Б. В. Панников, О сходимости рядов по системе $f(nx)$ с монотонными коэффициентами,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 373–380

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ $f(nx)$ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б. В. Панников

Если последовательность действительных чисел удовлетворяет условию

$$a_n \downarrow 0, \tag{1}$$

то, как известно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

сходится при любом $x \neq 0 \pmod 1$. Следовательно, для любой последовательности вещественных чисел a_n, удовлетворяющей условию (1), любом целом $k \neq 0$ и любом $x \neq 0 \pmod{1/k}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i k n x}$$

также будет сходиться. Из этого в свою очередь вытекает, что если последовательность вещественных чисел a_n удовлетворяет условию (1), а функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{l=1}^{m} c_l e^{2\pi i k_l x}, \tag{2}$$

где k_l — некоторые целые числа, не равные нулю, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \tag{3}$$

сходится по крайней мере для всех иррациональных x.

Справедлива следующая.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f(x)$ определена всюду и непрерывна на вещественной оси, периодична с периодом*

1 *и не имеет вида* (2), *то существует такая последовательность вещественных чисел* a_n, *удовлетворяющая условию* (1), *что ряд* (3) *неограниченно расходится при некоторых иррациональных* x.

Теорему 1 легко вывести из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА А.А. Маркова (см. [1]). *Если функция определена всюду и непрерывна на вещественной оси, периодична с периодом* 1 *и не имеет вида* (2), *то для некоторых иррациональных* x

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} f(kx) \right| = +\infty.$$

Доказательство теоремы 1. В силу теоремы А. А. Маркова найдется такая последовательность вещественных чисел a_n, удовлетворяющая условию (1), что

$$\sup_n a_n \left| \sum_{k=1}^{n} f(kx) \right| = +\infty \tag{4}$$

для некоторых иррациональных x. В силу (4) найдется такая последовательность натуральных чисел n_m $(m = 1, 2, \ldots)$, что

$$\sup_m a_{n_m} \left| \sum_{k=1}^{n_m - 1} f(kx) \right| - \sum_{l=1}^{m-1} a_{n_l} \left| \sum_{k=1}^{n_l} f(kx) \right| = +\infty. \tag{5}$$

Положим $a_n = a_{n_m}$, если $n_{m-1} < n \leqslant n_m$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{n_m - 1} a_n f(nx) = \sum_{n=1}^{n_m - 1} \Delta a_n \sum_{k=1}^{n} f(kx) + a_{n_m} \sum_{k=1}^{n_m - 1} f(kx) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m-1} (a_{n_l} - a_{n_{l+1}}) \sum_{k=1}^{n_l} f(kx) + a_{n_m} \sum_{k=1}^{n_m - 1} f(kx). \tag{6}$$

Из (1), (5), (6) следует, что

$$\sup_N \left| \sum_{n=1}^{N} a_n f(nx) \right| = +\infty$$

для некоторых иррациональных x.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{\substack{\nu=-\infty \\ c_\nu \neq 0}}^{+\infty} |c_\nu| \ln |c_\nu|^{-1} < +\infty, \tag{7}$$

где

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x}, \tag{8}$$

то для любой последовательности вещественных чисел a_n, удовлетворяющей условию (1), *ряд* (3) *сходится для почти всех x.*

Теорему 2 мы выведем из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА (см. [2]). *Если выполнено условие* (4), *то ряд*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_\nu/\sin 2\pi\nu x| \tag{9}$$

сходится для почти всех x.

Доказательство теоремы 2. Из соотношения (7) следует соотношение

$$\sum_{n=1}^{N} f(nx) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\nu n x} =$$
$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i\nu x} (e^{2\pi i\nu N x} - 1)/(e^{2\pi i\nu x} - 1). \tag{10}$$

Из (10) для любого N следует

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(kx)\right| \leqslant \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} 2|c_\nu|/|e^{2\pi i\nu x} - 1| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_\nu|/|\sin 2\pi\nu x|. \tag{11}$$

Из (11) и теоремы М. Каца и Р. Салема следует, что

$$\sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} f(nx)\right| < +\infty \tag{12}$$

для почти всех x. Так как

$$\sum_{n=1}^{N} a_n f(nx) = \sum_{n=1}^{N} \Delta a_n \sum_{k=1}^{n} f(kx) + a_{N+1} \sum_{n=1}^{N} f(nx),$$

то из условия (1) и из (12) следует, что ряд (3) сходится для почти всех x.

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f(x)$ всюду определена, 1-периодична на вещественной оси и удовлетворяет условиям*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0, \tag{13}$$

$$\operatorname*{var}_{x\in[0,1)} f(x) < +\infty, \tag{14}$$

а последовательность вещественных чисел удовлетворяет условию (1) *и при некотором $\varepsilon > 0$ условию*

$$a_n = o(1/\ln n \ln^2 \ln n \ln^{2+\varepsilon} \ln \ln n), \tag{15}$$

то ряд (3) *сходится для почти всех x.*

Для доказательства теоремы 3 воспользуемся двумя леммами.

ЛЕММА 1. *Если* a_0, a_1, a_2, ... — *последовательность неполных частных при разложении числа* x *в цепную дробь,* q_1, q_2, ... — *последовательность знаменателей подходящих к* x *дробей, и функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *то для любого* n

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(nx) \right| \leqslant \operatorname*{var}_{x \in [0,1)} f(x) \sum_{s=1}^{l} a_{s+1}, \tag{16}$$

где

$$N = k_l q_l + k_{l-1} q_{l-1} + \ldots + k_1 q_1 \quad (k_s < q_{s+1}/q_s;\ s = 1, \ldots, l). \tag{17}$$

Доказательство леммы 1 может быть основано на материале книги [3, стр. 125, 128, 143], но мы для полноты приведем непосредственное доказательство.

Пусть $f(x)$ не убывает на $[0,1)$,

$$x_n \in [n / N,\ (n+1)/N); \quad n = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Тогда

$$\alpha_N = \sum_{n=1}^{N} f((n-1)/N) \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n/N - 0) = \beta_N.$$

Так как

$$\beta_N - \alpha_N \leqslant f(1-0) - f(0) = \operatorname*{var}_{x \in [0,1)} f(x),$$

то получаем неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \leqslant \operatorname*{var}_{x \in [0,1)} f(x) \tag{19}$$

для монотонных, а следовательно, и для произвольных функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

Если $x = p_i/q_i + \theta_i/q_i^2$, где $|\theta_i| < 1$, $N = q_i$, то, очевидно, нумеруя точки вида $\{nx\}$, $n = 1, \ldots, q_i = N$ в порядке возрастания, получаем, что выполнено условие (18) и, следовательно, неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{N} f(nx) \right| \leqslant \operatorname*{var}_{x \in [0,1)} f(x). \tag{20}$$

Пусть теперь N — произвольное натуральное число. Рассмотрим справедливое для него соотношение (17).

Известно (см., например, [4, стр. 14]), что

$$q_{s+1}/q_s \leqslant a_{s+1} + 1. \tag{21}$$

В таком случае в силу (17), (19), (21) имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(nx)\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{q_l} f(nx)\right| + \left|\sum_{n=q_l+1}^{2q_l} f(nx)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\sum_{n=(k_l-1)q_l}^{k_l q_l} f(nx)\right| + \left|\sum_{n=k_l q_l+1}^{k_l q_l + q_{l-1}} f(nx)\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\sum_{n=k_l q_l + \ldots + (k_1-1)q_1}^{k_l q_l + \ldots + k_1 q_1 = N} f(nx)\right| \leqslant \operatorname*{var}_{x \in [0,1)} f(x) \sum_{s=1}^{l} a_{s+1},$$

т. е. неравенство (16).

ЛЕММА 2. *Для почти всех x и для любой монотонно убывающей функции $g(n)$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-1}(n) = +\infty, \tag{22}$$

$$\sum_{s=1}^{l} a_s = o(\ln N g(\ln \ln N)), \tag{23}$$

где $q_l \leqslant N < q_{l+1}$, q_s — *знаменатели подходящих дробей к x, a_s — неполные частные.*

Доказательство. А. Я. Хинчиным доказано (см. [3]), что для почти всех λ и любой монотонно убывающей функции $g(n)$, удовлетворяющей условию (18),

$$\sum_{s=1}^{l} a_s = o(lg(\ln l)). \tag{24}$$

С другой стороны, А. Я. Хинчиным доказано (см., например, [4, стр. 20 и 82]), что для почти всех x и некоторого $q > 0$

$$2^{(l-1)/2} \leqslant q_l \leqslant q^l. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получаем (23), т. е. доказательство леммы 2.

Доказательство теоремы 3. Для любых M и N

$$\sum_{n=M}^{N} a_n f(nx) = \sum_{n=M}^{N} \Delta a_n \sum_{k=1}^{n} f(kx) -$$

$$- a_M \sum_{n=1}^{M-1} f(nx) + a_{N+1} \sum_{n=1}^{N} f(nx). \tag{26}$$

В силу (16), (23), (26) для почти всех x, любой монотонно убывающей функции $g(n)$, удовлетворяющей условию (22), любых достаточно больших N и M ($N > M$) и некоторой постоянной $c > 0$

$$c\left|\sum_{n=M}^{N} a_n f(nx)\right| \leqslant \sum_{n=M}^{N} \Delta a_n \ln n g(\ln\ln n) -$$
$$- a_M \ln M g(\ln\ln M) + a_{N+1} \ln N g(\ln\ln N).$$

В частности, полагая $g(n) = n \ln^{1+\varepsilon/2} n$, имеем

$$c\left|\sum_{n=M}^{N} a_n f(nx)\right| \leqslant A(N, M) =$$
$$= \sum_{n=M}^{N} \Delta a_n \ln n \ln\ln n \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln n -$$
$$- a_M \ln M \ln\ln M \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln M +$$
$$+ a_{N+1} \ln N \ln\ln N \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln N. \qquad (27)$$

С другой стороны, для некоторых δ_n со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$

$$\sum_{n=M}^{N} a_n n^{-1} \ln\ln n \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln n =$$
$$= \sum_{n=M}^{N} \Delta a_n \sum_{k=1}^{n} k^{-1} \ln\ln k \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln k -$$
$$- a_M \sum_{n=1}^{M-1} n^{-1} \ln\ln n \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln n +$$
$$+ a_{N+1} \sum_{n=1}^{N} n^{-1} \ln\ln n \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln n =$$
$$= \sum_{n=M}^{N} \Delta a_n (1 + \delta_n) \ln n \ln\ln n \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln n -$$
$$- a_M (1 + \delta_M) \ln M \ln\ln M \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln M +$$
$$+ a_{N+1} (1 + \delta_N) \ln N \ln\ln N \ln^{1+\varepsilon/2} \ln\ln N. \qquad (28)$$

Из (15), (27) и (28) следует, что

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} A(N, M) = 0 \qquad (29)$$

Из (27) и (29) следует доказательство теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. *Если функция $f(x)$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_\nu| |\nu|^{\varepsilon} < +\infty, \qquad (30)$$

где

$$f(x) \backsim \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x}, \qquad (31)$$

а последовательность вещественных чисел a_n удовлетворяет условию (1) *и условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty, \qquad (32)$$

то ряд (3) *сходится в метрике* $L^2(0, 1)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при условиях теоремы и дополнительном условии $a_n = 0$ для достаточно больших n, найдется такое число $\lambda_\varepsilon > 0$, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 \mathrm{d}\, x \leqslant \lambda_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_\nu|^2 |\nu|^\varepsilon. \quad (33)$$

Проверим прежде всего, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 \mathrm{d}\, x = \\ = \sum_{\substack{l,\ r=1 \\ (l,\ r)=1}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{nl} a_{nr} c_{\nu r} \bar{c}_{\nu l}. \quad (34)$$

Действительно, в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 \mathrm{d}\, x = \\ = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} a_p a_s c_\alpha \bar{c}_\beta. \quad (35)$$

$$p\alpha = s\beta$$

Обозначая $n =$ Н.О.Д (p, s), $\nu =$ Н.О.Д $(|\alpha|, |\beta|) \operatorname{sgn} \alpha$; $l = p/n$, $r = s/n$, получаем из равенства $p\alpha = s\beta$, что $\alpha/\nu = r$, $\beta/\nu = l$. Из полученных соотношений между индексами и (35) следует (34).

Заметим, что из (1) и (32) для любых l и r следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nl} a_{nr} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nl}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{mr}^2 \right)^{1/2} \leqslant (lr)^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (36)$$

Применяя к (34) неравенство Коши — Буняковского и используя (36), получаем, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 \mathrm{d}\, x \leqslant \\ \leqslant \sum_{l,\ r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (lr)^{-1/2} \left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{\nu r} \bar{c}_{\nu l} \right|. \quad (37)$$

Применяя к правой части (37) неравенство Коши — Буняковского, получаем, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 \mathrm{d}\, x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[\sum_{l,\ r=1}^{\infty} (lr)^{-1-\varepsilon/2} \right]^{1/2} \cdot \\ \cdot \left[\sum_{l,\ r=1}^{\infty} (lr)^{\varepsilon/2} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{\nu l} \bar{c}_{\nu r} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (38)$$

Применяя к правой части (38) неравенство Коши — Буняковского, получаем, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx) \right|^2 dx \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot$$
$$\cdot \left[\sum_{l,\, r=1}^{\infty} (lr)^{\varepsilon/2} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_{\nu r}|^2 \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} |c_{\mu l}|^2 \right) \right]^{1/2} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |c_\nu|^2 \sum_{\substack{d|\nu \\ d>0}} d^{\varepsilon/2}. \qquad (39)$$

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ при некотором $\lambda_\varepsilon \sum_{d\,|\,n} 1 < \lambda'_\varepsilon n^{\varepsilon/2}$ (см., например, [5, стр. 32]). Следовательно, при некотором λ''_ε

$$\sum_{\substack{d|\nu \\ d>0}} d^{\varepsilon/2} < \lambda''_\varepsilon |\nu|^\varepsilon. \qquad (40)$$

Соединяя (39) и (40), получаем (33), а вместе с последним и доказательство теоремы 4.

Всесоюзный научно-исследовательский институт кибернетики

Поступило 30.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Марков А. А., Арифметическая характеризация тригонометрических полиномов, Тр. Второго Всесоюзного математического съезда, т. 2, Л.— М., 1936, 202—205.
[2] Кас М., Salem R., On a series of cosecants, Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A, 60, № 3 (1957), 265—267.
[3] Kuipers L., Niederreiter H., Uniform distribution of sequences, N. Y., 1974.
[4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, М., Физматгиз, 1961.
[5] Прахар К., Распределение простых чисел, М., «Мир», 1967.