неравенство (I2) вместе с теоремой о гомеоморфизмах для B_Γ^{-1} показывает, что форма в числителе (I3) компактна в $\mathcal{H}^\tau$. Отметим, что в случае постановки на γ третьего краевого условия (такой вариант обсуждался в [2]), форма в числителе (I3) даже не будет ограничена в $\mathcal{H}^\tau$.

ТЕОРЕМА 3. Справедлива асимптотика

$$N_\pm(\lambda,(13)) \underset{\lambda\to+0}{\sim} \lambda^{-2}\mu^2\pi^{-1}\sigma^{-2}\int_\Gamma b_\pm^2(x)\,dS(x). \qquad (I4)$$

СЛЕДСТВИЕ. Справедлива асимптотика

$$N(\lambda,(10)) \underset{\lambda\to+0}{\sim} \lambda^{-2}\mu^2\pi^{-1}\sigma^{-2}\,mes\,\Gamma. \qquad (I5)$$

Отметим, что результаты работы допускают обобщение на случай колебаний системы несмешивающихся жидкостей.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю М.Ш.Бирману. Автор благодарен также Н.Д.Копачевскому за внимание к работе.

Литература

I. Копачевский Н.Д. Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения. - Дисс. на соиск.уч.ст.доктора ф.-м.н. Спец.0I.02.05. Харьков, ФТИНТ АН УССР, I979, 3I2 с.

2. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. М., "Наука", I976, 504 с.

3. Копачевский Н.Д. Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. Докл.АН УССР, I978, сер. А, № 7, с.586-590.

4. Суслина Т.А. Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей. - Деп. в ВИНИТИ, I985, № 8058-В, 79 с.

5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. - В кн.: Десятая мат. школа. Киев, I974, с.5-I89.

6. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений. Сиб. мат.ж., I979, 20, № I, с.3-22.

Suslina T.A. On the asymptotics of the spectrum for some problems, connected with oscillations of liquids.

The main term of the asymptotics of the spectrum in some problems of the theory of small oscillations of liquid, partly filling a vessel, is obtained, at first one problem of the general character is discussed - "the unlocal problem of Steklov's type". Considered problems are connected with oscillations of capillary ideal (or capillary stratified) liquid, heavy viscous liquid, capillary viscous liquid; with oscillations of a liquid in a vessel with resilien bottom.