



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Чубариков, О кратных тригонометрических суммах, связанных с простыми числами, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, номер 6, 3–13

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

26 января 2025 г., 02:27:14



Математика

УДК 511.3

О КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

В. Н. Чубариков¹

Найдены оценки кратных тригонометрических сумм специального вида, подобные современной оценке дзетовой суммы, что позволяет оценить тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей, и соответствующие суммы с простыми числами.

Ключевые слова: кратные тригонометрические суммы; характеры Дирихле; тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей; аналог дзетовых сумм по простым числам; теорема о среднем для кратных тригонометрических сумм.

Estimates of multiple trigonometric sums similar to the modern estimate of the zeta-sum are obtained. This allows us to estimate trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function and corresponding sums with primes.

Key words: multiple trigonometric sums; Dirichlet’s characters; trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function; analogue of the zeta-sum with primes; mean-value theorem for multiple trigonometric sums.

Введение. Цель настоящей статьи — подготовительная работа для оценок сумм по простым числам вида

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \frac{t}{p}}; \quad \sum_{p \leq N} B_s \left(\left\{ \frac{t}{p} \right\} \right); \quad \sum_{p \leq N} (p+l)^{it}, l \neq 0; \quad \sum_{p \leq N} (p+k)^{it} \chi_q(p+k), k \not\equiv 0 \pmod{q},$$

где l, k — целые числа; p пробегает простые числа; $\chi_q(n)$ — характер Дирихле от вычета n по некоторому модулю $q > 1$; $B_s(\{x\})$ — функция Бернулли с номером s от дробной части вещественного числа x .

Первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм с простыми числами и соответствующие фундаментальные постановки задач в теории простых чисел принадлежат И. М. Виноградову [1].

В основе оценок этих сумм по простым лежат оценки при некоторых $v \geq 1$ сумм, скрученных с многомерной функцией делителей числа, имеющих вид

$$\sum_{n \leq N} \tau_v(n) e^{2\pi i \frac{t}{n}}; \quad \sum_{n \leq N} \tau_v(n) B_s \left(\left\{ \frac{t}{n} \right\} \right); \quad \sum_{n \leq N} \tau_v(n) (n+l)^{it}, l \neq 0;$$

$$\sum_{n \leq N} \tau_v(n) (n+k)^{it} \chi_q(n+k), k \not\equiv 0 \pmod{q},$$

где $\tau_v(n)$ — многомерная функция делителей числа n , обозначающая число решений уравнения $n_1 \dots n_v = n$ в натуральных числах n_1, \dots, n_v .

Первым шагом здесь являются оценки кратных тригонометрических сумм с равноправными промежутками изменения переменных суммирования

$$M_s < M'_s \leq 2M_s, M_1 \leq M_s \leq 2M_1, s = 1, \dots, r,$$

¹ Чубариков Владимир Николаевич — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математических и компьютерных методов анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: chubarikov@outlook.com.

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

т.е. сумм вида

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} e^{2\pi i \frac{t}{n_1 \dots n_r}}; \quad \sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} B_s \left(\left\{ \frac{t}{n_1 \dots n_r} \right\} \right);$$

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} (n_1 \dots n_r + l)^{it}, l \neq 0;$$

$$\sum_{M_1 < n_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < n_r \leq M'_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it} \chi_q(n_1 \dots n_r + k), k \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Отметим, что полученные здесь результаты подобны теореме И. М. Виноградова для дзетовых сумм [1–3] (см. также [4, 5]).

Настоящая работа продолжает наши исследования по кратным тригонометрическим суммам с простыми числами [6–8].

1. Формулировка основных утверждений.

Теорема 1. Пусть $n \geq 25, r$ — натуральные числа,

$$M_s \leq M'_s < 2M_s (1 \leq s \leq r), 1 < M_1 \leq M_2, \dots, M_r \leq 2M_1,$$

$$t = M_1^{n-\theta}, 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$S = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i F(m_1 \dots m_r)}, F(x) = \frac{t}{x}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ , такая, что

$$S \ll M_1 \dots M_r M_1^{-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0}, m_0 = r \binom{n+r}{r+1}.$$

Теорема 2. Пусть $n \geq 25, r$ — натуральные числа, $k \neq 0$ — целое,

$$M_s \leq M'_s < 2M_s (1 \leq s \leq r), 1 \leq M_1 \leq M_2, \dots, M_r \leq 2M_1,$$

$$t = M_1^{n-\theta}, 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$T = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln(m_1 \dots m_r + k)}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ , такая, что

$$T \ll M_1 \dots M_r M_1^{-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0}, m_0 = r \binom{n+r}{r+1}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_r), 1 < P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r$, и пусть $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1j}^{t_1} \dots x_{rj}^{t_r} = 0, \quad 0 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n, \quad t_1, \dots, t_r \geq 0,$$

где каждое неизвестное значение x_{ij} принимает все целые значения от 1 до P_i , при этом $P_i \rightarrow \infty$, а постоянные n, k, r являются натуральными числами. Имеем

$$J = J(\mathbf{P}; n, k, r) = \int \cdots \int_{\Omega} |S(\mathbf{A})|^{2k} d\mathbf{A},$$

где

$$S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}; \mathbf{P}; n, k, r) = \sum_{x_1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp \{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)\},$$

причем

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \cdots \sum_{t_r=0}^n \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \cdots x_r^{t_r},$$

символ Ω обозначает единичный куб размерности $m = \binom{n+r}{r}$ следующего вида:

$$0 \leq \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n.$$

Лемма [9]. Пусть $3 \leq n, 2 \leq r$ — натуральные числа, $0 \leq \tau$ — целое число, $m = \binom{n+r}{r}$, $m_1 = \frac{nr}{r+1}$, и пусть $k \geq m\tau$. Тогда для величины $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ имеем оценку

$$J \leq D(\tau)(P_1 \dots P_r)^{2k} P_1^{-\Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = m_0(1 - (1 - 1/n)^\tau), \quad D(\tau) = 2^{nr}(n+1)^n(km^{-1})^{2k}.$$

3. Доказательство теоремы 1. В сумме $S = S(\mathbf{M})$, $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_r)$, произведем сдвиги промежутков суммирования по m_1, \dots, m_r на величины $u_1 v_1, \dots, u_r v_r$. В понятных обозначениях получим

$$S = S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1 - u_1 v_1 < m_1 \leq M'_1 - u_1 v_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} - \sum_{M_1 - u_1 v_1 < m_1 \leq M_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M_r} + \\ + \sum_{M'_1 - u_1 v_1 < k \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r}.$$

Отсюда находим

$$S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1 < m_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} e^{2\pi i F(m_1 - u_1 v_1, \dots, m_r - u_r v_r)} + 2\theta(u_1 v_1 + \dots + u_r v_r) M_2 \dots M_r, |\theta| \leq 1.$$

Возьмем $P = [M_1^{1/3}]$, $1 \leq u_1, v_1, \dots, u_r, v_r \leq P$, и просуммируем предыдущее равенство по переменным $u_1, v_1, \dots, u_r, v_r$ в пределах от 1 до P . Имеем

$$|S(\mathbf{M})| \leq P^{-2r} \sum_{M_1 < m_1 \leq M'_1} \cdots \sum_{M_r < m_r \leq M'_r} |W(\mathbf{m})| + 2r P^{-2r+2} M_2 \dots M_r, \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r),$$

где

$$W(\mathbf{m}) = \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp(2\pi i (F(m_1 - u_1 v_1, \dots, m_r - u_r v_r) - F(m_1, \dots, m_r))).$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $x_s = u_s v_s m_s^{-1}$, $1 \leq s \leq r$,

$$F(m_1 - m_1 x_1, \dots, m_r - m_r x_r) - F(m_1, \dots, m_r) = \frac{t}{m_1 \dots m_r} F_1(x_1, \dots, x_r).$$

Далее разложим функцию

$$F_1(x_1, \dots, x_r) = (1 - x_1)^{-1} \dots (1 - x_r)^{-1} - 1$$

по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0 < \theta_1 < 1$ получим

$$F_1(x_1, \dots, x_r) = \Phi(x_1, \dots, x_r) + \Upsilon(x_1, \dots, x_r),$$

где

$$\Phi(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\nu=1}^{n_0} \frac{1}{\nu!} d_{\mathbf{h}}^{\nu} F_1(0, \dots, 0) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}} = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} x_1^{s_1} \dots x_r^{s_r},$$

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F_1(-\theta_1 x_1, \dots, -\theta_1 x_r) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}.$$

Следовательно,

$$W = W(\mathbf{m}) = W_1 + R,$$

где

$$W_1 = \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) =$$

$$= \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp 2\pi i G(u_1 v_1, \dots, u_r v_r),$$

причем

$$G(u_1 v_1, \dots, u_r v_r) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} b(s_1, \dots, s_r) (u_1 v_1)^{s_1} \dots (u_r v_r)^{s_r},$$

$$b(s_1, \dots, s_r) = \frac{t}{m_1^{s_1+1} \dots m_r^{s_r+1}}.$$

Оценим остаток R . Имеем

$$|R| \leq \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| 1 - \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right| \leq$$

$$\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \right| \leq$$

$$\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \right| \cdot \left| \frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F_1\left(-\theta_1 \frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, -\theta_1 \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}} \right| = R_1,$$

где

$$\mathbf{w} = \left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1| \leq 2\pi 2^{n_0+1} \frac{|t|}{M_1 \dots M_r} \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0+1} \frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}} \dots \frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}} \leq$$

$$\leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^{2(n_0+r+1)} \frac{|t|}{M_1 \dots M_r} \frac{1}{M_1^{n_0+1}} \leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^n \left(\frac{P^2}{M_1}\right)^{n_0+r+1}.$$

Оценим сумму W_1 :

$$|W_1| \leq \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \left| \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i \frac{t}{m_1 \dots m_r} \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right|.$$

Возведем неравенство для суммы W_1 в степень $2l$, $l = 12m_0 = ml_0$, где

$$m = \binom{n_0 + r}{r}, m_0 = r \binom{n_0 + r + 1}{r + 1} = \frac{rnm}{r + 1},$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера. Получим

$$|W_1|^{2l} \leq P^{r(2l-1)} \sum_{v_{1,1}, \dots, v_{l,r}} \dots \sum_{v_{2l,1}, \dots, v_{2l,r}} T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}),$$

$$T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}) = \left| \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \exp \left(2\pi i \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} \right) \right|,$$

где

$$Y(s_1, \dots, s_r) = v_{1,1}^{s_1} \dots v_{r,1}^{s_r} + \dots + v_{1,l}^{s_1} \dots v_{r,l}^{s_r} - v_{1,l+1}^{s_1} \dots v_{r,l+1}^{s_r} - \dots - v_{1,2l}^{s_1} \dots v_{r,2l}^{s_r},$$

$$0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

а символ $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ обозначает набор произведений чисел вида

$$\{b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Разобьем все точки \mathbf{Y} из \mathbf{R}^m на два класса. К первому классу E_1 отнесем те из них, для которых

$$|T(\mathbf{b}, \mathbf{Y})| \leq P^{r-\kappa}.$$

Остальные точки отнесем ко второму классу E_2 .

Тогда при $l = ml_0$ имеем

$$|W_1|^{2l} \leq P^{r(2l-1)} (\Sigma_1 + \Sigma_2) = W_{11} + W_{12},$$

$$\Sigma_1 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_1} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}), \Sigma_2 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_2} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}).$$

Оценим W_{11} . Количество наборов $\mathbf{Y} \in E_1$ не превосходит P^{2lr} . Следовательно,

$$W_{11} = P^{r(2l-1)} \Sigma_1 \leq P^{4lr-\kappa}.$$

Оценим теперь W_{12} . Сначала рассмотрим общую сумму вида

$$T(\mathbf{A}) = \left| \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \exp(2\pi i H(\mathbf{u}, \mathbf{A})) \right|, \quad H(\mathbf{u}, \mathbf{A}) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \alpha(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r},$$

где

$$\mathbf{A} = \{\alpha(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Заметим, что число координат вектора \mathbf{A} равно m :

$$m = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} 1 = \binom{n_0 + r}{r}.$$

Пусть Π обозначает стандартный параллелепипед с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi)^{-1} m^{-1} P^{-s_1-\dots-s_r-\kappa}$$

$$(0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0),$$

и пусть найдется точка \mathbf{A} из некоторого параллелепипеда Π , такая, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Тогда для любой точки $\mathbf{A}' \in \Pi$ справедлива оценка

$$|T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |T(\mathbf{A}') - T(\mathbf{A})| &\leq \sum_{u_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \left| 1 - e^{2\pi i(H(\mathbf{u}, \mathbf{A}) - H(\mathbf{u}, \mathbf{A}'))} \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{u_1=1}^P \cdots \sum_{u_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} |\alpha(s_1, \dots, s_r) - \alpha'(s_1, \dots, s_r)| u_1^{s_1} \cdots u_r^{s_r} < 0,5P^{r-\kappa}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|T(\mathbf{A}')| \geq |T(\mathbf{A})| - |T(\mathbf{A}) - T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Далее разобьем единичный m -мерный куб Ω на малые параллелепипеды Π и оценим сверху число M тех из них, которые содержат хотя бы одну точку \mathbf{A} , такую, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Имеем неравенства

$$M\mu(\Pi)(0,5P^{r-\kappa})^{2l} < \int \cdots \int_{\Omega} |T(\mathbf{A})|^{2l} d\alpha \leq D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где $\mu(\Pi)$ — объем малого параллелепипеда Π :

$$\begin{aligned} \mu(\Pi) &= (4\pi m)^{-m} \prod_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \prod_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} P^{-(s_1+\dots+s_r)} = (4\pi m)^{-m} P^{-m_0}, \\ m_0 &= \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} (s_1 + \dots + s_r) = \sum_{s=1}^{n_0} s \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r=s}}^{n_0} \cdots \sum_{\substack{s_r=0 \\ s_1+\dots+s_r=s}}^{n_0} 1 = \binom{n_0+r}{r+1}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$M < (4\pi m)^m 2^{2l} D(l) P^{2r\kappa+m_0(1-1/n_0)l_0}.$$

Итак, для набора $\mathbf{Y} \in E_2$ справедливы неравенства

$$P^{r-\kappa} < |T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\})| \leq P^r,$$

и координаты

$$Y(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

вектора \mathbf{Y} принимают целые значения $z(s_1, \dots, s_r)$, удовлетворяющие условиям

$$|z(s_1, \dots, s_r)| < lP^{s_1+\dots+s_r}.$$

Для любого фиксированного набора

$$z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

число решений системы уравнений

$$Y(s_1, \dots, s_r) = z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

не превосходит величины (лемма)

$$V = D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где

$$\Delta(l_0) = r \binom{n_0+r}{r+1} - r \binom{n_0+r}{r+1} (1-1/n_0)^{l_0}, \quad D(l_0) = k^{2ml} 4^{mr^2 n_0 l} (n_0 r)^{2n_0 r \Delta(l_0)}.$$

Оценим сверху число I точек

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\} = \{b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r), 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0,$$

попадающих в заданный малый параллелепипед Π с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi m)^{-1} P^{-s_1 - \dots - s_r - \kappa}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Оценку будем производить покоординатно. Для этого координаты $\{b(\mathbf{s})z(\mathbf{s})\}$ точки \mathbf{b}, \mathbf{z} разобьем на три совокупности. В первую совокупность войдут те координаты, номера которых удовлетворяют условиям $\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leq 3(n-r)$; во вторую совокупность — те, для которых $n < s_1 + \dots + s_r \leq \frac{3}{2}(n-r) - 2$; и в третью совокупность отнесем все оставшиеся координаты.

Для первой совокупности находим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} < 1/2.$$

Следовательно, для координаты с номером (s_1, \dots, s_r) точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}$ при некотором B , отвечающем заданному малому параллелепипеду Π , имеем

$$B < b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r) \leq B + d(s_1, \dots, s_r),$$

т.е.

$$B/b(s_1, \dots, s_r) < z(s_1, \dots, s_r) \leq (B + d(s_1, \dots, s_r))/b(s_1, \dots, s_r).$$

Так как $z(s_1, \dots, s_r)$ — целое число, то количество значений координаты $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длиной $d(s_1, \dots, s_r)$, не превосходит

$$d(s_1, \dots, s_r)b^{-1}(s_1, \dots, s_r) + 1 \leq (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r - n + 1}.$$

Перейдем к оценке числа элементов второй совокупности. Поскольку для любого набора (s_1, \dots, s_r) из второй совокупности справедливы неравенства

$$|z(s_1, \dots, s_r)| \leq l P^{s_1 + \dots + s_r}, d(s_1, \dots, s_r) \leq |b(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{r(s_1 + \dots + s_r)}},$$

для значений координат точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ получим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leq \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} \leq \frac{l|t|P^{s_1 + \dots + s_r}}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}}.$$

Для любого набора (s_1, \dots, s_r) из третьей совокупности число элементов $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длины $d(s_1, \dots, s_r)$, тривиально не превосходит величины $2lP^{s_1 + \dots + s_r}$.

Отсюда находим, что общее число I точек $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$, попавших в заданный малый параллелепипед Π , не превосходит $I \leq (2l)^m P^{m_0} \Pi_1 \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \prod_{n < s_1 + \dots + s_r \leq \frac{3}{2}(n-r) - 2} \frac{|t|}{4\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}},$$

$$\Pi_2 = \prod_{\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leq 3(n-r)} (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r + 1} |t|^{-1}.$$

Оценим теперь величины Π_1 и Π_2 . Имеем

$$\Pi_1 \leq (|t|M_1^{-r})^{m([1,5(n-r)-2]-m(n))} M_1^{m_0([1,5(n-r)]-2)-m_0(n)} = P^{\Delta_1},$$

$$\Pi_2 \leq (M_1^r |t|^{-1} P^{-\kappa})^{m(3(n-r))-m([1,5(n-r)])} (M_1 P^{-2})^{m_0(3(n-r))-m_0([1,5(n-r)])} = P^{\Delta_2},$$

где $m(n) = \binom{n+r}{r}$ и $m_0(n) = r \binom{n+r}{r+1}$.

Далее получим

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 3(n-r) \left(\binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} - \binom{n+r}{r} \right) - \\ &\quad - 3r \left(\binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} - \binom{n+r}{r} \right), \\ \Delta_2 &= (3r - 3n + 3 - \kappa) \left(\binom{3(n-r) + r}{r} - \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r} \right) + \\ &\quad + r \left(\binom{3(n-r) + r}{r+1} - \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r+1} \right).\end{aligned}$$

Наконец, находим

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r} \left(3(n-r) - \frac{r}{r+1} ([1, 5(n-r)] - 2) \right) + \\ &\quad + \binom{n+r}{r} \left(\frac{r(n-1)}{r+1} - 3(n-r) \right) \leq [1, 5(n-r)] \binom{[1, 5(n-r)] + r - 2}{r}, \\ \Delta_2 &= \binom{3(n-r) + r}{r} \left(\frac{3r(n-r)}{r+1} - 3(n-r) + 3 - \kappa \right) + \\ &\quad + \binom{[1, 5(n-r)] + r}{r} \left(\frac{r[1, 5(n-r)]}{r+1} - [1, 5(n-r)] + 3 - \kappa \right) \geq -\frac{3(n-r)}{2(r+1)} \binom{3n-2r}{r}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$I \leq (2l)^m P^{m_0} P^{-\frac{(n-r)}{2(r+1)}(3n-2r)}.$$

Таким образом,

$$W_{12} \leq P^{r(2l-1)} \Sigma_2 \leq VIMP^{2lr} \leq (4\pi m)^n 2^{2l} (2l)^m D^2(l_0) P^{4lr - \Delta_0},$$

где

$$\Delta_0 = \frac{(n-r)}{(r+1)} \binom{3n-2r}{r} - 2r\kappa - 2m_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{l_0}, \quad \frac{(n-r)}{(r+1)} \binom{3n-2r}{r} = \frac{1}{3} \binom{3n-2r}{r+1}.$$

Покажем, что $\Delta_0 \geq 4l\kappa$. Имеем

$$\frac{1}{6} \binom{3n-2r}{r+1} \geq 8ml_0\kappa, \quad m_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{l_0} \leq ml_0\kappa, \quad r\kappa \leq ml_0\kappa.$$

Собирая вместе найденные выше оценки W_{11} и W_{12} , получим утверждение теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $r \geq 1, l \neq 0$ — произвольные натуральные числа, $1 < M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_r \leq 2M_1$. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$T = \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \dots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln(m_1 \dots m_r + l)}.$$

В сумме T произведем сдвиг промежутков суммирования на $u_s v_s, 1 \leq s \leq r$, а затем по этим переменным просуммируем в пределах от 1 до $P = [M_1^{1/3}]$. Получим

$$T = P^{-2r} W + 2r\theta P^2 M_2 \dots M_r, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$W = \sum_{u_1, v_1=1}^P \dots \sum_{u_r, v_r=1}^P \sum_{m_1=M_1}^{M'_1} \dots \sum_{m_r=M_r}^{M'_r} e^{2\pi i t \ln((m_1 - u_1 v_1) \dots (m_r - u_r v_r) + l)} = \sum_{\mathbf{m}} W(\mathbf{m}).$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r), x_s = u_s v_s m_s^{-1}, 1 \leq s \leq r$. Имеем

$$\begin{aligned} & \ln((m_1 - m_1 x_1) \dots (m_r - m_r x_r) + l) - \ln(m_1 \dots m_r + l) = \\ & = \ln\left((1 - x_1) \dots (1 - x_r) + \frac{l}{m_1 \dots m_r}\right) - \ln\left(1 + \frac{l}{m_1 \dots m_r}\right) = F(x_1, \dots, x_r) = F(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далее разложим функцию $F(\mathbf{x})$ по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0 < \theta_1 < 1$ получим

$$F(x_1, \dots, x_r) = \Phi(x_1, \dots, x_r) + \Upsilon(x_1, \dots, x_r),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \dots, x_r) &= \sum_{\nu=1}^{n_0} \frac{1}{\nu!} d_{\mathbf{h}}^{\nu} F(0, \dots, 0) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}} = \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) x_1^{s_1} \dots x_r^{s_r}. \\ \Upsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(n_0 + 1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F(-\theta_1 x_1, \dots, -\theta_1 x_r) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W(\mathbf{m}) = W_1 + R,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{u_1=1}^P \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \sum_{v_r=1}^P \exp\left(2\pi i t \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) = \\ &= \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp 2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r) &= \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ 1 \leq s_1+\dots+s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) (u_1 v_1)^{s_1} \dots (u_r v_r)^{s_r}, \\ \beta(s_1, \dots, s_r) &= \frac{1}{\bar{s}_1 \dots \bar{s}_r (m_1)^{s_1} \dots (m_r)^{s_r}} \left(\frac{1}{1 + \omega}\right)^{s_1+\dots+s_r}, \omega = \frac{l}{m_1 \dots m_r}, \bar{s} = \max(1; s), \\ & 0 \leq s_1, \dots, s_r, 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0. \end{aligned}$$

Оценим остаток R . Имеем

$$\begin{aligned} |R| &\leq \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| 1 - \exp\left(2\pi i t \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) \right| \leq \\ &\leq 2\pi |t| \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \left| \frac{t}{m_1 \dots m_r} \right| \cdot \left| \frac{1}{(n_0 + 1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F\left(-\theta_1 \frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, -\theta_1 \frac{u_r v_r}{m_r}\right) \Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}} \right| = R_1, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{w} = \left(\frac{u_1 v_1}{m_1}, \dots, \frac{u_r v_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1| \leq 2\pi 2^{n_0+1} |t| \sum_{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r=1}^P \sum_{\substack{s_1=0 \\ \dots \\ s_1+\dots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0+1} \frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}} \dots \frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}} \leq$$

$$\leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^{2(n_0+r+1)} |t| \frac{1}{M_1^{n_0+1}} \leq 2^{n_0+4} \binom{n_0+r}{r-1} P^n \left(\frac{P^2}{M_1} \right)^{n_0+r+1}.$$

Преобразуем сумму W_1 :

$$W_1 = \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P \sum_{v_1, \dots, v_r=1}^P \exp(2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r)),$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$|W_1|^{2k} \leq P^{r(2k-1)} W_2,$$

$$W_2 = \sum_{u_1=1}^P \dots \sum_{u_r=1}^P \left| \sum_{v_1=1}^P \dots \sum_{v_r=1}^P e^{2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1, \dots, u_r v_r)} \right|^{2k}.$$

Далее будем иметь

$$W_2 \leq \sum_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}} \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i t (G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - \dots - G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{2k}))} \right| =$$

$$= \sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right| = W_3,$$

$$G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda) = \sum_{s_1=0}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} \lambda(s_1, \dots, s_r),$$

$$\lambda(s_1, \dots, s_r) = \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j v_{1,j}^{s_1} \dots v_{r,j}^{s_r}, 0 \leq s_1, \dots, s_r, 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0.$$

Вновь используя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$\begin{aligned} |W_3|^{2k} &\leq \left(\sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \right)^{2k-1} \sum_{\Lambda} J(P; r, n, k, \Lambda) \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right|^{2k} \leq \\ &\leq P^{2kr(2k-1)} J(P; r, n, k) \sum_{\Lambda} \left| \sum_{u_1, \dots, u_r=1}^P e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}, \Lambda)} \right|^{2k} = P^{2kr(2k-1)} J(P; r, n, k) W_4. \end{aligned}$$

Собирая вместе соответствующие слагаемые в W_3 , получим

$$W_4 \leq J(P; r, n, k) \sum_M \left| \sum_{\Lambda} e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(M, \Lambda)} \right| = J(P; r, n, k) W_5,$$

$$G_{\mathbf{m}}(M, \Lambda) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0}}^{n_0} \dots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1, \dots, s_r) \lambda(s_1, \dots, s_r) \mu(s_1, \dots, s_r).$$

Оценим W_5 . Суммируя прогрессии по Λ , находим ($\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$)

$$W_5 \leq \prod_{\substack{s_1, \dots, s_r \geq 0 \\ 1 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0}} \sum_{|\mu(s_1, \dots, s_r)| < k P^{s_1 + \dots + s_r}} \min \left(2k_1 P^{s_1 + \dots + s_r}, \frac{1}{2 \|\beta(\mathbf{s}) \mu(\mathbf{s})\|} \right) = W_6.$$

Далее воспользуемся следующим простым утверждением.

Утверждение. Пусть $\beta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, q \geq 1, (a, q) = 1, |\theta| \leq 1$. Тогда при любом γ и $U > 0, Q \geq 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^Q \min \left(U, \frac{1}{\|\beta x + \gamma\|} \right) \leq 6 \left(\frac{Q}{q} + 1 \right) (U + q \ln q),$$

где $\|\alpha\|$ обозначает расстояние от числа α до ближайшего целого.

Для этого при $0, 5n_0 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0 - 4$ представим $\beta(\mathbf{s}) = \beta(s_1, \dots, s_r)$ в виде

$$\beta(\mathbf{s}) = \frac{a(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})} + \frac{\theta(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})^2}, (a(\mathbf{s}), q(\mathbf{s})) = 1, |\theta(\mathbf{s})| \leq 1,$$

где $a(\mathbf{s}) = 1, q(\mathbf{s}) = [\bar{s}_1 \dots \bar{s}_r (1 + \omega)^{s_1 + \dots + s_r} m_1^{s_1} \dots m_r^{s_r} |t|^{-1}]$.

Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|\mu(s_1, \dots, s_r)| < k P^{s_1 + \dots + s_r}} \min \left(2k_1 P^{s_1 + \dots + s_r}, \frac{1}{2\|\beta(\mathbf{s})\mu(\mathbf{s})\|} \right) \leq \\ & \leq 6 \left(\frac{2k P^{s_1 + \dots + s_r}}{q(\mathbf{s})} + 1 \right) (2k P^{s_1 + \dots + s_r} + q(\mathbf{s}) \ln q(\mathbf{s})) \leq \\ & \leq 24k^2 P^{2(s_1 + \dots + s_r)} \left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1 + \dots + s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1 + \dots + s_r)}} \right) \ln q(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_6 \leq (24k^2)^m P^{2m_1} \prod_{\substack{s_1, \dots, s_r \geq 0 \\ 0, 5n_0 \leq s_1 + \dots + s_r \leq n_0 - 4}} \left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1 + \dots + s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1 + \dots + s_r)}} \right) (\ln(q(\mathbf{s})))^m.$$

Далее, выбирая $k = 12m_0 = ml_0$ и применяя лемму, приходим к оценке

$$|S| \ll M_1 \dots M_r M_1^{1-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0},$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное. М.: Физматлит, 1980.
2. Виноградов И.М. Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. **22**, № 2. 161–164.
3. Виноградов И.М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. **29**, № 3. 493–504.
4. Коробов Н.М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук. 1958. **13**, № 4. 185–192.
5. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.
6. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР. 1984. **278**, № 2. 302–304.
8. Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. **49**, № 5. 1031–1067.
9. Чубариков В.Н. Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм // Чебышёвский сборник. 2020. **20**, № 1. 305–319.

Поступила в редакцию
27.12.2019