С. С. Марченков, Инварианты классов Поста, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1385–1404

Инварианты классов Поста*

С. С. МАРЧЕНКОВ
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

УДК 519.716

Ключевые слова: булева функция, класс Поста, инвариант класса.

Аннотация

Для каждого класса Поста, содержащего тождественную функцию, описывается множество всех его инвариантов — отношений, сохраняемых всеми функциями данного класса.

Abstract

S. S. Marchenkov, The invariants of Post classes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1385–1404.

For every Post class containing the identical function the set of all its invariats (the relations which are preserved by all functions of the class) is described.

Классы Поста [1, 2] (замкнутые классы булевых функций) представляют собой один из основных объектов исследовний по булевым функциям. Классы Поста достаточно хорошо изучены и с функциональной, и со сложностной точек зрения. При исследовании классов Поста основное внимание уделяется таким характеристикам как число функций, зависящих от n переменных, порождающие системы и базисы, формульные и схемные представления через функции базиса и оценка сложности таких представлений, тождественные соотношения, разложение произвольных булевых функций с использованием функций данного класса и т. п. Существенно реже исследования касаются способов задания классов Поста, отличных от формульных и схемных. Между тем, хорошо формализуемое определение классов Поста значительно облегчает работу с классами, позволяет глубже понять структуру булевых функций и дает возможность широко использовать современный алгебро-логический аппарат.

В настоящее время наибольшее распространение получило определение классов Поста, приведённое в [3] (ниже мы воспроизводим это определение с небольшими изменениями). В основе этого определения лежит несколько свойств, и каждый класс Поста совпадает с множеством всех булевых функций, обладающих некоторыми из этих свойств. При более формальном подходе каждое свойство может быть задано в виде отношения (предиката), а

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95–01–01625).

класс всех функций, обладающих набором свойств, будет совпадать с классом всех функций, сохраняющих соответствующий набор отношений [4]. Эта идея имеет далеко идущие обобщения в виде теории Галуа для алгебр Поста [5]. Согласно одному из следствий этой теории существует антиизоморфизм между решеткой классов Поста, содержащих тождественную функцию, и решеткой Галуа-замкнутых классов отношений. Если классу Поста Q в силу этого антиизоморфизма отвечает класс отношений R, то R состоит в точности из всех отношений, которые сохраняются всеми функциями из Q. Отношения из R называются инвариантами класса Q. Содержательно говоря, инварианты класса Q — это все те свойства, которыми обладают функции из Q. С этой точки зрения представляется естественным определить для каждого класса Поста множество всех его инвариантов. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

Известно [6,7], что всякий класс Поста, содержащий тождественную функцию и отличный от классов F_1^∞–F_8^∞, является предикатноописуемым, т. е. может быть определен единственным отношением (предикатом). В [6] указаны примеры соответствующих отношений, в [8] этот вопрос проработан более детально. Как в [6], так и в [8] основные рассуждения проводятся на языке матриц. При этом несколько в стороне оказываются те центральные свойства булевых функций, которые по существу определяют классификацию Поста. Из определения классов Поста и диаграммы включений для них, приведенных в [3], нетрудно вывести, что такими свойствами являются сохранение нуля и единицы, монотонность, самодвойственность, линейность, «конъюнктивность», «дизъюнктивность» и «существенная одноместность», а также две бесконечные серии свойств, которые в [3] обозначены через $\langle a^m \rangle$ и $\langle A^m \rangle$, $m = 2, 3 \ldots$ Техническое оформление этого факта дает возможность охарактеризовать множество инвариантов каждого класса Поста.

Напомним некоторые понятия, относящиеся к булевым функциям. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. *Булевыми функциями* называются функции на E_2, т. е. функции вида $f\colon E_2^n \to E_2$, где $n = 1, 2, \ldots$ Понятия существенной зависимости функции от переменной, фиктивной переменной, суперпозиции функций, двойственности, замыкания, замкнутого класса и базиса замкнутого класса предполагаются известными [3]. Две функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных. Для любых n, $n \geqslant 1$, и i, $1 \leqslant i \leqslant n$, функцию $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, равную x_i, называют *селекторной функцией*. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет* 0 (1), если $f(0, \ldots, 0) = 0$ (соответственно $f(1, \ldots, 1) = 1$). Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ из соотношений $a_1 \leqslant b_1$, $\ldots$, $a_n \leqslant b_n$ следует, что $f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, где через $\bar{x}$ обозначается отрицание x. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E_2$ и сложение рассматривается по модулю 2. Говорят, что функция f удовлетворяет условию $\langle a^m \rangle$ $(m = 2, 3, \ldots)$, если любые m наборов, на которых f обращается в нуль, имеют общую нулевую компоненту. Функция f удовлетворяет условию $\langle a^\infty \rangle$, если все наборы, на которых f равна нулю, имеют общую нулевую компоненту. Определение «функция f удовлетворяет условию $\langle A^m \rangle$ $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$» получается из предыдущего заменой 0 на 1.

Следуя [3], дадим определение всем классам Поста, содержащим тождественную функцию x (т. е. содержащим все селекторные функции).

C_1 — все булевы функции; C_2 — все функции, сохраняющие 1; C_3 — все функции, сохраняющие 0; C_4 — все функции, сохраняющие 0 и 1.

A_1 — все монотонные функции; A_2 — все монотонные функции, сохраняющие 1; A_3 — все монотонные функции, сохраняющие 0; A_4 — все монотонные функции, сохраняющие 0 и 1.

D_1 — все самодвойственные функции, сохраняющие 0; D_2 — все самодвойственные монотонные функции; D_3 — все самодвойственные функции.

L_1 — все линейные функции; L_2 — все линейные функции, сохраняющие 1; L_3 — все линейные функции, сохраняющие 0; L_4 — все самодвойственные линейные функции, сохраняющие 0; L_5 — все самодвойственные линейные функции.

S_1 — все дизъюнкции (т. е. все функции, равные функциям вида $x_1 \vee \ldots \vee x_n$, где $n = 1, 2, \ldots$); S_3 — все дизъюнкции и все функции, равные 1; S_5 — все дизъюнкции и все функции, равные 0; S_6 — все дизъюнкции и все функции, равные 0 или 1.

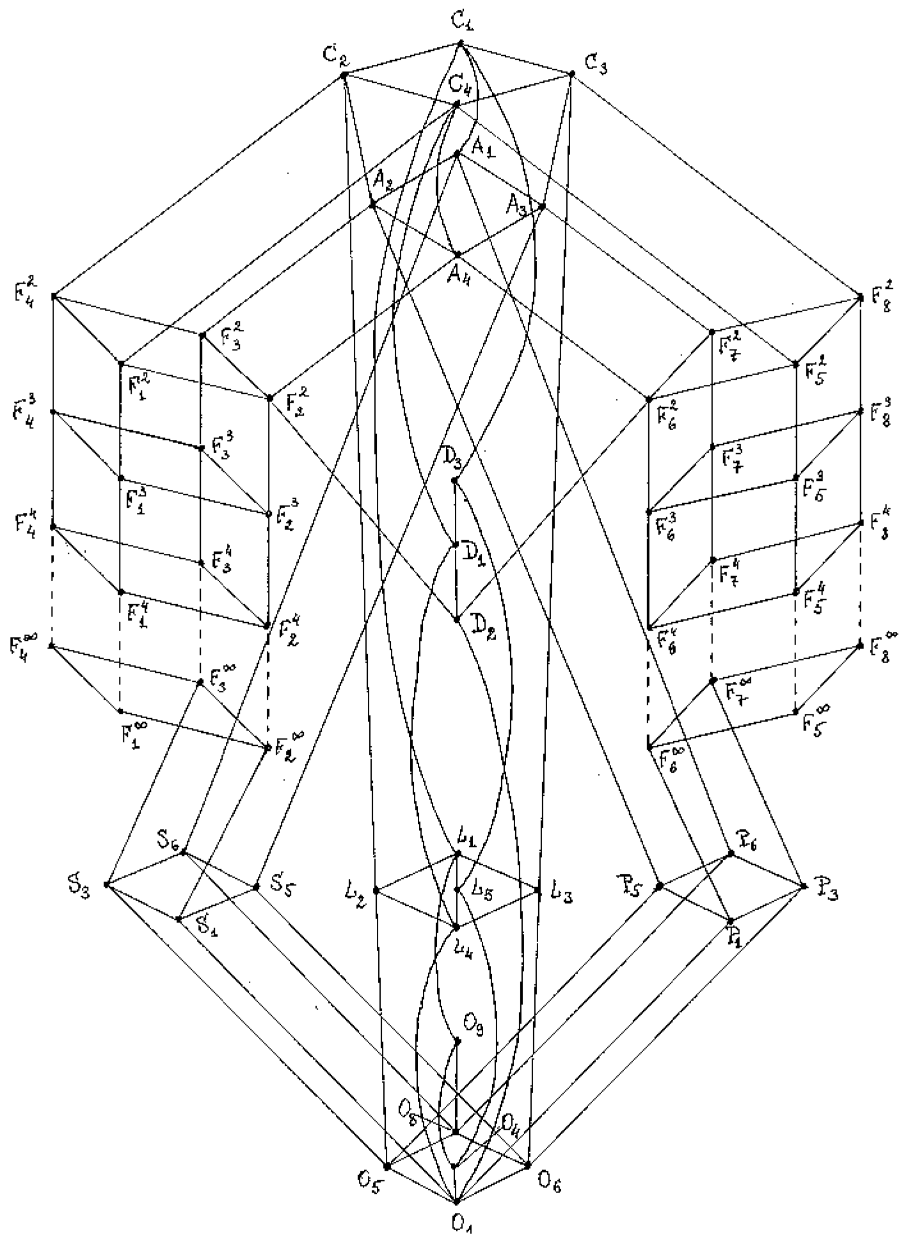
P_1 — все конъюнкции (т. е. все функции, равные функциям вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, где $n = 1, 2, \ldots$); P_3 — все конъюнкции и все функции, равные 0; P_5 — все конъюнкции и все функции, равные 1; P_6 — все конъюнкции и все функции, равные 0 или 1.

O_1 — все функции, равные функции x; O_4 — все функции, равные функциям x или $\bar{x}$; O_5 — все функции, равные функциям 1 или x; O_6 — все функции, равные функциям 0 или x; O_8 — все функции, равные функциям 0, 1 или x; O_9 — все функции, равные функциям 0, 1, x или $\bar{x}$.

F_1^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle a^m \rangle$ и сохраняющие 0; F_2^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle a^m \rangle$ и сохраняющие 0; F_3^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle a^m \rangle$; F_4^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle a^m \rangle$.

F_5^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^m \rangle$ и сохраняющие 1; F_6^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^m \rangle$ и сохраняющие 1; F_7^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^m \rangle$; F_8^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^m \rangle$.

Отношениями называем истинностные функции на E_2, т. е. функции вида $\varrho\colon E_2^m \to \{И, Л\}$. Отношение $\varrho(x_1, \ldots, x_m)$ отождествляем с множеством всех тех наборов из E_2^m, на которых оно истинно. В связи с этим применяем



выражения: набор $(a_1, \ldots, a_m)$ принадлежит отношению ϱ, отношение ϱ полно (тождественно истинно), отношение ϱ пусто (тождественно ложно). Множество всех отношений обозначаем через Π.

Пусть ε — отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$. *Диагональю*, соответствующей отношению ε, называется такое отношение $\varrho(x_1, \dots, x_m)$ из Π, что

$$(a_1, \dots, a_m) \in \varrho \equiv ((i, j) \in \varepsilon \Rightarrow a_i = a_j).$$

Пустое отношение удобно причислять к диагоналям.

На множестве Π определим несколько операций (см. также [5]). Если $\varrho(x_1, \dots, x_m), \sigma(x_1, \dots, x_n) \in \Pi$, то *конъюнкцией* отношений ϱ, σ называем $(m+n)$-местное отношение

$$\varrho(x_1, \dots, x_m) \,\&\, \sigma(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}). \tag{1}$$

Проекцией отношения $\varrho(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ называется $(m-1)$-местное отношение

$$(\exists x_i)\varrho(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \equiv \\ \equiv \varrho(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_m) \vee \varrho(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

Операции перестановки и отождествления переменных для отношений предполагаем известными. Если $R \subseteq \Pi$, то через $[R]$ обозначаем наименьшее множество отношений, содержащее все диагонали, все отношения из R и замкнутое относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Множества вида $[R]$ называются *замкнутыми* множествами отношений.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, $\varrho(x_1, \dots, x_m)$ — отношение. Говорят, что функция f *сохраняет* отношение ϱ, если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$, принадлежащих отношению ϱ, набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$ также принадлежит отношению ϱ. Множество всех булевых функций, сохраняющих отношение ϱ, обозначим через $\operatorname{Pol}\varrho$, а множество всех отношений, которые сохраняет функция f, — через $\operatorname{Inv} f$. Нетрудно убедиться в том, что для любых функции f и отношения ϱ множество $\operatorname{Pol}\varrho$ является замкнутым классом функций (классом Поста), содержащим все селекторные функции, а множество $\operatorname{Inv} f$ — замкнутым классом отношений, содержащим все диагонали.

Отображения Pol и Inv распространяются на все подмножества из Π и C_1: если $R \subseteq \Pi$ и $Q \subseteq C_1$, то

$$\operatorname{Pol} R = \bigcap_{\varrho \in R} \operatorname{Pol}\varrho, \quad \operatorname{Inv} Q = \bigcap_{f \in Q} \operatorname{Inv} f.$$

Отображения Pol и Inv определяют соответствия Галуа [9, 10] между частично упорядоченными по включению множествами всех подмножеств из C_1 и всех подмножеств из Π. Если $R \subseteq \Pi$, $Q \subseteq C_1$, то множества $\operatorname{Inv}\operatorname{Pol} R$ и $\operatorname{Pol}\operatorname{Inv} Q$ называются *Галуа-замыканиями* множеств R и Q [5]. Из [5] следует, что Галуа-замкнутыми являются в точности классы Поста, содержащие все селекторные функции, и замкнутые классы отношений, содержащие все диагонали. Отображение Pol (или Inv) задает антиизоморфизм между частично упорядоченными по включению множествами Галуа-замкнутых классов функций и Галуа-замкнутых классов отношений.

Для всякого класса Поста Q, содержащего все селекторные функции и отличного от классов F_1^∞–F_8^∞, мы укажем набор R стандартных отношений, состоящий из одного, двух или трех отношений, для которого $Q = \mathrm{Pol}\, R$. Набор R будет состоять из отношений из следующего списка:

$$\begin{gathered} x = 0, \quad x = 1, \quad x \leqslant y, \quad x \neq y, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x \cdot y = z, \quad x \vee y = z, \quad x = y \vee x = z, \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0, \quad x_1 \vee \ldots \vee x_m = 1 \qquad (m = 2, 3, \ldots). \end{gathered} \tag{2}$$

Пользуясь спецификой отношений, входящих в набор R, найдем описание множества $[R]$, которое совпадает с $\mathrm{Inv}\, Q$ — множеством всех инвариантов класса Q [5]. Известно [7], что классы F_1^∞–F_8^∞ невозможно задать конечным множеством отношений. Так как для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 8$, имеем $F_i^\infty = \bigcap\limits_{m \geqslant 2} F_i^m$, то соответственно получим $\mathrm{Inv}\, F_i^\infty = \bigcup\limits_{m \geqslant 2} \mathrm{Inv}\, F_i^m$.

Если отношение $\varrho(x_1, \ldots, x_m)$ определяет класс Q (т. е. $Q = \mathrm{Pol}\, \varrho$), то отношение $\varrho(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ определяет двойственный класс Q^* [5]. Поэтому из пары двойственных друг другу классов Поста будем рассматривать только один.

Для классов Q из множества $\{C_3, A_1, D_3, L_1, P_6, O_9, F_8^m, m = 2, 3, \ldots\}$ равенство $Q = \mathrm{Pol}\, R$ можно доказать по следующей схеме. Берем базис B класса Q (например из [3]) и устанавливаем, что все функции базиса B сохраняют все отношения из R. Это дает включение $Q \subseteq \mathrm{Pol}\, R$. Затем, пользуясь [3], определяем все классы Поста $Q_1, \ldots, Q_s$, непосредственно содержащие класс Q, и доказываем, что в каждый из классов $Q_1, \ldots, Q_s$ входит функция, не сохраняющая хотя бы одного отношения из R. Отсюда вытекают соотношения $Q_i \nsubseteq \mathrm{Pol}\, R$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, что вместе с включением $Q \subseteq \mathrm{Pol}\, R$ приводит к равенству $Q = \mathrm{Pol}\, R$.

Каждый из оставшихся классов Q (содержащий селекторные функции) есть пересечение некоторых классов из числа C_2, C_3, A_1, D_3, L_1, P_6, S_6, O_9, F_4^m, F_8^m $(m = 2, 3, \ldots)$. Поэтому если $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots$ и $Q_1 = \mathrm{Pol}\, R_1$, $Q_2 = \mathrm{Pol}\, R_2$, ... , то $Q = \mathrm{Pol}\{R_1 \cup R_2 \cup \ldots\}$.

В чисто технических целях нам будет удобно представлять (непустые) диагонали в виде конъюнкции (не обязательно с непересекающимися множествами переменнных) *элементарных диагоналей* $x_i = x_j$ (допускается $i = j$). Именно, если диагональ $\delta(x_1, \ldots, x_m)$ отвечает отношению эквивалентности ε на множестве $\{1, \ldots, m\}$, то

$$\delta(x_1, \ldots, x_m) \equiv \mathop{\&}(x_i = x_j),$$

где конъюнкция производится по всем парам (i, j), принадлежащим отношению ε.

Еще одно техническое замечание относится к применению квантора существования. Для некоторых классов Поста Q множество $\operatorname{Inv} Q$ будет представлено в виде конъюнкции элементарных диагоналей и некоторых отношений из списка (2). При доказательстве замкнутости указанного множества конъюнкций относительно операции проектирования нам придется рассматривать отношения вида

$$(\exists x_i)(\varrho_1 \& \ldots \& \varrho_s). \tag{3}$$

Если, например, отношения $\varrho_1, \ldots, \varrho_t$ $(1 \leqslant t \leqslant s)$ не содержат переменной x_i, то согласно известным логическим правилам отношение (3) будет эквивалентно отношению

$$\varrho_1 \& \ldots \& \varrho_t \& (\exists x_i)(\varrho_{t+1} \& \ldots \& \varrho_s). \tag{4}$$

Предположим, далее, что одно из отношений $\varrho_{t+1}, \ldots, \varrho_s$, например, ϱ_s, имеет вид $x_i = x_i$. Тогда если хотя бы одно из отношений $\varrho_{t+1}, \ldots, \varrho_{s-1}$ содержит переменную x_i, то отношение ϱ_s в формуле (4) можно, очевидно, опустить. В противном случае отношение $(\exists x_i)(\varrho_{t+1} \& \ldots \& \varrho_s)$ эквивалентно отношению $\varrho_{t+1} \& \ldots \& \varrho_{s-1}$. Наконец, пусть отношение ϱ_s имеет вид $x_i = x_j$, где $i \neq j$. Если ни одно из отношений $\varrho_{t+1}, \ldots, \varrho_{s-1}$ не содержит переменную x_i, то отношение $(\exists x_i)(\varrho_{t+1} \& \ldots \& \varrho_s)$ эквивалентно отношению $\varrho_{t+1} \& \ldots \& \varrho_{s-1} \& (x_j = x_j)$. В противном случае оно эквивалентно отношению $\varrho'_{t+1} \& \ldots \& \varrho'_{s-1}$, где штрих означает, что в соответствующее отношение вместо переменной x_i подставлена переменная x_j.

Таким образом, в дальнейшем при рассмотрении отношений вида (3) будем предполагать, что все отношения ϱ_1–ϱ_s содержат переменную x_i и ни одно из них не имеет вида $x_i = x_j$.

Класс C_1. Хорошо известно [5], что $\operatorname{Inv} C_1$ состоит из всех диагоналей. Поэтому, например, $\operatorname{Inv} C_1 = [x = x]$.

Класс C_3. Согласно определению класса C_3 имеем $C_3 = \operatorname{Pol}\{x = 0\}$. Отсюда следует [5], что $\operatorname{Inv} C_3 = [x = 0]$. Если же придерживаться схемы рассуждений, объявленной выше, то функции $x \cdot y$, $x + y$, образующие базис класса C_3, очевидно, сохраняют отношение $x = 0$. Класс C_3 непосредственно содержится только в классе C_1, а функция-константа 1 не сохраняет отношения $x = 0$.

Установим, что $\operatorname{Inv} C_3$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции (не обязательно с непересекающимися множествами переменных) элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$. Включение $T \subseteq \operatorname{Inv} C_3$ очевидно, поскольку согласно определению множество $[x = 0]$ содержит все диагонали и замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Обратное включение доказываем индукцией по построению отношений в множестве $[x = 0]$. Все диагонали и отношение $x = 0$ по определению входят в множество T. Кроме того, множество T замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Пусть поэтому отношение ϱ есть конъюнкция $\varrho_1 \& \ldots \& \varrho_s$ элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$. Согласно сделанному выше замечанию при рассмотрении отношения (3) можно считать, что все отношения ϱ_1–ϱ_s, отличные от диагоналей, содержат переменную x_i и, следовательно, совпадают с отношением $x_i = 0$. Тогда отношение (3) есть полное отношение, т. е. диагональ.

Класс A_1. Равенство $A_1 = \mathrm{Pol}\{x \leqslant y\}$ (и, значит, равенство $\mathrm{Inv}\, A_1 = [x \leqslant y]$) следует из определения класса A_1. Придерживаясь объявленной выше схемы рассуждений, замечаем также, что функции 0, 1, $x \cdot y$, $x \vee y$, образующие базис класса A_1, сохраняют отношение $x \leqslant y$. Класс A_1 непосредственно содержится только в классе C_1, и функция $\bar{x}$ не сохраняет отношения $x \leqslant y$.

Так же, как для класса C_3, можно доказать, что $\mathrm{Inv}\, A_1$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x \leqslant y$. Ключевой в этом доказательстве является эквивалентность

$$(\exists z)\Big(\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant m}(x_i \leqslant z)\Big)\&\Big(\mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant n}(z \leqslant y_j)\Big)\Big) \equiv \mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n}(x_i \leqslant y_j).$$

Однако с содержательной точки зрения более интересным представляется совпадение множества $\mathrm{Inv}\, A_1$ с множеством отношений T, которое определяется следующим образом: $\varrho(x_1, \ldots, x_m) \in T$ тогда и только тогда, когда отношение $\varrho(x_1, \ldots, x_m)$, рассматриваемое как соответствующее подмножество множества E_2^m, является (дистрибутивной) решеткой с нулем — набором $(0, \ldots, 0)$, единицей — набором $(1, \ldots, 1)$ и операциями покоординатного умножения наборов и покоординатной дизъюнкции наборов. Легко проверить, что элементарные диагонали и отношение $x \leqslant y$ принадлежат множеству T. Пусть $\varrho(x_1, \ldots, x_m), \sigma(x_1, \ldots, x_n) \in T$. Тогда множеству T принадлежит отношение (1), поскольку решетка указанного выше вида для отношения (1) получается декартовым умножением соответствующих решеток для отношений ϱ, σ. Вхождение отношения

$$(\exists x_m)\varrho(x_1, \ldots, x_m) \tag{5}$$

в множество T проверяем непосредственно. Наборы $(0, \ldots, 0)$ и $(1, \ldots, 1)$, очевидно, принадлежат отношению (5). Если отношению (5) принадлежат наборы $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ и $(b_1, \ldots, b_{m-1})$, то по определению существуют такие значения a_m, b_m, что отношению ϱ принадлежат наборы $(a_1, \ldots, a_m)$ и $(b_1, \ldots, b_m)$. Согласно включению $\varrho \in T$ отношению ϱ будут принадлежать наборы $(a_1 b_1, \ldots, a_m b_m)$ и $(a_1 \vee b_1, \ldots, a_m \vee b_m)$. Следовательно, по определению квантора $\exists x_m$ отношению (5) принадлежат наборы $(a_1 b_1, \ldots, a_{m-1} b_{m-1})$ и $(a_1 \vee b_1, \ldots, a_{m-1} \vee b_{m-1})$. Доказательство замкнутости множества T относительно операций перестановки и отождествления переменных не вызывает затруднений. Таким образом, $\operatorname{Inv} A_1 \subseteq T$.

С другой стороны, из определения множества T сразу следует, что функции 0, 1, $x \cdot y$, $x \vee y$, образующие базис класса A_1, сохраняют каждое отношение из T. Это означает, что $A_1 \subseteq \operatorname{Pol} T$ или, эквивалентным образом, $\operatorname{Inv} A_1 \supseteq \operatorname{Inv} \operatorname{Pol} T$. Так как множество T замкнуто, то (см. [5]) $\operatorname{Inv} \operatorname{Pol} T = T$, и следовательно, $\operatorname{Inv} A_1 \supseteq T$.

Класс $\boldsymbol{D_3}$. Покажем, что $\operatorname{Inv} D_3 = [x \neq y]$. Базис класса D_3 образует функция $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$, которая, как можно убедиться, сохраняет отношение $x \neq y$. Класс D_3 непосредственно содержится только в классе C_1, и функция 0 не сохраняет отношения $x \neq y$.

Установим, что $\operatorname{Inv} D_3$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции (не обязательно с непересекающимися множествами переменных) элементарных диагоналей и отношений вида $x \neq y$. Включение $T \subseteq \operatorname{Inv} D_3$ сразу следует из определения множества T и равенства $\operatorname{Inv} D_3 = [x \neq y]$. Так как множество T содержит элементарные диагонали, отношение $x \neq y$ и очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, то для доказательства включения $\operatorname{Inv} D_3 \subseteq T$ достаточно проверить замкнутость множества T относительно операции проектирования. С этой целью убеждаемся, что при $m \geqslant 2$ справедлива эквивалентность

$$(\exists y)\Bigl(\mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant m} (x_i \neq y)\Bigr) \equiv \mathop{\&}_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i = x_j).$$

Кроме того, отношение $(\exists y)(x_1 \neq y)$ полно.

Класс $\boldsymbol{L_1}$. Покажем, что $\operatorname{Inv} L_1 = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0]$, где сложение рассматривается по модулю 2. Базис класса L_1 образуют функции 1, $x + y$, которые сохраняют отношение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Класс L_1 непосредственно содержится только в классе C_1, и функция xy не сохраняет отношения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Установим, что $\operatorname{Inv} L_1$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 + \ldots + x_{2m} = 0$, где $m \geqslant 1$. Чтобы доказать включение $T \subseteq \operatorname{Inv} L_1$, достаточно построить в классе $\operatorname{Inv} L_1$ все отношения $x_1 + \ldots + x_{2m} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 = 0) \equiv (x_1 = x_2), \quad &(x_1 + \ldots + x_{2m+2} = 0) \equiv \\ &\equiv (\exists y)((x_1 + \ldots + x_{2m-1} + y = 0) \& (x_{2m} + x_{2m+1} + x_{2m+2} + y = 0)).\end{aligned}$$

Обратно, множество T содержит все элементарные диагонали, отношение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Замкнутость T относительно операции проектирования следует из эквивалентности

$$(\exists y)\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant n}(x_1^i+\ldots+x_{2m_i-1}^i+y=0)\Bigr)\equiv$$
$$\equiv\mathop{\&}_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_1^i+\cdots+x_{2m_i-1}^i+x_1^j+\ldots+x_{2m_j-1}^j=0)$$

при $n\geqslant 2$ и из того, что отношение $(\exists y)(x_1+\ldots+x_{2m-1}+y=0)$ полно. Таким образом, $\operatorname{Inv} L_1\subseteq T$.

Приведем еще одно описание класса $\operatorname{Inv} L_1$. Именно покажем, что $\operatorname{Inv} L_1$ совпадает с множеством T всех отношений, которые содержат набор $(1,\ldots,1)$ и определяют линейные пространства над полем $GF(2)$ с операцией покоординатного сложения векторов и покоординатного умножения на элементы поля $GF(2)$. В самом деле, согласно предыдущему описанию множества $\operatorname{Inv} L_1$ всякое отношение ϱ из множества $\operatorname{Inv} L_1$ представимо в виде конъюнкции отношений типа $x=x$ и $x_1+\ldots+x_{2m}=0$, где $m\geqslant 1$. Так как отношение $x=x$ можно записать в виде $0\cdot x=0$, то приходим к выводу, что множество истинности отношения ϱ совпадает с множеством решений однородной системы линейных уравнений, каждое уравнение которой содержит четное число ненулевых коэффициентов. Отсюда сразу следует, что отношение ϱ определяет (своим множеством истинности) линейное пространство, которому принадлежит единичный набор.

Обратно, как хорошо известно из линейной алгебры [11], для всякого линейного пространства V существует такая система Z однородных линейных уравнений, совокупность решений которой совпадает с V. Если пространству V принадлежит единичный вектор, то каждое уравнение системы Z необходимым образом содержит лишь четное число ненулевых коэффициентов. Тем самым приходим к конъюнкции полных отношенией (все коэффициенты уравнения — нулевые) и отношений вида $x_1+\ldots+x_{2m}=0$.

Класс P_6. Покажем, что $\operatorname{Inv} P_6=[xy=z]$. Базис класса P_6 образуют функции 0, 1, xy, которые сохраняют отношение $xy=z$. Класс P_6 непосредственно содержится только в классе A_1, и функция $x\vee y$ из A_1 не сохраняет отношения $xy=z$.

Установим, что $\operatorname{Inv} P_6$ совпадает с множеством T всех отношений, которые определяют нижние полурешетки с нулем — набором $(0,\ldots,0)$, единицей — набором $(1,\ldots,1)$ и операцией взятия наибольшей нижней грани — покоординатным умножением наборов. Действительно, легко проверяется, что множество T содержит элементарные диагонали, отношение $xy=z$ и замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Например, пусть $\varrho(x_1,\ldots,x_m)\in T$ и наборы $(a_1,\ldots,a_{m-1})$, $(b_1,\ldots,b_{m-1})$ принадлежат отношению (5). Тогда существуют такие значения a_m,b_m, что наборы $(a_1,\ldots,a_m)$, $(b_1,\ldots,b_m)$ принадлежат отношению ϱ. Так как $\varrho\in T$, то отношению ϱ принадлежит набор $(a_1b_1,\ldots,a_{m-1}b_{m-1})$. Принадлежность отношению (5) нулевого и единичного наборов очевидна. Итак, $\operatorname{Inv} P_6\subseteq T$.

Обратно, функции 0, 1, xy, образующие базис класса P_6, сохраняют любое отношение из T. Поэтому $P_6 \subseteq \operatorname{Pol} T$, $\operatorname{Inv}\operatorname{Pol} T \subseteq \operatorname{Inv} P_6$ и $T \subseteq \operatorname{Inv} P_6$.

Класс O_9. Покажем, что $\operatorname{Inv} O_9 = [x = y \vee x = z]$. Базис класса O_9 образуют функции 0, $\bar{x}$, которые сохраняют отношение $x = y \vee x = z$. Класс O_9 непосредственно содержится только в классе L_1, и функция $x + y$ из L_1 не сохраняет отношения $x = y \vee x = z$.

Установим, что $\operatorname{Inv} O_9$ совпадает с множеством T_1 всех отношений, которые представимы в виде дизъюнкции произвольных диагоналей, и с множеством T_2 всех отношений, которые содержат нулевой набор и вместе с каждым набором содержат также его противоположный набор. Доказательство проведем для множества T_1; для множества T_2 оно аналогично соответствующему доказательству из предыдущего пункта.

Согласно определению множество T_1 содержит элементарные диагонали и отношение $x = y \vee x = z$. Множество T_1 очевидным образом замкнуто относительно перестановки и отождествления переменных. Далее, если $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — диагонали, то

$$(\varrho_1 \vee \ldots \vee \varrho_m) \& (\sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_n) \equiv \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n} \varrho_i \& \sigma_j,$$

при этом конъюнкция $\varrho_i \& \sigma_j$ диагоналей ϱ_i, σ_j также является диагональю. Значит, множество T_1 замкнуто относительно операции конъюнкции. Так как

$$(\exists x)(\varrho_1 \vee \ldots \vee \varrho_m) \equiv \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m} (\exists x)\varrho_i$$

и проекция диагонали вновь является диагональю, то множество T_1 замкнуто относительно операции проектирования. Следовательно, $\operatorname{Inv} O_9 \subseteq T_1$.

Обратно, функции 0, $\bar{x}$, образующие базис класса O_9, тривиальным образом сохраняют любую диагональ, а поскольку они одноместны — также и дизъюнкцию любых диагоналей. Отсюда вытекает, что $O_9 \subseteq \operatorname{Pol} T_1$, $\operatorname{Inv}\operatorname{Pol} T_1 \subseteq \operatorname{Inv} O_9$ и $T_1 \subseteq \operatorname{Inv} O_9$.

Классы F_8^m $(m = 2, 3, \ldots)$. Покажем, что $\operatorname{Inv} F_8^m = [x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0]$. Базис класса F_8^m образуют функции $x \cdot \bar{y}$ и

$$h_m(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m+1} x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{m+1},$$

которые сохраняют отношение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$. Класс F_8^2 непосредственно содержится только в классе C_3 и при $m \geqslant 3$ класс F_8^m — только в классе F_8^{m-1}. Функция $x + y$ из класса C_3 не сохраняет отношения $x_1 \cdot x_2 = 0$ и при $m \geqslant 3$ функция h_{m-1} из класса F_8^{m-1} — отношения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$.

Установим, что $\operatorname{Inv} F_8^m$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant m$. В самом деле, множество T содержит элементарные диагонали, отношение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$ и очевидным образом замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Для доказательства замкнутости T относительно операции проектирования достаточно заметить, что отношение

$$(\exists z)((x_1 \cdot \ldots \cdot x_s \cdot z = 0)\& \ldots \&(y_1 \cdot \ldots \cdot y_t \cdot z = 0))$$

является полным, поскольку в качестве искомого значения переменной z можно взять 0. Таким образом, $\mathrm{Inv}\, F_8^m \subseteq T$.

Обратное включение легко следует из того, что любое отношение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = 0$ $(1 \leqslant k < m)$ можно получить из отношения $x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$ отождествлением переменных.

Класс C_4. Имеем $C_4 = C_2 \cap C_3$. Из равенств $\mathrm{Inv}\, C_2 = [x = 1]$, $\mathrm{Inv}\, C_3 = [x = 0]$ вытекает, что $\mathrm{Inv}\, C_4 = [x = 0, x = 1]$. Так же, как для класса C_3, доказываем, что $\mathrm{Inv}\, C_4$ состоит из всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$, $x = 1$.

Класс A_3. Имеем $A_3 = C_3 \cap A_1$. Так как $\mathrm{Inv}\, C_3 = [x = 0]$, $\mathrm{Inv}\, A_1 = [x \leqslant y]$, то $\mathrm{Inv}\, A_3 = [x = 0,\ x \leqslant y]$. По аналогии с представлением для класса $\mathrm{Inv}\, A_1$ устанавливаем два представления для класса $\mathrm{Inv}\, A_3$. Во-первых, $\mathrm{Inv}\, A_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$, $x \leqslant y$. Во-вторых, $\mathrm{Inv}\, A_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые определяют (дистрибутивные) решетки с нулем — набором $(0, \ldots, 0)$, единицей (которая не обязательно равна набору $(1, \ldots, 1)$) и операциями покоординатного умножения и покоординатной дизъюнкции наборов.

Класс A_4. Имеем $A_4 = A_2 \cap A_3$. Из равенств $\mathrm{Inv}\, A_2 = [x = 1,\ x \leqslant y]$, $\mathrm{Inv}\, A_3 = [x = 0,\ x \leqslant y]$ следует равенство $\mathrm{Inv}\, A_4 = [x = 0,\ x = 1,\ x \leqslant y]$. Так же, как для классов $\mathrm{Inv}\, A_1$, $\mathrm{Inv}\, A_3$, получаем, что $\mathrm{Inv}\, A_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$, $x = 1$, $x \leqslant y$, и с множеством всех отношений, которые определяют (дистрибутивные) решетки с нулем (вообще говоря, отличным от набора $(0, \ldots, 0)$), единицей (вообще говоря, отличной от набора $(1, \ldots, 1)$) и операциями покоординатного умножения и покоординатной дизъюнкции наборов.

Класс D_1. Имеем $D_1 = C_3 \cap D_3$. Из равенств $\mathrm{Inv}\, C_3 = [x = 0]$, $\mathrm{Inv}\, D_3 = [x \neq y]$ следует, что $\mathrm{Inv}\, D_1 = [x = 0,\ x \neq y]$. Замечаем, что

$$(x = 1) \equiv (\exists y)((y = 0)\&(x \neq y)).$$

Так же, как для классов $\mathrm{Inv}\, C_3$, $\mathrm{Inv}\, D_3$, доказываем, что $\mathrm{Inv}\, D_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x = 0$, $x = 1$, $x \neq y$.

Класс D_2. Имеем $D_2 = A_1 \cap D_3$. Так как $\mathrm{Inv}\, A_1 = [x \leqslant y]$ и $\mathrm{Inv}\, D_3 = [x \neq y]$, то $\mathrm{Inv}\, D_2 = [x \leqslant y,\ x \neq y]$. Установим, что $\mathrm{Inv}\, D_2$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции произвольных одно- и двуместных отношений. По определению множество T

содержит элементарные диагонали и отношения $x \leqslant y$, $x \neq y$. Кроме того, как легко видеть, T замкнуто относительно операций конъюнкции, перестановки и отождествления переменных. Предположим, что отношение $\varrho(x_1,\dots,x_m,y)$ из множества T представимо в виде конъюнкции K одно- и двуместных отношений, причем все входящие в K отношения содержат переменную y. Таким образом,

$$\varrho(x_1,\dots,x_m,y) \equiv \Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant k}\sigma_i(y)\Bigr)\&\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant m}\tau_j(x_j,y)\Bigr),$$

где σ_i, τ_j — подходящие одно- и двуместные отношения. Рассмотрим проекцию отношения ϱ по переменной y. Очевидно, можно считать, что отношения σ_1–σ_k непусты, неполны и среди них не встречаются одновременно отношения $y=0$, $y=1$. Поэтому предположим сначала, что $k=1$ и $\sigma_1(y)\equiv(y=a)$, где $a\in E_2$. Тогда получим

$$(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_m,y) \equiv \mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant m}\tau_j(x_j,a).$$

Далее будем считать, что $k=0$. Согласно сделанному в начале работы замечанию можно предполагать, что ни одно из отношений τ_1–τ_m не является диагональю. Если одно из отношений τ_1–τ_m, например, τ_1, имеет вид $\tau_1(x_1,y)\equiv(x_1\neq y)$, то в силу эквивалентности $(x_1\neq y)\equiv(\bar{x_1}=y)$ по известным логическим правилам при $m\geqslant 2$ будем иметь

$$(\exists y)\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant m}\tau_j(x_j,y)\Bigr) \equiv \mathop{\&}_{2\leqslant j\leqslant m}\tau_j(x_j,\bar{x_1})$$

(в случае $m=1$ отношение $(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_m,y)$ оказывается полным).

Итак, в дальнейшем можно предполагать, что ни одно из отношений τ_1–τ_m не является полным и не имеет вида $x=y$ или $x\neq y$. Кроме того, учитывая, что случай одноместных конъюнктивных сомножителей уже рассмотрен, можно также считать, что среди отношений τ_1–τ_m нет отношений, которые представимы в виде конъюнкции двух одноместных отношений. Как нетрудно убедиться, все остальные двуместные отношения имеют вид $x=a\vee x=b$, где $a,b\in E_2$. В связи с этим конъюнкцию K запишем в виде

$$\mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j=a_j\vee y=b_j).$$

Если $b_1=\ldots=b_m$, то отношение $(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_m,y)$ полно, так как в качестве значения переменной y можно взять b_1. Предположим поэтому, что, например, $b_1=\ldots=b_s=0$, $b_{s+1}=\ldots=b_m=1$ и $1\leqslant s<m$. Тогда

$$(\exists y)\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant j\leqslant m}(x_j=a_j\vee y=b_j)\Bigr) \equiv \mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant s}(x_i=a_i)\vee\mathop{\&}_{s+1\leqslant j\leqslant m}(x_j=a_j).$$

Пользуясь известными тождествами алгебры логики, находим, далее, что

$$\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant s}(x_i=a_i)\vee\mathop{\&}_{s+1\leqslant j\leqslant m}(x_j=a_j) \equiv \mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant s,\ s+1\leqslant j\leqslant m}(x_i=a_i\vee x_j=a_j).$$

Итак, $\mathrm{Inv}\, D_2 \subseteq T$.

Для доказательства обратного включения заметим, что

$$(\exists z)((x \leqslant z)\&(y \neq z)) \equiv (x = 0 \vee y = 0),$$

$$(\exists z)((x \neq z)\&(z \leqslant y)) \equiv (x = 1 \vee y = 1).$$

Отождествлением переменных из последних отношений получаем отношения $x = 0$ и $x = 1$. Всякое двуместное отношение, отличное от диагонали, либо совпадает с одним из отношений $x \leqslant y$, $x \geqslant y$, $x \neq y$, $x = 0 \vee y = 0$, $x = 1 \vee y = 1$, либо представимо в виде конъюнкции одноместных отношений.

Класс L_3. Имеем $L_3 = C_3 \cap L_1$. Так как $\mathrm{Inv}\, C_3 = [x = 0]$ и $\mathrm{Inv}\, L_1 = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0]$, то $\mathrm{Inv}\, L_3 = [x = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0]$. Из эквивалентностей

$$(\exists y)((x_1 + x_2 + x_3 + y = 0)\&(y = 0)) \equiv (x_1 + x_2 + x_3 = 0),$$
$$(\exists y)((x_1 + x_2 + y = 0)\&(x_3 + x_4 + y = 0)) \equiv (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0),$$
$$(x + x + x = 0) \equiv (x = 0)$$

вытекает, далее, что $\mathrm{Inv}\, L_3 = [x_1 + x_2 + x_3 = 0]$.

Так же, как для класса $\mathrm{Inv}\, L_1$, можно показать, что $\mathrm{Inv}\, L_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 + \ldots + x_m = 0$, где $m \geqslant 1$, и с множеством всех отношений, которые определяют линейные пространства над полем $GF(2)$ (не обязательно содержащие вектор $(1, \ldots, 1)$).

Класс L_5. Имеем $L_5 = D_3 \cap L_1$. Так как $\mathrm{Inv}\, D_3 = [x \neq y]$ и $\mathrm{Inv}\, L_1 = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0]$, то $\mathrm{Inv}\, L_5 = [x \neq y,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0]$. Эквивалентности

$$(x_1 \neq x_2) \equiv (x_1 + x_2 = 1),$$
$$(\exists y)((x_1 + x_2 + x_3 + y = 0)\&(x_4 + y = 1)) \equiv (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1),$$
$$(x_1 + x_2 + x_1 + x_1 = 1) \equiv (x_1 + x_2 = 1),$$
$$(\exists y)((x_1 + x_2 + x_3 + y = 1)\&(x_4 + y = 1)) \equiv (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0)$$

показывают, что справедливо равенство $\mathrm{Inv}\, L_5 = [x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1]$.

Так же, как для класса $\mathrm{Inv}\, L_1$, устанавливаем, что $\mathrm{Inv}\, L_5$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 + \ldots + x_{2m} = a$, где $m \geqslant 1$ и $a \in E_2$.

Покажем, что $\mathrm{Inv}\, L_5$ совпадает с множеством T всех отношений, которые определяют линейные многообразия над полем $GF(2)$, содержащие вместе с каждым набором противоположный ему набор. В самом деле, согласно предыдущему представлению отношений из $\mathrm{Inv}\, L_5$ область истинности всякого отношения ϱ из $\mathrm{Inv}\, L_5$ является множеством V решений подходящей (вообще говоря, неоднородной) системы линейных уравнений, каждое уравнение которой содержит четное число ненулевых коэффициентов. Отсюда следует, что V есть линейное многообразие, которое в силу ограничения на четность числа ненулевых коэффициентов вместе с каждым вектором содержит противоположный ему вектор.

Обратно, всякое линейное многообразие V можно задать в виде множества решений подходящей системы Z линейных уравнений [11]. Если вместе с каждым вектором многообразию V принадлежит также противоположный вектор, то во всяком уравнении системы Z число ненулевых коэффициентов необходимо должно быть четным.

Класс L_4. Имеем $L_4 = L_2 \cap L_3$. Так как $\operatorname{Inv} L_2 = [x_1 + x_2 + x_3 = 1]$ и $\operatorname{Inv} L_3 = [x_1 + x_2 + x_3 = 0]$, то $\operatorname{Inv} L_4 = [x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1]$. Из соотношений

$$(x + x + x = 1) \equiv (x = 1), \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0) \in [x_1 + x_2 + x_3 = 0],$$
$$(\exists y)((x_1 + x_2 + x_3 + y = 0) \& (y = 1)) \equiv (x_1 + x_2 + x_3 = 1)$$

вытекает, что $\operatorname{Inv} L_4 = [x = 1, x_2 + x_2 + x_3 = 0]$.

Так же, как для класса $\operatorname{Inv} L_5$, устанавливаем два представления для отношений класса $\operatorname{Inv} L_4$.

Во-первых, $\operatorname{Inv} L_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 + \ldots + x_m = a$, где $m \geqslant 1$ и $a \in E_2$. Кроме того, $\operatorname{Inv} L_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые определяют произвольные линейные многообразия над полем $GF(2)$.

Класс P_3. Имеем $P_3 = C_3 \cap P_6$. Из равенств $\operatorname{Inv} C_3 = [x = 0]$, $\operatorname{Inv} P_6 = [xy = z]$, следует, что $\operatorname{Inv} P_3 = [x = 0,\ xy = z]$. Так же, как для класса $\operatorname{Inv} P_6$, устанавливаем, что $\operatorname{Inv} P_3$ совпадает с множеством всех отношений, которые определяют нижние полурешетки с нулем — набором $(0, \ldots, 0)$ и операцией покоординатного умножения наборов.

Класс P_5. Имеем $P_5 = C_2 \cap P_6$. Из равенств $\operatorname{Inv} C_2 = [x = 1]$ и $\operatorname{Inv} P_6 = [xy = z]$ следует, что $\operatorname{Inv} P_5 = [x = 1,\ xy = z]$. Аналогично тому, как это сделано для класса $\operatorname{Inv} P_6$, показываем, что $\operatorname{Inv} P_5$ совпадает с множеством всех отношений, которые определяют нижние полурешетки с нулем (вообще говоря, не совпадающим с набором $(0, \ldots, 0)$), единицей — набором $(1, \ldots, 1)$ и операцией покоординатного умножения наборов.

Класс P_1. Имеем $P_1 = P_3 \cap P_5$. Так как $\operatorname{Inv} P_3 = [x = 0,\ xy = z]$ и $\operatorname{Inv} P_5 = [x = 1,\ xy = z]$, то $\operatorname{Inv} P_1 = [x = 0,\ x = 1,\ xy = z]$. Как для предыдущих классов, получаем, что $\operatorname{Inv} P_1$ совпадает с множеством всех наборов, которые определяют нижние полурешетки с нулем (не обязательно совпадающим с набором $(0, \ldots, 0)$) и операцией покоординатного умножения наборов.

Класс O_8. Имеем $O_8 = A_1 \cap O_9$. Так как $\operatorname{Inv} A_1 = [x \leqslant y]$ и $\operatorname{Inv} O_9 = [x = y \vee x = z]$, то $\operatorname{Inv} O_8 = [x \leqslant y,\ x = y \vee x = z]$.

Покажем, что $\operatorname{Inv} O_8$ совпадает с множеством T всех отношений, которым принадлежат нулевой и единичный наборы. В самом деле, легко проверить, что множество T содержит элементарные диагонали, отношения $x \leqslant y$, $x = y \vee x = z$ и замкнуто относительно операций конъюнкции, проектирования, перестановки и отождествления переменных. Таким образом, $\operatorname{Inv} O_8 \subseteq T$. С другой стороны, функции 0, 1, x, образующие базис класса 0_8, сохраняют любое отношение из T. Поэтому $O_8 \subseteq \operatorname{Pol} T$, $\operatorname{Inv} \operatorname{Pol} T \subseteq \operatorname{Inv} O_8$ и $T \subseteq \operatorname{Inv} O_8$.

Класс O_6. Имеем $O_6 = C_3 \cap O_9$. Так как $\operatorname{Inv} C_3 = [x = 0]$ и $\operatorname{Inv} O_9 = [x = y \vee x = z]$, то $\operatorname{Inv} O_6 = [x = 0,\ x = y \vee x = z]$.

Аналогично классу $\operatorname{Inv} O_8$ устанавливаем, что $\operatorname{Inv} O_6$ совпадает с множеством всех отношений, которые содержат нулевой набор.

Класс O_4. Имеем $O_4 = D_3 \cap O_9$. Так как $\operatorname{Inv} D_3 = [x \neq y]$ и $\operatorname{Inv} O_9 = [x = y \vee x = z]$, то $\operatorname{Inv} O_4 = [x \neq y,\ x = y \vee x = z]$. Эквивалентности

$$(\exists v)((x \neq v)\&(v = y \vee v = z)) \equiv (x \neq y \vee x \neq z),$$
$$(x \neq y \vee x \neq y) \equiv (x \neq y),$$
$$(\exists v)((x \neq v)\&(v \neq y \vee v \neq z)) \equiv (x = y \vee x = z)$$

показывают, что $\operatorname{Inv} O_4 = [x \neq y \vee x \neq z]$.

Пользуясь тем, что базис класса O_4 образует функция $\bar{x}$, так же, как для класса $\operatorname{Inv} O_8$, устанавливаем, что $\operatorname{Inv} O_4$ совпадает с множеством всех отношений, которые вместе с каждым набором содержат противоположный ему набор.

Класс O_1. Имеем $O_1 = O_5 \cap O_6$. Так как $\operatorname{Inv} O_5 = [x = 1,\ x = y \vee x = z]$ и $\operatorname{Inv} O_6 = [x = 0,\ x = y \vee x = z]$, то $\operatorname{Inv} O_1 = [x = 0,\ x = 1,\ x = y \vee x = z]$. Класс O_1 содержит только селекторные функции. Поэтому [5] множество $\operatorname{Inv} O_1$ совпадает с множеством Π всех отношений на E_2.

Классы F_5^m $(m = 2, 3, \dots)$. Имеем $F_5^m = C_2 \cap F_8^m$. Из равенств $\operatorname{Inv} C_2 = [x = 1]$ и $\operatorname{Inv} F_8^m = [x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0]$ следует, что $\operatorname{Inv} F_5^m = [x = 1,\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0]$. Так же, как для класса F_8^m, устанавливаем, что $\operatorname{Inv} F_5^m$ состоит из всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x = 1$, $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant m$.

Классы F_7^m $(m = 2, 3, \dots)$. Имеем $F_7^m = A_1 \cap F_8^m$. Так как $\operatorname{Inv} A_1 = [x \leqslant y]$ и $\operatorname{Inv} F_8^m = [x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0]$, то $\operatorname{Inv} F_7^m = [x \leqslant y,\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0]$.

Покажем, что $\operatorname{Inv} F_7^m$ совпадает с множеством T всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x \leqslant y$, $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant m$. Включение $T \subseteq \operatorname{Inv} F_7^m$ выполняется очевидным образом. Для доказательства обратного включения достаточно лишь рассмотреть замкнутость множества T относительно операции проектирования. Пусть $\varrho(x_1, \dots, x_n, y) \in T$, ϱ представимо в виде конъюнкции отношений вида $x \leqslant z$ и $z_1 \cdot \ldots \cdot z_k = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant m$, причем все конъюнктивные сомножители содержат переменную y. Согласно определению квантора $\exists y$ имеем

$$(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_n,y)\equiv\varrho(x_1,\dots,x_n,0)\vee\varrho(x_1,\dots,x_n,1).$$

Все конъюнктивные сомножители отношения ϱ, имеющие вид $y\leqslant x_i$ или $x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_t}\cdot y=0$, при $y=0$ становятся тождественно истинными, а отношения $y\geqslant x_i$ — эквивалентными отношениям $x_i=0$. Таким образом, отношение $\varrho(x_1,\dots,x_n,0)$ эквивалентно конъюнкции отношений вида $x_i=0$. Отношение $x_i\leqslant y$ при $y=1$ становится полным, отношение $x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_t}\cdot y=0$ превращается в отношение $x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_t}=0$, а отношение $y\leqslant x_i$ — в отношение $x_i=1$. Следовательно, отношение $\varrho(x_1,\dots,x_n,1)$ можно представить в виде конъюнкции отношений типа $x_i=1$ и $x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_t}=0$. Для упрощения обозначений будем предполагать, что

$$\varrho(x_1,\dots,x_n,0)\equiv(x_1=0)\&\ldots\&(x_k=0),$$
$$\varrho(x_1,\dots,x_n,1)\equiv(x_{k+1}=1)\&\ldots\&(x_{k+m}=1)\&(K_1=0)\&\ldots\&(K_p=0),$$

где $K_1,\dots,K_p$ — конъюнкции переменных (мы считаем, что конъюнктивное представление отношения ϱ не содержит одновременно сомножителей $y\leqslant x_i$, $y\geqslant x_i$, поскольку конъюнкция $(y\leqslant x_i)\&(y\geqslant x_i)$ эквивалентна элементарной диагонали $y=x_i$ и этот случай мы рассмотрели в начале работы). Сделаем еще два предположения о нетривиальности рассматриваемого случая. Во-первых, пусть $k\neq 0$ — равенство $k=0$ означает, что в конъюнктивное представление отношения ϱ не входят отношения $y\geqslant x_i$, а тогда отношение $\varrho(x_1,\dots,x_n,0)$ и вместе с ним отношение $(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_n,y)$ будут полными. Во-вторых, пусть $p\neq 0$, поскольку в противном случае отношение ϱ составлено из отношений вида $x_i\leqslant y$, $y\geqslant x_i$, $y=0$ и можно воспользоваться соответствующим результатом для класса A_3. Теперь имеем

$$\begin{aligned}&\varrho(x_1,\dots,x_n,0)\vee\varrho(x_1,\dots,x_n,1)\equiv\\ &\quad\equiv\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant k}(x_i=0)\vee\Bigl(\mathop{\&}_{k+1\leqslant j\leqslant k+m}(x_j=1)\Bigr)\&\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant l\leqslant p}(K_l=0)\Bigr)\equiv\\ &\quad\equiv\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant k<j\leqslant k+m}(x_i=0\vee x_j=1)\Bigr)\&\Bigl(\mathop{\&}_{1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant l\leqslant p}(x_i=0\vee K_l=0)\Bigr).\end{aligned}$$

Однако

$$(x_i=0\vee x_j=1)\equiv(x_i\leqslant x_j),\quad(x_i=0\vee K_l=0)\equiv(x_i\cdot K_l=0).$$

Поэтому отношение $(\exists y)\varrho(x_1,\dots,x_n,y)$ принадлежит множеству T.

Классы F_6^m ($m=2,3,\dots$). Имеем $F_6^m=C_2\cap F_7^m$. Из равенств $\operatorname{Inv}C_2=[x=1]$, $\operatorname{Inv}F_7^m=[x\leqslant y,\ x_1\cdot\ldots\cdot x_m=0]$ следует, что $\operatorname{Inv}F_6^m=[x=1,\ x\leqslant y,\ x_1\cdot\ldots\cdot x_m=0]$. Так же, как для класса $\operatorname{Inv}F_7^m$, устанавливаем, что $\operatorname{Inv}F_6^m$ совпадает с множеством всех отношений, которые представимы в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x=1$, $x\leqslant y$, $x_1\cdot\ldots\cdot x_k=0$, где $1\leqslant k\leqslant m$.

Классы F_5^∞–F_8^∞. Для любого i, $5 \leqslant i \leqslant 8$, имеем

$$F_i^\infty = \bigcap_{m\geqslant 2} F_i^m.$$

Поэтому $\mathrm{Inv}\, F_8^\infty = [x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots]$, $\mathrm{Inv}\, F_5^\infty = [x = 1,\ x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots]$, $\mathrm{Inv}\, F_7^\infty = [x \leqslant y,\ x_1 \cdot x_2 = 0, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots]$, $\mathrm{Inv}\, F_6^\infty = [x = 1,\ x \leqslant y, x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots]$. Соответствующим образом $\mathrm{Inv}\, F_8^\infty$ совпадает с множеством всех отношений, которые можно представить в виде конъюнкции элементарных диагоналей и отношений вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = 0$, где $k \geqslant 1$. Аналогичные утверждения справедливы для классов $\mathrm{Inv}\, F_5^\infty$, $\mathrm{Inv}\, F_7^\infty$, $\mathrm{Inv}\, F_6^\infty$.

В заключение приведем список всех классов Поста, содержащих селекторные функции, с указанием наборов отношений, которые порождают соответствующие классы инвариантов.

Класс Поста	Отношения
C_1	$x = x$
C_2	$x = 1$
C_3	$x = 0$
C_4	$x = 0,\ x = 1$
A_1	$x \leqslant y$
A_2	$x = 1,\ x \leqslant y$
A_3	$x = 0,\ x \leqslant y$
A_4	$x = 0,\ x = 1,\ x \leqslant y$
D_1	$x = 0,\ x \neq y$
D_2	$x \leqslant y,\ x \neq y$
D_3	$x \neq y$
L_1	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
L_2	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
L_3	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
L_4	$x = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$
L_5	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
P_1	$x = 0,\ x = 1,\ xy = z$
P_3	$x = 0,\ xy = z$
P_5	$x = 1,\ xy = z$
P_6	$xy = z$
S_1	$x = 0,\ x = 1,\ x \vee y = z$

Класс Поста	Отношения
S_3	$x = 1,\ x \vee y = z$
S_5	$x = 0,\ x \vee y = z$
S_6	$x \vee y = z$
O_1	$x = 0,\ x = 1,\ x = y \vee x = z$
O_4	$x \neq y \vee x \neq z$
O_5	$x = 1,\ x = y \vee x = z$
O_6	$x = 0,\ x = y \vee x = z$
O_8	$x \leqslant y,\ x = y \vee x = z$
O_9	$x = y \vee x = z$
F_1^m	$x = 0,\ x_1 \vee \ldots \vee x_m = 1$
F_2^m	$x = 0,\ x \leqslant y,\ x_1 \vee \ldots \vee x_m = 1$
F_3^m	$x \leqslant y,\ x_1 \vee \ldots \vee x_m = 1$
F_4^m	$x_1 \vee \ldots \vee x_m = 1$
F_5^m	$x = 1,\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$
F_6^m	$x = 1,\ x \leqslant y,\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$
F_7^m	$x \leqslant y,\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$
F_8^m	$x_1 \cdot \ldots \cdot x_m = 0$
F_1^∞	$x = 0,\ x_1 \vee x_2 = 1,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3 = 1, \ldots$
F_2^∞	$x = 0,\ x \leqslant y,\ x_1 \vee x_2 = 1,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3 = 1, \ldots$
F_3^∞	$x \leqslant y,\ x_1 \vee x_2 = 1,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3 = 1, \ldots$
F_4^∞	$x_1 \vee x_2 = 1,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3 = 1, \ldots$
F_5^∞	$x = 1,\ x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots$
F_6^∞	$x = 1,\ x \leqslant y,\ x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots$
F_7^∞	$x \leqslant y,\ x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots$
F_8^∞	$x_1 \cdot x_2 = 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0, \ldots$

Литература

[1] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43. — P. 163–185.

[2] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. V. 5. — Princeton Univ. Press, 1941.

[3] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.

[4] Кузнецов А. В. Алгебра логики и ее обобщения. В обзоре: Яновская С. А. Математическая логика и основания математики // Математика в СССР за сорок лет. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 13–120.

[5] Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I, II // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. — С. 1–9.

[6] Блохина Г. А. О предикатном описании классов Поста // Дискретный анализ. — 1970. — Вып. 16. — С. 16–29.

[7] Яблонский С. В. О строении верхней окрестности для предикатноописуемых классов в P_k // Доклады АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 2. — С. 304–307.

[8] Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. — М.: ИПМ АН СССР, 1990.

[9] Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1968.

[10] Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник. Вып. 7. — М.: Мир, 1963. — С. 129–185.

[11] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.

Статья поступила в редакцию в апреле 1996 г.