Х. Ренельт, Представления интегралом по ленте и лорановы разложения для решений систем Коши–Римана, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 2, 136–158

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 2

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОМ ПО ЛЕНТЕ И ЛОРАНОВЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КОШИ–РИМАНА

© Х. Ренельт

С помощью усреднения строятся интегралы по ленте, пригодные для представления решений систем Коши–Римана. Главный результат — обобщенные лорановы разложения для решений таких систем в кольце, в частности — вблизи изолированной особой точки.

§1. Введение

У формул классической теории функции, содержащих контурные интегралы, — наподобие интегральной формулы Коши — имеются естественные аналоги для обобщенных систем Коши–Римана (см. [17, 5, 6, 8]). При этом, однако, приходится требовать дополнительной гладкости от коэффициентов системы. Возникает совершенно естественная потребность заменить эти аналоги чем-то иным. Хотелось бы, чтобы этот новый аппарат позволял, насколько возможно, извлекать те же следствия, однако был бы применим и тогда, когда соответствующие контурные интегралы перестают существовать.

В настоящей статье с помощью процедуры усреднения мы строим такой аппарат на основе *интегралов по ленте.* На этом пути легко получаются естественные и удобные варианты интегральной теоремы Коши и интегральной формулы Коши (см. теоремы 2 и 3), вариант обобщенных интегралов Коши (см. теоремы 4 и 5), разложения решений на более простые (см. теоремы 6 и 7), а также основной результат: обобщенные лорановы разложения для решений систем Коши–Римана в кольце, в частности, вблизи изолированной особой точки (см. теорему 8). Замечательным образом, формулы для коэффициентов таких лорановых разложений имеют ту же структуру, что и в аналитическом случае (что можно рассматривать как очередное подтверждение глубокой содержательности системы $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$).

Основой для таких разложений служат обобщенные степени [7]. Для некоторых классов систем Коши–Римана обобщенные степени были вычислены явно в [15, 16, 18, 19]. Для систем Карлемана–Векуа и, более общим образом, для псевдоаналитических функций первого и второго родов обобщенные

Ключевые слова: псевдоаналитические функции, обобщенные степени.

степени и соответствующим им тейлоровские разложения рассматривались в [1, 2].

По техническим причинам в этой работе системы Коши–Римана называются (ν,μ)-системами, а их решения — (ν,μ)-решениями; см. §3 ниже.

§2. Интегралы по ленте

Пусть $\mathfrak{R}$ — замыкание ограниченной двусвязной области в $\mathbb{C}$, а $A(\cdot)$ — взаимно-однозначное отображение области $\mathfrak{R}$ на кольцо

$$A(\mathfrak{R}) = \{w : R_1 \leqslant |w| \leqslant R_2\}, \quad 0 < R_1 < R_2 < \infty.$$

Предполагается, что функция $A(z)$ имеет непрерывные частные производные $A_z = \frac{\partial A(z)}{\partial z}$ и $A_{\bar z} = \frac{\partial A(z)}{\partial \bar z}$ в $\mathfrak{R}$ (т.е. функция A непрерывно дифференцируема в некоторой области, содержащей $\mathfrak{R}$) и что $|A_z|^2 - |A_{\bar z}|^2 > 0$ в $\mathfrak{R}$.

Пусть L_r — образ положительно ориентированной окружности

$$K_r = \{re^{i\varphi} : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}, \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2,$$

при обратном отображении $A^{-1}(w)$, а G_r — внутренняя область жордановой кривой L_r. Предположим, что функция $A(\cdot)$ *монотонна*, т.е. $G_{r_1} \subset G_{r_2}$, если $R_1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant R_2$. Тогда кривые L_r тоже положительно ориентированы.

При этих условиях на $\mathfrak{R}$ и $A(\cdot)$ пару $\mathbb{S} := (\mathfrak{R}, A)$ мы будем называть (*кольцевой*) *лентой*, кривую $L_r = L_r(\mathbb{S})$ — *нитью*, $\mathfrak{R}$ — *носителем ленты* $\mathfrak{S}$, а A — ее *параметризацией*. Кривые L_{R_1} и L_{R_2} называются *внутренней и внешней граничными кривыми* ленты $\mathbb{S}$.

Пусть $\mathbb{S}_j := (\mathfrak{R}_j, A_j)$, $j = 1, 2$, — две ленты в области G (т.е. $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \subset G$). Лента $\mathbb{S}_1$ считается *гомотопной* ленте $\mathbb{S}_2$ в G (символическая запись: $\mathbb{S}_1 \sim \mathbb{S}_2$ в G), если какая-нибудь нить ленты $\mathbb{S}_1$ гомотопна какой-нибудь нити ленты S_2. Лента $\mathbb{S}$ называется *гомологичной нулю* в G (запись: $\mathbb{S} \sim 0$ в G), если ее нити гомологичны нулю в G.

Для лент, лежащих в области G, естественным образом вводится отношение частичного порядка: $\mathbb{S}_1 \prec \mathbb{S}_2$ в G, если $\mathbb{S}_1 \sim \mathbb{S}_2$ в G и внешняя граничная кривая ленты $\mathbb{S}_1$ содержится во внутренней граничной кривой ленты $\mathbb{S}_2$.

Пусть на носителе $\mathfrak{R}$ ленты $\mathbb{S} = (\mathfrak{R}, A)$ заданы две непрерывные функции F, H. Положим

$$c(r) := \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_r(\mathbb{S})} F dz + H d\bar z. \tag{1}$$

Введем величину $I(\mathbb{S})$ равенством

$$2\pi I(\mathbb{S}) := \int\limits_{A(\mathfrak{R})} d\sigma = |A(\mathfrak{R})|$$

($|e|$ — лебегова мера измеримого множества e) и положим

$$C(\mathbb{S}) := \frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})} \int\limits_{A(\mathfrak{R})} c(|w|)d\sigma_w. \tag{2}$$

Простое вычисление [13] дает

$$C(\mathbb{S}) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})} \int\limits_{\mathfrak{R}} (F - \bar{H}) \frac{\partial |A(z)|^2}{\partial \bar{z}} d\sigma_z. \tag{3}$$

В дальнейшем функции F и H будут иметь вид

$$F = fh_z, \quad H = fh_{\bar{z}}. \tag{4}$$

В этом случае

$$C(\mathbb{S}) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})} \int\limits_{\mathfrak{R}} f \left[h_z \frac{\partial |A(z)|^2}{\partial \bar{z}} - h_{\bar{z}} \frac{\partial |A(z)|^2}{\partial z} \right] d\sigma_z.$$

Пусть $z = x + iy$. Введем следующие определения:

$$h_z g_{\bar{z}} - h_{\bar{z}} g_z = \frac{i}{2}(h_x g_y - h_y g_x) =: \frac{\partial(h, g)}{\partial(z, \bar{z})} \tag{5}$$

и

$$\frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})} \int\limits_{\mathfrak{R}} f \frac{\partial(h, |A(z)|^2)}{\partial(z, \bar{z})} d\sigma_z =: \int\limits_{\mathbb{S}} f[h] d\sigma. \tag{6}$$

Тогда для величины $C(\mathbb{S})$, заданной равенствами (1), (2), (4), получится

$$C(\mathbb{S}) = \operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{S}} f[h] d\sigma. \tag{7}$$

Выражение, фигурирующее в (6), будет называться *интегралом по ленте*. Разумеется, символ $[h]$ в правой части формулы (6) имеет этот специальный смысл лишь тогда, когда „область интегрирования“ — лента.

§3. Представление (ν, μ)-решений интегралом по ленте

Пусть в области G задана (ν, μ)-система, т.е. равномерно эллиптическая система вида

$$f_{\bar{z}} = \nu f_z + \mu \overline{f_z}. \tag{8}$$

Условие равномерной эллиптичности означает, что

$$\nu, \mu \in L_\infty(\mathbb{C}) =: L_\infty, \quad \| |\nu| + |\mu| \|_{L_\infty} =: k < 1. \tag{9}$$

Для простоты предположим еще, что

$$\nu(z) = \mu(z) = 0 \quad \text{в } \{|z| > R^*\} \tag{10}$$

для некоторой фиксированной конечной постоянной R^*.

Специальными случаями (ν, μ)-систем являются исходная система Коши–Римана $f_{\bar z} = 0$, система Бельтрами $f_{\bar z} = \nu f_z$ и система $f_{\bar z} = \mu \overline{f_z}$ (система анти-Бельтрами), определяющая (при некоторой дополнительной гладкости функции μ) (p, q)-аналитические функции в смысле Положего [5], а также описывающая псевдоаналитические функции Берса второго рода [3]. Если функция $\overline{\mu(z)}$ аналитична в G, то взаимно-однозначные решения системы $f_{\bar z} = \mu \overline{f_z}$ — гармонические отображения области G.

Нам понадобится некоторое обобщение теорем 1 и 3 работы [9]. Напомним, что (ν, μ)-*решением* называется всякое решение (ν, μ)-системы.

Теорема 1. (I) *Пусть B и B_0 — ограниченные открытые подмножества плоскости $\mathbb{C}$, $B \subset\subset B_0$. Пусть f — (ν, μ)-решение на множестве B_0, где коэффициенты ν и μ удовлетворяют условиям* (9), (10). *Тогда существуют функции $\nu_n(z)$, $\mu_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, и (ν_n, μ_n)-решения f_n в B такие, что*

(а) $\nu_n(z) \to \nu(z)$, $\mu_n(z) \to \mu(z)$ *п.в. в* $\mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$;

(б) $\| |\nu_n| + |\mu_n| \|_{L_\infty} \leqslant \| |\nu| + |\nu| \|_{L_\infty}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$;

(в) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что $n_0(1) = 1$ и*

$$\operatorname{supp}(|\nu_n| + |\mu_n|) \subset \operatorname{supp}(|\nu| + |\mu|) + \{z : |z| < \varepsilon\}, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon);$$

(г)

$$\nu_n, \mu_n \in C^\infty(\mathbb{C}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а $f_n \to f$ равномерно в B при $n \to \infty$.

(II) *Пусть функции ν, μ, ν_n, μ_n — такие, как в части* (I), *а $H(t, z)$, $H_n(t, z)$ — фундаментальные решения, соответственно (ν, μ)-системы и (ν_n, μ_n)-систем* [6, гл. IV]. *Пусть, далее, G_t и D_z — ограниченные области в $\mathbb{C}$, находящиеся друг от друга на положительном расстоянии, и такие, что на $G_t \times D_z$ можно определить однозначную непрерывную и ограниченную функции $\arg(t - z)$. Пусть $\mathcal{D}_t$ — открытое множество, компактно содержащееся в G_t. Справедливы следующие утверждения*:

(i) $|H_n(t, z)| \leqslant K$ *при всех* $(t, z) \in \mathcal{D}_t \times D_z$, *где постоянная K не зависит от n*;

(ii) $\|H_{nt}(\cdot, z) - H_t(\cdot, z)\|_{L_s(G_t)} \to 0$ *при $n \to \infty$ равномерно по $z \in \mathbb{C}$ при любом фиксированном $s \in [1, 2)$*;

(iii) $\|H_t(\cdot, z)\|_{L_s(G_t)} \leqslant K^*$ *при $z \in \mathbb{C}$, где постоянная K^* зависит лишь от k, R^*, G_t и $s \in [1, 2)$.*

Доказательство теоремы 1 откладывается до §6.

Замечание. Для некоторых классов (ν,μ)-систем фундаментальные решения выписаны явно в [14, 16].

Предположим ненадолго, что ν, $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Тогда, во всяком случае, любое (ν,μ)-решение в произвольной области G лежит в $C^1(G)$. Пусть $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ — две ленты, гомотопные в G. В силу интегральной теоремы Коши [6] для любых двух нитей $L_{r_1}(\mathbb{S}_1)$ и $L_{r_2}(\mathbb{S}_2)$ верно равенство

$$\operatorname{Re}\frac{1}{i}\oint\limits_{L_{r_1}(\mathbb{S}_1)} f dh = \operatorname{Re}\frac{1}{i}\oint\limits_{L_{r_2}(\mathbb{S}_2)} f dh, \tag{11}$$

где h — произвольное $(\nu,\bar{\mu})$-решение в G. Из (1)–(7) следует, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}_1} f[h]d\sigma = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}_2} f[h]d\sigma. \tag{12}$$

С помощью теоремы 1(I) и хорошо известных утверждений о компактности для (ν_n,μ_n)-решений (см., например, [6, теорема II, 4.1]) из (12) предельным переходом получается следующий вариант интегральной теоремы Коши, справедливый для (ν,μ)-решений и содержащий интегралы по ленте.

Теорема 2. *Пусть функции ν и μ удовлетворяют условию (9), а $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ — ленты, гомотопные в области G. Тогда для всякого (ν,μ)-решения f и всякого $(\nu,\overline{\mu})$-решения h в G справедливо равенство*

$$\text{(i)}\quad \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}_1} f[h]d\sigma = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}_2} f[h]d\sigma.$$

Если лента $\mathbb{S}$ гомологична нулю в G, то

$$\text{(ii)}\quad \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}} f[h]d\sigma = 0.$$

(По поводу последнего утверждения заметим, что для нитей, гомологичных нулю, обе части формулы (11) равны нулю).

Для краткости назовем внутреннюю область для внутренней граничной кривой и внешнюю область — для внешней граничной кривой ленты $\mathbb{S}$ соответственно внутренней и внешней областями для $\mathbb{S}$. Множество E *лежит внутри* (*вне*) $\mathbb{S}$, если оно содержится во внутренней (соответственно во внешней) области для $\mathbb{S}$. Символически эти записываются так: $E \prec \mathbb{S}$ (или $\mathbb{S} \succ E$) и $\mathbb{S} \prec E$ (или $E \succ \mathbb{S}$). Если E состоит из единственной точки z, мы пишем z вместо $\{z\}$ в таких формулах. Наконец, условимся считать, что запись $\mathbb{S}_1 \prec E \prec \mathbb{S}_2$ означает не только, что $\mathbb{S} \prec E$ и $E \prec \mathbb{S}_2$, но еще и что $\mathbb{S}_1 \prec \mathbb{S}_2$. В таком случае говорим, что множество E *лежит между* $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$.

Пусть снова f — (ν,μ)-решение в области G, а $M(t,z)$ и $N(t,z)$ — фундаментальные решения соответственно $(\nu,\overline{\mu})$-системы и $(\nu,-\overline{\mu})$-системы. На некоторое время предположим, что ν, $\mu\in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Тогда f есть функция класса по крайней мере класса C^1 в G, а $M(t,z)$ и $N(t,z)$ — функции по крайней мере класса C^1 в $\mathbb{C}\setminus\{z\}$. Предположим, что $\mathbb{S}^*\prec\mathbb{S}$ в G. Тогда в силу интегральной формулы Коши для каждой точки z между $\mathbb{S}^*$ и $\mathbb{S}$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} f(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_r(\mathbb{S})} f(t)d_tM(t,z) + i\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_r(\mathbb{S})} f(t)d_tN(t,z) \\ -\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_{r^*}(\mathbb{S}^*)} f(t)d_tM(t,z) - i\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_{r^*}(\mathbb{S}^*)} f(t)d_tN(t,z). \end{aligned} \tag{13}$$

Тем же способом, как в случае теоремы 2, из формулы (13) получается следующий вариант интегральной формулы Коши, не требующий дополнительных предположений о гладкости коэффициентов ν и μ (кроме условия (10), которое в этом месте служит лишь удобству определения фундаментальных решений $M(\cdot,z)$ и $N(\cdot,z)$).

Теорема 3. *Пусть коэффициенты ν и μ удовлетворяют условиям* (9) *и* (10), *f — (ν,μ)-решение в области G, а $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}^*$ — две ленты, причем $\mathbb{S}^*\prec\mathbb{S}$ в G. Тогда*

$$\begin{aligned} \text{(i)}\quad f(z) = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[M(t,z)]d\sigma_t + i\operatorname{Im}\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[N(t,z)]d\sigma_t \\ -\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}^*} f(t)[M(t,z)]d\sigma_t - i\operatorname{Im}\int\limits_{\mathbb{S}^*} f(t)[N(t,z)]d\sigma_t \end{aligned}$$

для любой точки z, лежащей между $\mathbb{S}^*$ и $\mathbb{S}$. Если $\mathbb{S}\sim 0$ в G, то

$$\text{(ii)}\quad \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[M(t,z)]d\sigma_t + i\operatorname{Im}\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[N(t,z)]d\sigma_t = \begin{cases} f(z) & z\prec\mathbb{S}, \\ 0 & z\succ\mathbb{S}. \end{cases}$$

Доказательство. В случае, когда коэффициенты ν и μ гладкие, утверждение (i) получается из (13) с помощью процедуры, описанной формулами (1)–(7). На произвольные ν и μ, удовлетворяющие лишь условиям (9) и (10), утверждение (i) распространяется предельным переходом с использованием теоремы 1.

Утверждение (ii) вытекает из (i) и равенства (ii) в теореме 2, если заметить, что ih является $(\nu,\overline{\mu})$-решением всякий раз, когда h — $(\nu,-\overline{\mu})$-решение.

Аналог теоремы 3, разумеется, справедлив, и когда точка z расположена в области, „ограниченной“ произвольным конечным числом лент. Формулировка и доказательство очевидны, и мы их опустим.

Нам понадобится еще аналог обобщенных интегралов Коши в контексте лент. Пусть u и v — вещественнозначные функции, непрерывные на носителе $\mathfrak{R}$ ленты $\mathbb{S} = (\mathfrak{R}, A)$, и пусть $f = u + iv$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{S}} f(t)[M(t,z)]d\sigma_t + i\operatorname{Im}\int_{\mathbb{S}} f(t)[N(t,z)]d\sigma_t \\ = \int_{\mathbb{S}} u(t)[H^-(z,t)]d\sigma_t + i\int_{\mathbb{S}} v(t)[H(z,t)]d\sigma_t,\end{aligned} \tag{14}$$

где $H(t,z)$ и $H^-(t,z)$ — фундаментальные решения, соответственно, (ν,μ)-системы и $(\nu,-\mu)$-системы [6, гл. IV]. Соотношение (14) — простое следствие формул перемены

$$H(z,t) = \operatorname{Re} M(t,z) + i\operatorname{Im} N(t,z) + i\pi \tag{15}$$

(при подходящем выборе аргумента разности $t - z$, [6, V.2.1]) и

$$H^-(z,t) = \operatorname{Re} N(t,z) + i\operatorname{Im} M(t,z) + i\pi \tag{16}$$

(замените μ на $-\mu$ в (15)). Это ведет к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть u и v — вещественные функции, непрерывные на носителе $\mathfrak{R}$ ленты $\mathbb{S} = (\mathfrak{R}, A)$, а коэффициенты ν и μ удовлетворяют условиям* (9) *и* (10). *Тогда*

$$\int_{\mathbb{S}} u[H^-(z,\cdot)]d\sigma \quad \text{и} \quad i\int_{\mathbb{S}} v[H(z,\cdot)]d\sigma$$

— (ν,μ)-решения в $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{R}$, обращающиеся в нуль в точке ∞.

Доказательство. Пусть, вдобавок, $\nu,\mu \in C^\infty(\mathbb{C})$. Для произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathfrak{R}$ зафиксируем открытый круг $\mathbb{K}$ с центром z_0, находящийся на положительном расстоянии от $\mathfrak{R}$. Разобъем $\mathfrak{R}$ на две односвязные области B и B' с кусочно-гладкими границами так, чтобы пересечение $B \cap B'$ имело пустую внутренность, а объединение $B \cup B'$ совпадало с $\mathfrak{R}$. Существует ограниченная область B_0, содержащая B, лежащая на положительном расстоянии от $\mathbb{K}$ и такая, что (возможно, после уменьшения радиуса круга $\mathbb{K}$) множества B_0 и $\mathbb{K}$ удовлетворяют условиям утверждения (II) теоремы 1 (B_0 выступает в роли G_t, а $\mathbb{K}$ — в роли D_z). Таким образом, для каждого $t \in B_0$ функция $H(z,t)$ однозначно определена в $\mathbb{K}$ и является там (ν,μ)-решением. Поэтому каждое из разностных отношений

$$\frac{H(z,t+\Delta\xi) - H(z,t)}{\Delta\xi}, \quad \frac{H(z,t+i\Delta\eta) - H(z,t)}{\Delta\eta}$$

является (ν,μ)-решением в $\mathbb{K}$, если только $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ вещественны, отличны от нуля и достаточно малы по модулю.

Сославшись на теорему II.5.2(II) в [6] (и привлекая при этом равенство (15) и теорему 1 (II) настоящей статьи), приходим к выводу, что пределы этих разностных отношений при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\eta \to 0$ существуют и равномерно ограничены при $(t,z) \in B_0 \times \mathbb{K}$. (Указание. Нужно выразить разностные отношения в терминах функций $\operatorname{Re} M(t,z)$ и $\operatorname{Im} N(t,z)$. В качестве множества $\mathfrak{M}$, фигурирующего в [6, теорема II.5.2], берется множество функций вида $M(\cdot,z)$ либо вида $N(\cdot,z)$, где параметр z пробегает круг $\mathbb{K}$. Множество $\mathfrak{P}$ из той же теоремы в нашем случае состоит из единственной пары (ν,μ)). Более того, доказательство теоремы II.5.2 в [6] показывает (или с помощью теоремы о среднем значении для производных получается), что эти разностные отношения и сами равномерно ограничены при $(t,z) \in B \times \mathbb{K}$. Поэтому $H_\xi(z,t)$, $H_\eta(z,t)$ (где $t = \xi + i\eta$) — (ν,μ)-решения в $\mathbb{K}$, равномерно ограниченные при каждом $t \in B$.

Поскольку функции ν и μ гладкие, производные $H_{\xi z}(z,t)$ и $H_{\xi\bar z}(z,t)$ непрерывны и равномерно ограничены на $\mathbb{K}$ при всяком $t \in B$. Поэтому в выражении

$$\int_B v^*(t) H_\xi(z,t)\,d\sigma_t, \quad \text{где } v^*(t) = \frac{-1}{4\pi I(\mathbb{S})} v(t) \frac{\partial |A(t)|^2}{\partial \eta},$$

можно дифференцировать под знаком интеграла, так что оно тоже является (ν,μ)-решением в $\mathbb{K}$. То же относится к остальным трем членам, входящим в $i\int_{\mathbb{S}} v[H(z,\cdot)]d\sigma$. Так как точка z_0 произвольна, отсюда вытекает, что $F(z) := i\int_{\mathbb{S}} v[H(z,\cdot)]d\sigma$ есть (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}\setminus\mathfrak{R}$ (если ν и μ гладкие).

Покажем теперь, что $F(\infty) = 0$. Заметим сначала, что

$$H(z,t) = \log(z-t) + a(z,t),$$

где $a(z,t)$ — функция, аналитическая по z в области $\{|z| > R^*\}$ при каждом $t \in \mathbb{C}$ и

$$\lim_{z\to\infty} a(z,t) = 0, \quad t \in \mathbb{C}$$

[6, определение IV.3.3].

Пусть $U(\infty) = \{|z| > R_\infty\}$, где R_∞ — постоянная, большая числа $\max\{R^*, \sup\{|z| : z \in \mathfrak{R}\}\}$. Разностное отношение

$$\Delta(z,t,n) := \frac{H(z,t+h_n) - H(z,t)}{h_n},$$

где числа h_n вещественны и отличны от нуля, $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, при каждом n является аналитической функцией переменной z в замыкании области $U(\infty)$, причем эта функция равна нулю в точке ∞. В силу принципа максимума модуля функция $|\Delta(z,t,n)|$ в замыкании области $U(\infty)$ достигает максимума на окружности $\{|z| = R_\infty\}$. Рассуждения из начала доказательства показывают, что на этой окружности функции $\Delta(z,t,n)$ ограничены равномерно по $t \in \mathfrak{R}$ и по всем n (нужно покрыть множество $\{|z| = R_\infty\}$ конечным числом достаточно малых кругов). Поэтому аналитические функции $\Delta(\cdot,t,n)$ равномерно ограничены также и в $U(\infty)$ по всем n и $t \in \mathfrak{R}$. Производная $H_\xi(z,t)$ тоже ограничена в $U(\infty)$ равномерно по $t \in \mathfrak{R}$; кроме того, $H_\xi(\infty,t) = 0$. Поэтому интеграл $\int_B v^*(t)H_\xi(x,t)d\sigma_t$ тоже обращается в нуль при $z = \infty$ (например, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Таким же образом приходим к аналогичному выводу для оставшихся членов в $i\int_{\mathbb{S}} v[H(z,\cdot)]d\sigma$, а также для $i\int_{\mathbb{S}} v[H^-(z,\cdot)]d\sigma$.

Для коэффициентов ν и μ, удовлетворяющих лишь условиям (9), (10), теорема 4 теперь получается из теоремы 1 и, например, теоремы II.4.1 в [6]. •

Далее, с помощью теоремы 1 очевидным образом получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть E — ограниченное измеримое подмножество плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что ν и μ удовлетворяют условиям* (9) *и* (10), *а v_1 и v_2 — вещественные функции из $L_p(E)$, $p > 2$. Тогда функция*

$$\int_E (v_1(t)H_\xi(z,t) + v_2(t)H_\eta(z,t))d\sigma_t,$$

$t = \xi + i\eta$, есть (ν,μ)-решение на множестве $\mathbb{C}\setminus$(замыкание множества E), обращающееся в нуль в точке ∞.

Для доказательства нужно просто аппроксимировать функции $v_j(t)\chi_E(t)$ (χ_E — характеристическая функция множества E) подходящими непрерывными функциями, применить теорему 4 и провести предельный переход, основанный на теореме 1.

Более детальный анализ (требующий, однако, усиления теоремы 1 (II)) показывает, что теорема 5 верна и при $p = 1$.

§4. Разложение (ν,μ)-решений

Пусть теперь G — двусвязная область в $\mathbb{C}$ и пусть

$$G_1 = G \cup D_1, \text{ где } D_1 \text{ — ограниченная компонента множества } \mathbb{C}\setminus G,$$
$$G_2 = G \cup D_2, \text{ где } D_2 \text{ — неограниченная компонента множества } (\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus G.$$

Если иное не указано явно, коэффициенты ν и μ считаются подчиненными условиям (9) и (10).

Теорема 6. *Пусть f — (ν,μ)-решение в G. Тогда существуют единственные (ν,μ)-решения f_1 в G_1 и f_2 в G_2 такие, что $f = f_1 + f_2$ в G и $f_2(\infty) = 0$.*

Функция f_1 называется *регулярной частью*, а функция f_2 — *главной частью* функции f относительно области G.

Доказательство. Пусть E_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность открытых множеств таких, что $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \subset\subset G$ при всех n и $\bigcup_n E_n = G$. Тогда существуют две последовательности $\mathbb{S}_n^1$, $\mathbb{S}_n^2$ лент в G такие, что

$$\mathbb{S}_{n+1}^2 \prec \mathbb{S}_n^2 \prec \mathbb{S}_n^1 \prec \mathbb{S}_{n+1}^1$$

и

$$\mathbb{S}_n^2 \prec E_n \prec \mathbb{S}_n^1$$

при всех n. В силу теоремы 3 и формулы (14)

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{S}_m^1} (u[H^-(z,\cdot)] + iv[H(z,\cdot)])d\sigma - \int\limits_{\mathbb{S}_l^2} (u[H^-(z,\cdot)] + iv[H(z,\cdot)])d\sigma$$

при $z \in E_n$, если m, $l \leqslant n$.

Положим

$$f_{j,m}(z) = (-1)^{j-1} \int\limits_{\mathbb{S}_m^j} (u[H^-(z,\cdot)] + iv[H(z,\cdot)])d\sigma, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$f(z) = f_{1,m}(z) + f_{2,l}(z) \text{ в } E_n, \quad m, l \geqslant n.$$

Зафиксировав l, получаем отсюда, что $f_{1,m}(z)$ не зависит от m при $z \in E_n$. В силу теоремы 4, функция $f_{1,m}(z)$ является (ν,μ)-решением, в частности, во внутренней области ленты $\mathbb{S}_n^1$, а по теореме единственности для (ν,μ)-решений $f_{1,m}(z)$ не зависит от m и там. Следовательно,

$$f_1(z) := \lim_{m\to\infty} f_{1,m}(z)$$

является (ν,μ)-решением во внутренней области ленты $\mathbb{S}_n^1$ при каждом n, т.е. $f_1(z)$ — (ν,μ)-решение в G_1 и

$$f(z) = f_1(z) + f_{2,l}(z) \text{ в } E_n, \quad l \geqslant n.$$

Таким же образом находим теперь функцию f_2 с объявленными свойствами. Единственность функций f_1 и f_2 следует из теоремы Лиувилля для (ν,μ)-решений. •

Если ограниченная компонента дополнения $\mathbb{C}\setminus G$ состоит из единственной точки a, то главная часть функции f относительно G называется *главной частью функции f в точке a*. Если неограниченная компонента дополнения $\mathbb{C} \setminus G$ пуста, то регулярная часть функции f относительно G называется *главной частью функции f в точке ∞*.

Разумеется, у теоремы 6 имеется очевидный аналог для n-связных областей в G. Сформулируем его лишь в одном частном случае.

Теорема 7. *Пусть f — (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$, где $a_1,\ldots,a_N$ — конечные точки. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i)

$$f(z)=f_1(z,\infty)+\sum_{j=1}^{N}f_2(z,a_j),$$

где $f_1(z,\infty)$ и $f_2(z,a_j)$ — главные части функции f в точках ∞ и a_j соответственно.

(ii) *Если a_j — полюс функции f, то и функция $f_2(z,a_j)$ тоже имеет полюс в точке a_j. Если a_j — существенная особая точка для f, то a_j будет таковой же для $f_2(z,a_j)$. Аналогичные утверждения верны для $f_1(z,\infty)$.*

В случае, когда ν и μ удовлетворяют, например, условию Боярского в точке a_j (см. формулу (19) ниже), теорема 8 в §5 позволит сказать больше о таком разложении.

Доказательство. Пусть $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ — главная часть (обычного) лоранова разложения функции f в точке ∞. Тогда

$$UP(\cdot)(z)=:f_1(z,\infty)$$

(U — преобразование, определенное в [6, теорема IV. 1.9]) есть (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}$, и главная часть его обычного лоранова разложения в точке ∞ та же, что и у f. Следовательно, $f^*(z):=f(z)-f_1(z,\infty)$ — тоже (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$, причем $f^*(\infty)=0$.

Пусть $f_2^*(z,a_j)$ — главная часть функции f^* в точке a_j, т.е. единственное (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}\setminus\{a_j\}$, обращающееся в нуль в бесконечности и удовлетворяющее равенству

$$f^*(z)=f_1^*(z)+f_2^*(z,a_j),$$

где $f_1^*(z)$ — (регулярное) (ν,μ)-решение в (заполненной) окрестности точки a_j. Единственность такого разложения снова очевидным образом вытекает из теоремы Лиувилля. Как и в доказательстве теоремы 6, функция $f_2^*(z,a_j)$ получается как предел последовательности

$$-\operatorname{Re}\int_{\mathbb{S}_n}f^*(t)[M(t,z)]d\sigma_t-i\operatorname{Im}\int_{\mathbb{S}_n}f^*(t)[N(t,z)]d\sigma_t,$$

в которой можно взять, например, $\mathbb{S}_n=(\mathfrak{R}_n,A)$, $\mathfrak{R}_n=\{t:r_{1n}\leqslant|t-a_j|\leqslant r_{2n}\}$, где $0<r_{1n}<r_{2n}$ при $n\in\mathbb{N}$, $r_{2n}\to 0$ при $n\to\infty$, а $A(t)=t-a_j$.

Если определить тем же способом главную часть $f_2(z,a_j)$ функции f в точке a_j, то получится $f_2(z,a_j)=f_2^*(z,a_j)$, поскольку $f(z)-f^*(z)$ есть (ν,μ)-решение даже во всей плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому

$$h(z):=f^*(z)-\sum_{j=1}^{N}f_2(z,a_j)$$

— это (ν,μ)-решение в $\mathbb{C}\setminus\{a_1, a_2, \dots a_N\}$, обращающееся в нуль в ∞ и имеющее устранимые особенности в точках a_j. Из теоремы Лиувилля получается утверждение (i). Тогда утверждение (ii) сразу вытекает, например, из теоремы Касорати–Вейерштрасса для (ν,μ)-решений.

В аналитическом случае, когда $\nu(z) = \mu(z) \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, теорема 6 — немедленное следствие интегральной формулы Коши и простых свойств интегралов Коши. Если, вдобавок, $a_1, \dots, a_N$ и ∞ — не более, чем полюса, то теорема 7 (i) говорит просто о разложении функции f в сумму простейших дробей.

§5. Обобщенные лорановы разложения для (ν,μ)-решений

Пусть теперь G — кольцо. Без потери общности можно считать, что

$$G = \{z : \rho < |z| < \rho^*\}, \quad \text{где } 0 \leqslant \rho < \rho^* \leqslant \infty. \tag{17}$$

Если не оговорено противное, лента $\mathbb{S} = (\mathfrak{R}, A)$ в G будет иметь специальный вид

$$\mathfrak{R} = \{z : R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2\} \quad \text{при } \rho < R_1 < R_2 < \rho^* \tag{18}$$

и $A(z) \equiv z$ в $\mathfrak{R}$.

Про коэффициенты ν и μ предполагается, что они удовлетворяют условиям (9) и (10), а также условию Боярского [4, с. 499] в центре кольца G, т.е.

$$\frac{\nu(z) - \nu(0)}{z}, \ \frac{\mu(z) - \mu(0)}{z} \in L_p(\mathbb{C}), \quad p > 2. \tag{19}$$

Тогда существуют обобщенные степени $[az^n]_{\nu,\mu}$ для (ν,μ)-системы (а также для $(\nu,\overline{\mu})$-системы и для $(\nu,-\overline{\mu})$-системы) и они однозначно определены. Зададимся вопросом о разложениях (ν,μ)-решения f в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_n z^n]_{\nu,\mu} \tag{20}$$

в кольце G или хотя бы в каком-то его подмножестве.

Как в [10], положим

$$\Lambda(z, g) := \left(1 - \frac{\bar{z}}{z}\nu(z)\right)g(z) - \mu(z)\overline{g(z)}. \tag{21}$$

Далее, пусть

$$\Omega_j(t, g) := \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial[t^{-j}]_{\nu,\overline{\mu}}}{\partial t} t\Lambda(t, g)\right\} + i \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial[t^{-j}]_{\nu,-\overline{\mu}}}{\partial t} t\Lambda(t, g)\right\} \tag{22}$$

для каждого $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и пусть

$$\begin{aligned} \Omega_0(t, z, g) &:= \operatorname{Re}\{M_t(t, z) t\Lambda(t, g)\} + i \operatorname{Im}\{N_t(t, z) t\Lambda(t, g)\}, \\ \Omega_0(t, g) &:= \Omega_0(t, 0, g). \end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим ленту $\mathbb{S} = (\mathfrak{R}, \mathrm{id})$ в G, и пусть g— (ν,μ)-решение в G. Простое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{S}} g(t)[[t^{-j}]_{\nu,\bar{\mu}}]d\sigma_t + i\,\mathrm{Im}\int\limits_{\mathbb{S}} g(t)[[t^{-j}]_{\nu,-\bar{\mu}}]d\sigma_t \\ = \frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_j(t,g)d\sigma_t\end{aligned} \tag{24}$$

для $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int\limits_{\mathbb{S}} g[M(\cdot,z)]d\sigma + i\,\mathrm{Im}\int\limits_{\mathbb{S}} g[N(\cdot,z)]d\sigma \\ = \frac{1}{2\pi I(\mathbb{S})}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_0(t,z,g)d\sigma_t\end{aligned} \tag{25}$$

при $z \notin \mathfrak{R}$. Следовательно, по теореме 2(i) для каждого $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ величина

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_j(t,g)d\sigma_t \tag{26}$$

не зависит от $\mathfrak{R}$ (если $\mathfrak{R}$ — кольцо, как в (18)). В силу (14) и (25) имеем

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_0(t,g)d\sigma_t = g_1(0) \tag{27}$$

для каждого кольца $\mathfrak{R}$, как в (18), где g_1 — регулярная часть решения g относительно области G (см. теорему 6 и ее доказательство). Поэтому левая часть в (27) не зависит от $\mathfrak{R}$.

Следующая теорема проясняет вопрос об обобщенных лорановых разложениях, упомянутых выше.

Теорема 8. *Пусть область G — такая, как в* (17), *f — (ν,μ)-решение в G, причем коэффициенты ν, μ удовлетворяют условиям* (9), (10) *и* (19). *Если f_1 и f_2 — это соответственно регулярная и главная части функции f относительно G, то*

$$\text{(i)}\quad f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty}[a_j z^j]_{\nu,\mu} \quad \text{в } \{|z| < p^*\kappa^{-2}\}$$

(где $[a_0 z^0]_{\nu,\mu} := a_0$) и

$$\text{(ii)}\quad f_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty}[a_{-j} z^{-j}]_{\nu,\mu} \quad \text{в } \{|z| > \rho\kappa^2\}.$$

Здесь $\kappa \in [1, \infty)$ — *постоянная, зависящая только от* ν *и* μ (*см.* (32) *ниже*). *Ряды в* (i) *и* (ii) *сходятся абсолютно и равномерно на каждом компактном подмножестве соответствующей области. Постоянные* a_j, $j \in \mathbb{Z}$, *определены однозначно и вычисляются по формулам*

$$a_j = \frac{-1}{j(1-|b|^2)}\left\{ \operatorname{Re}\int_{\mathbb{S}} f(t)[[t^{-j}]_{\nu,\bar{\mu}}]d\sigma_t + i\operatorname{Im}\int_{\mathbb{S}} f(t)[[t^{-j}]_{\nu,-\bar{\mu}}]d\sigma_t \right\}$$

при $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *и*

$$a_0 = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{S}} f(t)[M(t,0)]d\sigma_t + i\operatorname{Im}\int_{\mathbb{S}} f(t)[N(t,0)]d\sigma_t,$$

где $\mathbb{S}$ — *любая лента в* G, *гомотопная ленте, описанной в* (18), *а* b *есть некоторое алгебраическое выражение от* $\nu(0)$, $\mu(0)$, *причем* $|b| \leqslant k$ [6, с.52].

Итак, если $\frac{\rho^*}{\rho} > \kappa^4$, то области сходимости рядов (i), (ii) пересекаются, так что сама функция f допускает разложение (20). Это (разумеется, лишь достаточное) условие наверняка выполнено, если $\rho = 0$ или $\rho^* = \infty$. В частности, (ν, μ)-решение f обладает обобщенным лорановым разложением вблизи любой изолированной особенности. При этом тип разложения соответствует в обычном смысле типу особенности. Например, если мы имеем дело с полюсом порядка N, то разложение имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} [a_n z^n]_{\nu,\mu}, \quad \text{где } a_{-N} \neq 0.$$

Это очевидным образом вытекает из общих свойств (ν, μ)-решений вблизи полюсов, удволетворяющих условию (19) [6, теорема III.3.2], из асимптотического поведения обобщенных степеней и из единственности коэффициентов a_j в теореме 8.

В случае уравнения Бельтрами ($\mu \equiv 0$) формулы для a_j упрощаются:

$$a_j = \frac{-1}{j}\int_{\mathbb{S}} f(t)\left[[t^{-j}]_{\nu,0}\right]d\sigma_t, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

(потому что $b = 0$, если $\mu(0) = 0$) и

$$a_0 = \int_{\mathbb{S}} f(t)[\log[t^1]_{\nu,0}]d\sigma_t.$$

При этом $[t^k]_{\nu,0} = ([t^1]_{\nu,0})^k$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Если еще и $\nu \equiv 0$ в $\mathbb{C}$, то $[t^1]_{\nu,0} \equiv t$, $\kappa = 1$ и

$$a_j = \frac{-1}{j}\int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[t^{-j}]d\sigma_t, \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

$$a_0 = \int\limits_{\mathbb{S}} f(t)[\log t]d\sigma_t$$

— обычные лорановы коэффициенты аналитической функции f в кольце G, записанные в виде интегралов по ленте. К этим формулам можно прийти и непосредственно, применив процедуру усреднения из §2 к обычным выражениям для a_j через контурные интегралы.

Доказательство теоремы 8. Начнем с утверждения (ii). В силу теоремы 6 f_2 является (ν,μ)-решением в области $G_2 = \{|z| > \rho\}$, обращающимся в нуль в точке ∞. Примерив к f_2 (в G_2) соображения, связанные с формулами (26) и (27), мы увидим, что при каждом $j \in \mathbb{Z}$ выражение

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_j(t, f_2)d\sigma_t$$

не зависит от $\mathfrak{R} = \{z : r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, каковы бы ни были r_1 и r_2, $\rho < r_1 < r_2 < \infty$.

Для начала предположим, что функция f_2 допускает разложение, о котором шла речь выше. Тогда существует кольцо $\mathfrak{R} = \{z : r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\}$, содержащееся в G, в котором разложение для f_2 сходится равномерно. Поэтому для $l \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, f_2)d\sigma_t = \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, [a_{-j}t^{-j}]_{\nu,\mu})d\sigma_t,$$

и, кроме того, это верно даже для любого кольца $\mathfrak{R}$ с $\rho < r_1 < r_2 < \infty$ и центром в нуле.

В силу [10, теорема 3] получаем

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, [at^n]_{\nu,\mu})d\sigma_t = -na(1-|b|^2)\delta_{l,n} \tag{28}$$

при всех l, $n \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$. Здесь b — постоянная, упомянутая в теореме 8, а $\delta_{l,n}$ — символ Кронекера.

Значит, при $j \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$j(1-|b|^2)a_{-j} = \frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_{-j}(t, f_2)d\sigma_t = \frac{1}{|\mathfrak{R}^*|}\int\limits_{\mathfrak{R}^*} \Omega_{-j}(t, f)d\sigma_t \tag{29}$$

(при этом последнее уравнение — интегральная теорема Коши, примененная к регулярной части f_1 функции f, где $\mathfrak{R}^*$ — кольцо с центром в нуле и содержащееся в G).

Исследуем теперь сходимость ряда в правой части формулы (ii), когда коэффициенты a_j определены равенством (29). Прежде всего, имеет место оценка

$$|a_{-j}|(1-|b|^2)j \leqslant \frac{1}{\pi(r_2^2-r_1^2)} \int\limits_{r_1<|t|<r_2} \left(\left|\frac{\partial[t^j]_{\nu,-\bar\mu}}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial[t^j]_{\nu,\bar\mu}}{\partial t}\right|\right)|t\Lambda(t,f_2)|d\sigma_t. \quad (30)$$

Далее,

$$[t^j]_{\nu,\bar\mu} = (\chi_1(t))^j, \quad [t^j]_{\nu,-\bar\mu} = (\chi_2(t))^j, \quad (31)$$

где χ_1 и χ_2 — $\frac{1+k}{1-k}$-квазиконформные отображения плоскости $\mathbb{C}$ на себя такие, что $\chi_1(0)=\chi_2(0)=0$. В силу [12] существует постоянная $\kappa \geqslant 1$, зависящая лишь от k, от L_p-норм функций $\frac{\nu(z)-\nu(0)}{z}$ и $\frac{\mu(z)-\mu(0)}{z}$ и от R^*, такая, что для χ, совпадающей либо с χ_1, либо с χ_2 из (31), и всякого $j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, имеем

$$\kappa \geqslant \left|\frac{\chi(t)}{t}\right| \geqslant \frac{1}{\kappa}, \quad t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \quad (32)$$

(По поводу конкретных значений постоянной κ в специальных случаях см. [19, p. 107] и [16]).

Положив $M(r,h) = \max\{|h(t)| : |t| = r\}$, найдем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_1<|t|<r_2} \left|\frac{\partial[t^j]_{\nu,\bar\mu}}{\partial t}\right| |t\Lambda(t,f_2)|d\sigma_t \\
&\leqslant j \int\limits_{r_1<|t|<r_2} |\chi_{1t}(t)| \left|\frac{\chi_1(t)}{t}\right|^{j-1} |t|^j(1+k)|f_2(t)|d\sigma_t \\
&\leqslant (1+k)j\kappa^{j-1}M(r_1,f_2)\left(\int\limits_{r_1<|t|<r_2} |\chi_{1t}(t)|^2 d\sigma_t\right)^{1/2} \cdot \sqrt{\pi(r_2^2-r_1^2)}\,r_2^j.
\end{aligned}$$

Далее, в силу (32) и неравенства $|\chi_{\bar t}| \leqslant k|\chi_t|$ имеем

$$\int\limits_{r_1<|t|<r_2} |\chi_t(t)|^2 d\sigma_t \leqslant \frac{\pi\kappa^2 r_2^2}{1-k^2} \quad (33)$$

при $\chi=\chi_1$ или $\chi=\chi_2$.

Пусть теперь $r_2 = dr_1$, где $d>1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi(d^2r_1^2-r_1^2)} \int\limits_{r_1<|t|<dr_1} \left|\frac{\partial[t^j]_{\nu,\bar\mu}}{\partial t}\right| |t\Lambda(t,f_2)|d\sigma_t \\
&\leqslant j\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}M(r_1,f_2)\frac{d}{\sqrt{d^2-1}}(dr_1\kappa)^j.
\end{aligned}$$

Такая же оценка имеется для второго члена в правой части формулы (30). Следовательно, при любых фиксированных $d > 1$ и $r_1 > \rho$ и всех $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$|a_{-j}| \leqslant \frac{2M(r_1, f_2)}{\sqrt{(1-k)^3}} \frac{d}{\sqrt{d^2-1}} (dr_1\kappa)^j. \tag{34}$$

В силу [12]

$$|[az^l]_{\nu,\mu}| \leqslant |a|\kappa^{|l|}|z|^l \tag{35}$$

при всех $l \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно,

$$|[a_{-j}z^{-j}]_{\nu,\mu}| \leqslant |a_{-j}|\kappa^j|z|^{-j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

что, в соединении с (34), дает абсолютную и равномерную сходимость ряда в правой части формулы (ii) на каждом компактном подмножестве области $G_2^* := \{|z| > \kappa^2\rho\}$.

Теперь надо показать, что функция

$$h(z) := f_2(z) - \sum_{j=1}^{\infty} [a_{-j}z^{-j}]_{\nu,\mu}$$

обращается в нуль тождественно на G_2^*. Во всяком случае, h — (ν,μ)-решение в G_2^* и $h(\infty) = 0$. Если $h \not\equiv 0$, то h обладает лорановым разложением

$$h(z) := \frac{\alpha_m}{z^m} + \frac{\alpha_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots$$

в бесконечности, в котором $m \geqslant 1$ и $\alpha_m \neq 0$. Существует ровно одна функция вида $[c_{-m}z^{-m}]_{\nu,\mu}$ с $c_{-m} \neq 0$, ряд Лорана которой в бесконечности начинается с $\frac{\alpha_m}{z^m}$. Следовательно,

$$g(z) := h(z) - [c_{-m}z^{-m}]_{\nu,\mu}$$

— (ν,μ)-решение в G_2^*, и

$$g(z) = \frac{\beta_{m+1}}{z^{m+1}} + \frac{\beta_{m+2}}{z^{m+2}} + \dots \tag{36}$$

при $|z| > \max\{R^*, \kappa^2\rho\} =: R^{**}$.

В силу (28) и (29) имеем

$$\int_{\mathfrak{R}} \Omega_{-m}(t,h)d\sigma_t = 0 \tag{37}$$

для всякого кольца $\mathfrak{R} = \{r : r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\} \subset G_2^*$. С другой стороны, из (28) вытекает равенство

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int_{\mathfrak{R}} \Omega_{-m}(t, [c_{-m}t^{-m}]_{\nu,\mu} + g(t))d\sigma_t$$

$$= mc_{-m}(1 - |b|^2) + \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int_{\mathfrak{R}} \Omega_{-m}(t, g(t))d\sigma_t. \tag{38}$$

Приняв во внимание (31) (с $j = m$) и (32), получим

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_{-m}(t, g(t))d\sigma_t\right| \\
&\quad\leqslant \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\int\limits_{\mathfrak{R}} \left(|\chi_{1t}\chi_1^{m-1}| + |\chi_{2t}\chi_2^{m-1}|\right)|t|(1+k)|g(t)|d\sigma_t \\
&\quad\leqslant \frac{m(1+k)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\int\limits_{\mathfrak{R}} (|\chi_{1t}| + |\chi_{2t}|)\kappa^{m-1}|t|^m|g(t)|d\sigma_t \\
&\quad\leqslant \frac{m(1+k)\kappa^{m-1}}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\left(\int\limits_{\mathfrak{R}} (|\chi_{1t}| + |\chi_{2t}|)^2 d\sigma_t\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathfrak{R}} |t^m g(t)|^2 d\sigma_t\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Пусть, например, $r_2 = 2r$, $r_1 > R^{**}$. Из (33) и (36) получаем, что

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_{-m}(t, g(t))d\sigma_t = O\left(\frac{1}{r_1}\right). \tag{40}$$

Устремляя r_1 к ∞, из (37) и (38) получаем противоречие с условием $c_{-m} \neq 0$. Поэтому $h(z) \equiv 0$ в G_2^*.

Теперь докажем утверждение (i). В силу [11] разложение (i) со свойствами, упомянутыми в теореме 8, существует при дополнительных условиях

$$\lim_{z\to 0} \nu(z) = \nu(0), \quad \lim_{z\to 0} \mu(z) = \mu(0).$$

В [12] отмечалось, что потом это условие можно снять. Однако мы сейчас покажем, что его можно избежать с самого начала.

Так как функция f_1 — регулярная часть функции f относительно области G, то f_1 — (ν, μ)-решение в области $G_1 = \{|z| < \rho^*\}$. Если у f_1 имеется разложение (i) с нужными свойствами, то существует кольцо $\mathfrak{R} = \{z : r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2\} \subset G_1$ такое, что

$$\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, f_1)d\sigma_t = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, [a_j t^j]_{\nu,\mu})d\sigma_t$$

при $l \in \mathbb{Z}$, а величина

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_l(t, f_1)d\sigma_t$$

при фиксированном l не зависит от кольца $\mathfrak{R}$ описанного вида. С помощью (28) получаем для такого кольца $\mathfrak{R}$ и для кольца $\mathfrak{R}^*$, описанного в (29),

$$-j(1 - |b|^2)a_j = \frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_j(t, f_1)d\sigma_t = \frac{1}{|\mathfrak{R}^*|}\int\limits_{\mathfrak{R}^*} \Omega_j(t, f)d\sigma_t \tag{41}$$

при каждом $j \in \mathbb{N}$ (при этом последнее равенство следует, например, из уже установленного разложения (ii) функции f_2), а также

$$a_0 = f_1(0) = \frac{1}{|\mathfrak{R}|}\int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_0(t, f_1)d\sigma_t$$
$$= \frac{1}{|\mathfrak{R}^*|}\int\limits_{\mathfrak{R}^*} \Omega_0(t, f)d\sigma_t \tag{42}$$

(в силу (27) и теоремы 3(ii)).

По аналогии с (30) и (31) (с заменой j на $-j$) получаем оценку

$$|a_j|(1-k^2) \leqslant \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\int\limits_{\mathfrak{R}} \left(|\chi_{1t}\chi_1^{-j-1}| + |\chi_{2t}\chi_2^{-j-1}|\right)|t\Lambda(t, f_1(t))|d\sigma_t \tag{43}$$

при $j \geqslant 1$, где снова χ_1 и χ_2 — $\frac{1+k}{1-k}$-квазиконформные отображения плоскости $\mathbb{C}$ на себя, удовлетворяющие условию (32). Отсюда следует, что

$$|a_j|(1-k) \leqslant \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\int\limits_{\mathfrak{R}} (|\chi_{1t}| + |\chi_{2t}|)\kappa^{j+1}|t|^{-j}|f_1(t)|d\sigma_t$$
$$\leqslant \frac{\kappa^{j+1}M(r_2, f_1)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\left[\left(\int\limits_{\mathfrak{R}} |\chi_{1t}|^2 d\sigma_t\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\mathfrak{R}} |\chi_{2t}|^2 d\sigma_t\right)^{1/2}\right]\left(\int\limits_{\mathfrak{R}} |t|^{-2j} d\sigma_t\right)^{1/2}.$$

В силу (33) и (35) последняя оценка очевидным образом влечет равномерную сходимость ряда в правой части формулы (i) на любом компактном подмножестве круга $G_1^* := \{z : |z| < \rho^*\kappa^{-2}\}$.

Нужно доказать еще, что

$$h_1(z) = f_1(z) - \sum_{j=0}^{\infty}[a_j z^j]_{\nu,\mu} \equiv 0 \quad \text{в } G_1^*.$$

Во всяком случае, функция h_1 — (ν, μ)-решение в G_1^* и $h_1(0) = 0$. Если $h_1 \not\equiv 0$, то h_1 обладает в нуле асимптотическим разложением

$$h_1(z) = c_m(z + \mathfrak{b}\bar{z})^m - b\overline{c_m}(\bar{z} + \bar{\mathfrak{b}}z)^m + O(|z|^{m+\alpha}),$$

где $\mathfrak{b}$ (подобно b) — алгебраическое выражение от $\nu(0)$ и $\mu(0)$, не превосходящее k, α — положительная постоянная, m — целое число, большее или равное единице, а $c_m \neq 0$ [6, с.70]. Следовательно,

$$h_1(z) - [c_m z^m]_{\nu,\mu} =: g_1(z)$$

есть (ν, μ)-решение в G_1^*, $g_1(z) = O(|z|^{m+\alpha})$, а поэтому еще и $g_1(z) = O(|z|^{m+1})$. По аналогии с (37), (38) получаем

$$0 = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_m(t, h_1) d\sigma_t$$
$$= -mc_m(1 - |b|^2) + \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_m(t, g_1(t)) d\sigma_t. \tag{44}$$

Далее, как в (39), имеем

$$\left| \frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_m(t, g_1(t)) d\sigma_t \right|$$
$$\leqslant \frac{m(1+k)\kappa^{m+1}}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left(\int\limits_{\mathfrak{R}} (|\chi_{1t}| + |\chi_{2t}|)^2 d\sigma_t \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\mathfrak{R}} |t^{-m} g_1(t)|^2 d\sigma_t \right)^{1/2}.$$

Положив, например, $r_1 = \frac{1}{2} r_2$ так же, как в (40), убеждаемся в том, что

$$\frac{1}{|\mathfrak{R}|} \int\limits_{\mathfrak{R}} \Omega_m(t, g_1(t)) d\sigma_t = O(r_2) \tag{45}$$

при $r_2 \to 0$. Таким образом, предположение $h_1 \not\equiv 0$ приводит к противоречию.

Что касается оставшихся утверждений в теореме 8, то тут достаточно сослаться на (29), (41), (27), (24), (25) и теорему 2, а также на то, что регулярная и главная часть (относительно G) нулевой функции сами тождественно равны нулю. •

§6. Доказательство теоремы 1

Чтобы доказать утверждение (I), зафиксируем сначала открытое множество B^* такое, что

$$B \Subset B^* \Subset B_0.$$

Затем положим $\nu^*(z) = \nu(z)$, $\mu^*(z) = \mu(z)$ при $z \in B^*$ и $\nu^*(z) = \mu^*(z) = 0$ при всех прочих $z \in \mathbb{C}$. Свернув ν, μ и ν^*, μ^* с подходящими сглаживающими функциями $\omega_n(\cdot)$, мы получим последовательности ν_n, μ_n и ν_n^*, μ_n^*, каждая из которых удовлетворяет (а)–(г) и, более того,

$$\nu_n^*(z) = \nu_n(z), \quad \mu_n^*(z) = \mu_n(z), \qquad z \in B$$

при $n \geqslant n_0$ (n_0 зависит лишь от выбора функций ω_n и множества B^*).

Пусть U и U_n — интегральные преобразования, отвечающие соответственно функциям ν^*, μ^* и ν_n^*, μ_n^*, как это описано в [6, теорема IV.1.9]. В B_0

существует однозначно определенная функция $g(\cdot)$, аналитичная в B^*, и такая, что

$$Ug(z) = f(z) \quad \text{в } B_0.$$

Из свойств преобразований U и U_n [6, 9] почти мгновенно следует, что функции $f_n(z) := U_n g(z)$ — (ν, μ)-решения в B, сходящиеся равномерно к $f(z)$ на любом компактном подмножестве в B_0 при $n \to \infty$. Этим доказана часть (I) теоремы 1.

Докажем часть (II). В силу [6, IV.1 и IV.3] верно равенство

$$H_n(t, z) = \log(t - z) + \frac{1}{\pi} \int \frac{F_n(\zeta, z)}{\zeta - t} d\sigma_\zeta,$$

где $F_n(\cdot, z)$ — единственное решение уравнения

$$F_n(t, z) = -\frac{\nu_n(t)}{t - z} - \frac{\mu_n(t)}{\overline{t - z}} + \nu_n(t) T F_n(\cdot, z)(t) + \mu_n(t) \overline{T F_n(\cdot, z)(t)}, \tag{46}$$

лежащее в $L_s(\mathbb{C})$, где число s удовлетворяет соотношениям

$$kC(s) < 1, \quad 1 < s < 2;$$

здесь $C(s)$ — норма комплексного преобразования Гильберта $T : L_s(\mathbb{C}) \to L_s(\mathbb{C})$.

L_s-норма неоднородного члена в (46) равномерно ограничена при $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$, причем, очевидно, оценки зависят лишь от k, R^* и $s \in (1, 2)$. Поэтому существует постоянная K_0, зависящая лишь от k, R^* и s, такая, что

$$\|F_n(\cdot, z)\|_{L_s(\mathbb{C})} \leqslant K_0.$$

В силу утверждения (в) и условия (10) имеем

$$F_n(t, z) = 0, \quad |t| > R^* + 1.$$

Далее,

$$P_G h(t) := -\frac{1}{\pi} \int\limits_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - t} d\sigma_\zeta$$

— ограниченный оператор из $L_s(G)$ в $L_s(G)$ при $s \in (1, 2)$, какова бы ни была ограниченная область G [20, с.40], причем его норма зависит лишь от s и G.

Следовательно, если $G = G_t$ — область со свойствами, описанными в части (II) теоремы 1, то

$$\|H_n(\cdot, z)\|_{L_s(G_t)} \leqslant K_1, \quad z \in D_z$$

с постоянной K, зависящей лишь от k, R^*, G_t, D_z, s и выбора ветви функции $\arg(t - z)$, $(t, z) \in G_t \times D_z$.

Поскольку функция H_n может быть определена как некоторое (ν_n, μ_n)-решение в G_t при каждом $z \in D_z$, из [6, лемма I, 3.21] вытекает, что

$$|H_n(t,z)| \leqslant K \quad \text{при } (t,z) \in \mathcal{D}_t \times D_z,$$

где K зависит только от k, R^*, G_t, D_z, s_1, выбора ветви функции $\arg(t-z)$ и расстояния от $\partial\mathcal{D}_t$ до ∂G_t. Отсюда следует утверждение (i) части (II).

Оставшиеся утверждения теоремы 1 (II) вытекают из формул

$$H_{nt}(t,z) = \frac{1}{t-z} - TF_n(\cdot,z)(t), \quad H_t(t,z) = \frac{1}{t-z} - TF(\cdot,z)(t)$$

(здесь $F(\cdot,z)$ — решение уравнения (46), в котором вместо ν_n и μ_n выступают ν и μ)). Нужно использовать (46) и аналогичное уравнение для $F(\cdot,z)$, свойства последовательностей ν_n и μ_n, а также свойства нормы преобразования Гильберта T на пространстве L_s (именно равенство $C(2)=1$ и непрерывность функции C на $(1,\infty)$).

Список литературы

[1] Bers L., *Partial differential equations and generalized analytic functions*, I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), 130–136; **37** (1951), 42–47.

[2] Bers L., *Formal powers and power series*, Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956), 693–711.

[3] Bers L., *An outline of the theory of pseudoanalytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 291–331.

[4] Боярский Б. В., *Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами*, Мат. сб. **43** (**85**) (1957), №4, 451–503.

[5] Положий Г. Н., *Теория и применение p-аналитических и (p,q)-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного*, 2-е изд., перераб. и доп., Наук. думка, Киев, 1973.

[6] Renelt H., *Elliptic systems and quasiconformal mappings*, John Wiley and Sons., Ltd., Chichester, 1988.

[7] Renelt H. *Generalized powers in the theory of (ν,μ)-solutions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **40** (1986), 217–235 (1987).

[8] Renelt H., *An integral formula for the derivatives of solutions of certain elliptic systems*, Ann. Polon. Math. **54** (1991), 45–57.

[9] Renelt H., *Smooth approximation of solutions of Cauchy-Riemann systems*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **50** (1996), 191–199.

[10] Renelt H., *Mean value properties of solutions of Cauchy-Riemann systems*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **50** (1996), 201–211.

[11] Renelt H., *Reihenentwicklungen für Lösungen Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungssysteme*, Mitt. Math. Sem. Giessen No. 228 (1996), 31–38.

[12] Renelt H., *On the growth of generalized powers*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **52** (1998), no. 1, 157–167.

[13] Ренельт Х., *Некоторые интегральные преобразования с воспроизводящими свойствами*, Зап. науч. семин. ПОМИ **270** (2000), 292–308.

[14] Rödel K., *Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme*, Preprint no. 07 (2000), Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Fachbereich Math. und Inform., 2000.

[15] Rödel K., *Verallgemeinetre Potenzen für Cauchy-Riemann-Systeme*, Preprint no. 16 (2000), Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Fachbereich Math. und Inform., 2000.

[16] Rödel K., *Verallgemeinerte Potenzen und Fundamentallösungen für Cauchy-Riemann-Systeme mit rotationssymmetrischen Koeffizienten*, Preprint no. 01 (2001), Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Fachbereich Math. und Inform., 2001.

[17] Шабат Б. В., *Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов*, Докл. АН СССР (нов. сер.) **69** (1949), №3, 305-308.

[18] Spitzner J., *Generalized powers for Cauchy-Riemann systems with radially symmetrical coefficients*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **52** (1998), no. 2, 137-147.

[19] Spitzner J., *Parameterabhängigkeit bei Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungssystemen*, Dissertation Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Fachbereich Math. und Inform., 2000. Shaker Verlag 2000.

[20] Векуа И. Н., *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959; Пер. на нем. яз., Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg,
Fachbereich Mathematik und Informatik,
D-06099 Halle/S

Поступило 15 апреля 2001 г.