А. Л. Гаркави, О приближении функций двух переменных суммами вида $\varphi(x)+\psi(y)$ в пространствах L_p $(1\le p\le\infty)$, *Сиб. матем. журн.*, 1997, том 38, номер 1, 56–68

https://www.mathnet.ru/smj422

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ВИДА $\varphi(x) + \psi(y)$ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$*)

А. Л. Гаркави

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Пусть $Z = Z(G)$ — банахово пространство функций $\{f(x,y)\}$, определенных на плоском множестве $G = \mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$. В статье рассматриваются вопросы, относящиеся к проблеме приближения функции $f(x,y) \in Z(G)$ суммами вида $\varphi(x) + \psi(y) \in Z(G)$. Изучаются условия, которым должно удовлетворять множество G для того, чтобы для всякой функции $f(x,y) \in Z(G)$ существовал элемент наилучшего приближения (ЭНП) в подпространстве сумм $\varphi(x) + \psi(y) \in Z(G)$. Постановка этой задачи восходит к исследованиям А. Н. Колмогорова, связанным с проблемой представления функции многих переменных суперпозициями функций одного переменного (см. [1]). С точки зрения общей теории приближения приведенная задача интересна тем, что принадлежит к тем редким случаям, когда удается получить содержательные теоремы существования для подпространств, размерность и коразмерность которых бесконечны. Существование ЭНП в этой задаче для любой функции $f \in Z(G)$ ранее было доказано для всех классических (упоминаемых далее) пространств в случае, когда множество G есть декартово произведение своих проекций X_G и Y_G на óси переменных x и y (например, прямоугольник со сторонами, параллельными этим осям). Класс таких множеств будем обозначать через Π (см. [1–4] и библиографию в [4]). В случае, когда множество G не принадлежит классу Π, поставленная задача для пространства $C(G)$ функций, непрерывных на G, изучалась в работах [1, 4–9]. В последней был изучен также случай пространства $B(G)$ функций, ограниченных на G. В данной работе рассматривается случай, когда $Z(G)$ является одним из лебеговых пространств $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Важно отметить, что при переходе от класса Π к произвольным множествам термин «подпространство сумм $\varphi(x) + \psi(y)$» приобретает неоднозначную интерпретацию. Это обстоятельство было замечено еще в [9]. В полной мере оно проявилось при изучении пространств L_p. Поэтому мы рассматриваем три возможных варианта постановки задачи:

1) $\varphi(x) + \psi(y) \in L_p(G)$;
2) $\varphi(x)$, $\psi(y) \in L_p(G)$;
3) $\varphi(x) \in L_p(X_G)$, $\psi(y) \in L_p(Y_G)$, где X_G, Y_G — проекции на óси x и y.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию РФ (код проекта 2-16-4-24) и Международного научного фонда (грант MB 6300).

В случае, когда $G \in \Pi$, все три варианта тождественны (см. далее); для такого случая задача ранее формулировалась в терминах третьего варианта. Мы ведем изложение отдельно для каждого из случаев $p = \infty$, $p = 1$, $1 < p < \infty$ ввиду их существенных различий. Отметим, что методы, использованные ранее для случая $G \subset \Pi$, не переносятся на произвольное множество G.

Приведем некоторые понятия и обозначения, общие для всех p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Подпространство M банахова пространства Z называется *проксиминальным*, если для всякой функции $f \in Z$ в подпространстве M существует ЭНП. Все понятия теории меры относятся либо к плоской мере Лебега μ, либо к линейным мерам Лебега μ_x, μ_y соответственно на осях x, y и на параллельных им прямых. Лишь в конце статьи мы укажем возможность распространения полученных результатов на случай мер более общих, чем мера Лебега. Множество G считается открытым (впрочем, во всех формулировках далее его можно считать и замкнутым с границей нулевой меры μ). Через $D(z,\delta)$ обозначается открытый квадрат класса Π с центром в точке $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ площадью δ^2. Проекции $D(z,\delta)$ на оси x и y обозначены через $d_x(x,\delta)$, $d_y(y,\delta)$. Следуя [9, 10], *молнией* $l(z,\tilde z) = \{z_1 = z, z_2, \dots, z_m = \tilde z\}$ множества G, соединяющей точки z и $\tilde z$ из G, будем называть ломаную с конечным числом звеньев, вершины z_i которой принадлежат G и попарно различны, а каждое звено параллельно одной из координатных осей и перпендикулярно смежным звеньям. *Длиной* молнии назовем число m ее вершин. Молнию $l(z,\tilde z)$, соединяющую z и $\tilde z$, назовем *неприводимой*, если она имеет минимальную длину среди всех таких молний. Пусть $l(z_1,z_m) = \{z_1,\dots,z_m\}$ — молния множества G; *δ-молнией* $l_\delta(z_1,z_m)$, соответствующей молнии $l(z_1,z_m)$, будем называть последовательность непересекающихся квадратов $\{D(z_1,\delta),\dots,D(z_m,\delta)\}$, целиком принадлежащих G. Совокупность $K(z_1)$ всех точек $z \in G$, которые можно соединить с z_1 молниями множества G, назовем *l-компонентой точки* $z_1 \in G$. Множество, состоящее из одной l-компоненты, будем называть *l-связным*. *Сечением* $G_{\bar x}$ ($\bar x$-сечением) множества G называется подмножество $G_{\bar x} = \{(x,y) \in G : x = \bar x\}$. Аналогично определяется $G_{\bar y}$. Для краткости мы иногда будем писать f, L_p вместо $f(x,y)$, $L_p(G)$ и т. д. В то же время элементы f, φ, ψ пространства $L_p(G)$ будут обозначаться и через $f(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$, особенно если целесообразно явным образом указать аргументы этих функций.

§ 2. Пространство $L_\infty(G)$

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, $L_\infty(G)$ — пространство функций, существенно ограниченных на G (в смысле меры Лебега μ). В соответствии с § 1 будем рассматривать три подпространства:

$$L^1_\infty(G) = \{w \in L_\infty(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi,\psi\ \mu\text{-измеримы и конечны п. в}\};$$

$$L^2_\infty(G) = \{w \in L_\infty(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi,\psi \in L_\infty(G)\};$$

$$L^3_\infty(G) = \{w \in L_\infty(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi \in L_\infty(X_G),\ \psi \in L_\infty(Y_G)\},$$

где $L_\infty(X_G)$, $L_\infty(Y_G)$ — пространства функций, существенно ограниченных в смысле мер μ_x, μ_y на проекциях X_G, Y_G.

Для $f(x,y) \in L_\infty(G)$ рассмотрим задачи

$$\|f - w\|_G = \operatorname{vrai\,max}|f(x,y) - w(x,y)| \to \min = \rho(f, L^i_\infty),$$

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \in L^i_\infty, \quad i = 1,2,3.$$

В этом параграфе $\|f\|_H$ $(H \subseteq G)$ означает норму сужения $f(x,y)$ на H в пространстве $L_\infty(H)$.

Лемма 1. *Пусть H — открытое множество класса* II. *Тогда подпространства $L^i_\infty(H)$, $i = 1, 2, 3$, совпадают.*

Доказательство. Пусть $w = \varphi(x) + \psi(y)$, так что μ-п. в. на H

$$|\varphi(x) + \psi(y)| \leqslant \|w\|_H = K. \tag{1}$$

Тогда для μ_x-п. в. $x \in X_H$ x-сечение H_x состоит (за исключением подмножества нулевой меры μ_x) из точек (x, y), в которых выполняется (1). Пусть X^0_H — подмножество таких $x \in X_H$. Поскольку $H \in \mathrm{II}$, для любой пары точек x_1, x_2 из X^0_H проекции сечений H_{x_1}, H_{x_2} на ось y отличаются лишь подмножеством нулевой меры μ_y. Поэтому существует $y \in Y_H$ такой, что в точках $(x_1, y) \in H_{x_1}$ и $(x_2, y) \in H_{x_2}$ выполняется (1), следовательно,

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) + \psi(y)| + |\varphi(x_2) + \psi(y)| \leqslant 2K < \infty \quad \left(x_1, x_2 \in X^0_H\right).$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname*{vrai\,max}_{X_G} \varphi(x) - \operatorname*{vrai\,min}_{X_G} \varphi(x) \leqslant 2K$ и, значит, $\varphi(x) \in L_\infty(X_H)$. Аналогичным образом $\psi(y) \in L_\infty(Y_H)$, так что $w \in L^3_\infty(H)$ и $L^1_\infty(H) \subset L^3_\infty(H)$. Кроме того, очевидны включения $L^3_\infty(H) \subset L^2_\infty(H) \subset L^1_\infty(H)$. Следовательно, $L^3_\infty(H) = L^2_\infty(H) = L^1_\infty(H)$, что и требовалось.

Замечание. Легко видеть, что $L^2_\infty(G)$, $L^3_\infty(G)$ совпадают для любого открытого множества G, однако, вообще говоря, они отличны от $L^1_\infty(G)$ (см. ниже пример 1).

Лемма 2. *Пусть G — открытое множество из $\mathbb{R}^2$, G^0 — подмножество из G и $\mu(G \setminus G^0) = 0$. Тогда существует подмножество $G^* \subset G^0 \subset G$, $\mu(G \setminus G^*) = 0$ такое, что если точки z_1, $z_2 \in G^*$ соединимы молнией из G длиной m, то найдется молния из подмножества G^*, соединяющая z_1 и z_2, длиной не более $m + 1$.*

Доказательство. Пусть X_G (соответственно Y_G) — проекция G на ось x (ось y) и X^0_G (Y^0_G) — ее подмножество такое, что при $x \in X^0_G$ ($y \in Y^0_G$) сечение G_X (G_y) состоит из точек $z \in G^0$, за исключением их подмножества нулевой меры μ_y (μ_x). Из теоремы Фубини следует, что $\mu_x(X_G \setminus X^0_G) = 0$ ($\mu_y(Y_G \setminus Y^0_G) = 0$). Пусть G^* — подмножество тех $z = (x, y) \in G^0$, для которых $x \in X^0_G$, $y \in Y^0_G$; тогда $\mu(G \setminus G^*) = 0$. Пусть теперь $z_1, z_2 \in G^*$ и $\{z_1, z_2, \ldots, z_m = z\}$ ($m \geqslant 3$) — молния из G. Поскольку $G^* \cap G_x$ ($G^* \cap G_y$) всюду плотно в G_x (G_y), можно построить молнию $\{\tilde{z}_1 = z_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{m-2}\}$, $\tilde{z}_i \in G^*$, как угодно близкую к молнии $\{z_1, z_2, \ldots, z_{m-2}\}$. Допустим для определенности, что звено (z_{m-2}, z_{m-1}) параллельно оси y. Тогда точку $\tilde{z}_{m-1} = (\tilde{x}_{m-1}, \tilde{y}_{m-1}) \in G^*$ можно выбрать на прямой $x = \tilde{x}_{m-2}$ так, чтобы прямая $y = \tilde{y}_{m-1}$ пересекала прямую $x = x_m$ в точке $\tilde{z}_m = (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m) \in G^*$ (это возможно, так как $z_m \in G^*$). В итоге получим молнию $\{z_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_{m-1}, \tilde{z}_m, z_m = z\}$ длиной $\widetilde{m} = m + 1$, что и требовалось. Для $m < 3$ лемма очевидна.

Предложение 1. *Пусть G — открытое множество из $\mathbb{R}^2$. Тогда подпространство $L^1_\infty(G)$ слабо* замкнуто (т. е. замкнуто в топологии $\sigma(L_\infty, L_1)$).*

Доказательство. Будем вначале считать G l-связным. Построим некоторое семейство слабо* непрерывных функционалов на пространстве $L_\infty(G)$, порождаемых молниями множества G. Пусть $z_1 = (x_1, y_1) \in G$ — фиксированная точка из G. Для произвольной точки $z = (x, y) \in G$ построим молнию $l(z_1, z) = \{z_1, z_2, \ldots, z_m = z\}$, соединяющую z_1 и z. Выбрав достаточно малое $\delta > 0$, построим соответствующую ей δ-молнию $l_\delta(z_1, z) = \{D(z_1, \delta), \ldots, D(z_m, \delta)\}$. Если $z_i = (x_i, y_i)$,

$z_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$, то либо $y_i = y_{i+1}$ и $x_i \neq x_{i+1}$, либо $x_i = x_{i+1}$ и $y_i \neq y_{i+1}$; в первом случае будем писать $i \in c_x$, а во втором — $i \in c_y$. Пусть $w(z) = w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \in L^1_\infty(G)$. Поскольку по лемме 1 на квадрате $D_i = D(z_i, \delta)$ будет $L^1_\infty(D_i) = L^2_\infty(D_i) = L^3_\infty(D_i)$, то $\varphi(x) \in L_\infty(d^i_x)$, $\psi(y) \in L_\infty(d^i_y)$, где $d^i_x = d(x_i, \delta)$, $d^i_y = d(y_i, \delta)$ — проекции D_i на óси x, y. Поэтому

$$\delta \int\limits_{d^{i+1}_x} \varphi(x)\,dx - \delta \int\limits_{d^i_x} \varphi(x)\,dx = \begin{cases} \iint\limits_{D_{i+1}} w(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_i} w(x,y)\,dxdy, & \text{если } i \in c_x, \\ 0, \quad \text{если } i \in c_y. \end{cases}$$

Отсюда для молнии $l(z_1, z)$ при $z_m = z = (x,y)$ получим

$$\delta \int\limits_{d(x,\delta)} \varphi(x)\,dx - \delta \int\limits_{d^1_x} \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\iint\limits_{D_{i+1}} w\,dxdy - \iint\limits_{D_i} w\,dxdy \right]$$

$$= \sum_{i \in c_x} \left[\iint\limits_{D_{i+1}} w\,dxdy - \iint\limits_{D_i} w\,dxdy \right] = A(z,\delta)(w). \quad (2)$$

Аналогичным образом

$$\delta \int\limits_{d(y,\delta)} \psi(y)\,dy - \delta \int\limits_{d^1_y} \psi(y)\,dy = \sum_{i \in c_y} \left[\iint\limits_{D_{i+1}} w\,dxdy - \iint\limits_{D_i} w\,dxdy \right] = B(z,\delta)(w). \quad (3)$$

Через $A(z,\delta)(w)$, $B(z,\delta)(w)$ обозначены суммы в правых частях (2) и (3). Из этих соотношений видно, что при заданной функции w отображения $A(z,\delta)(w)$, $B(z,\delta)(w)$ зависят лишь от z и δ и не зависят от промежуточных вершин молнии $l(z_1, z)$. При фиксированных $z = (x,y)$ и δ отображения $A(z,\delta)(w)$, $B(z,\delta)(w)$ являются слабо* непрерывными функционалами на пространстве $L_\infty(G)$ (см. [11, с. 368]). Если $z = (x,y)$, $\bar z = (\bar x, \bar y)$ и $x = \bar x$, то $d(x,\delta) = d(\bar x, \delta)$, и из (2) следует, что $A(z,\delta)(w) = A(\bar z, \delta)(w)$. Таким образом, функционал $A(z,\delta)(w)$ не зависит от y для $w \in L^1_\infty(G)$. Аналогичным образом из (3) получаем, что $B(z,\delta)(w)$ не зависит от x для $w \in L^1_\infty(G)$.

Пусть теперь обобщенная последовательность $w_\alpha = \varphi_\alpha(x) + \psi_\alpha(y)$ слабо* сходится к $w_0(x,y) \in L_\infty(G)$, и пусть $G^0 \subset G$ — множество точек Лебега для $w_0(x,y)$. Поскольку $\mu(G \setminus G^0) = 0$, по лемме 2 существует точка $z_1 = (x_1, y_1)$ такая, что почти для каждой точки $z \in G^0$ можно построить молнию $\{z_1, z_2, \dots, z_m = z\}$ из множества G^0 ($m = m(z) < \infty$). Для соответствующей ей δ-молнии получим

$$\iint\limits_{D(z,\delta)} w_0\,dxdy = \iint\limits_{D_1} w_0\,dxdy + \sum_{i=1}^{m-1} \left[\iint\limits_{D_{i+1}} w_0\,dxdy - \iint\limits_{D_i} w_0\,dxdy \right]$$

$$= \iint\limits_{D_1} w_0\,dxdy + A(z,\delta)(w_0) + B(z,\delta)(w_0), \quad (4)$$

где $A(z,\delta)(w_0)$, $B(z,\delta)(w_0)$ имеют тот же смысл, что и в (2), (3). По теореме о дифференцировании неопределенного интеграла [12] в точке Лебега $z = (x,y) \in G$ имеем

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2} \iint\limits_{D(z,\delta)} w_0(x,y)\,dxdy = w_0(x,y), \qquad |w_0(x,y)| \leqslant \|w_0\|_G. \quad (5)$$

Поэтому, разделив (4) на δ^2, при $\delta \to 0$ получим

$$w_0(x,y) = w_0(x_1,y_1) + a(z)(w_0) + b(z)(w_0), \tag{6}$$

где

$$a(z)(w_0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}A(z,\delta)(w_0) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\sum_{i\in c_x}\Bigg[\iint\limits_{D_{i+1}} w_0\,dxdy - \iint\limits_{D_i} w_0\,dxdy\Bigg]$$

$$= \sum_{i\in c_x}[w_0(x_{i+1},y_{i+1}) - w_0(x_i,y_i)] \neq \pm\infty.$$

Аналогично

$$b(z)(w_0) = \sum_{i\in c_y}[w_0(x_{i+1},y_{i+1}) - w_0(x_i,y_i)] \neq \pm\infty.$$

Так как $w_\alpha \in L^1_\infty(G)$, то $A(z,\delta)(w_\alpha) = A(\bar z,\delta)(w_\alpha)$, если $z = (x,y)$, $\bar z = (\bar x,\bar y)$, $x = \bar x$. А так как $\{w_\alpha\}$ слабо* сходится к w_0, то и $A(z,\delta)(w_0) = A(\bar z,\delta)(w_0)$ при $x = \bar x$, $\delta > 0$, следовательно, и $a(z)(w_0) = a(\bar z)(w_0)$ при $x = \bar x$, так что $a(z)(w_0)$ зависит только от x: $a(z)(w_0) = a_{w_0}(x)$. Аналогично $b(z)(w_0) = b_{w_0}(y)$, и согласно (6)

$$w_0(x,y) = w_0(x_1,y_1) + a_{w_0}(x) + b_{w_0}(y)$$

для п. в. $z = (x,y) \in G$, т. е. $w_0 \in L^1_\infty(G)$.

Если множество G содержит более одной l-компоненты, то приведенные рассуждения можно провести для каждой l-компоненты K независимо от других l-компонент, поскольку из слабой* сходимости $\{w_\alpha\}$ в пространстве $L_\infty(G)$ будет следовать слабая* сходимость сужений w_α в пространстве $L_\infty(K)$. Таким образом, $L^1_\infty(G)$ слабо* замкнуто.

Теорема 1. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^2$. Тогда подпространство $L^2_\infty(G)$ проксиминально.*

Доказательство. Теорема вытекает из того, что всякое слабо* замкнутое подпространство в сопряженном пространстве проксиминально.

Теорема 2. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^2$ и длины всех неприводимых молний из G ограничены числом $M < \infty$. Тогда подпространства $L^2_\infty(G)$ и $L^3_\infty(G)$ совпадают с $L^1_\infty(G)$ и, следовательно, проксиминальны.*

Доказательство. Как отмечалось, не ограничивая общности, можно считать G l-связным. Пусть $w = \varphi(x) + \psi(y) \in L^1_\infty(G)$, тогда, как и в теореме 1, почти для всех точек $z \in G$ получим для w представление (6):

$$w(x,y) = w(x_1,y_1) + a_w + b_w(y),$$

где

$$a_w(x) = a(z)(w) = \sum_{i\subset c_x}[w(x_{i+1},y_{i+1}) - w(x_i,y_i)],$$

$$b_w(y) = b(z)(w) = \sum_{i\in c_y}[w(x_{i+1},y_{i+1}) - w(x_i,y_i)],$$

$\{z_i = (x_1,y_i)\}$ — точки Лебега функции $w(x,y)$, составляющие молнию $\{z_1,z_2,\dots z_m = z\}$, соединяющую z_1 и z. В силу условия теоремы и леммы 2 можно считать, что $m \leqslant M+1$. Кроме того, в соответствии с (5) $|w(x_i, y_i)| \leqslant \|w\|_G$, поэтому

$$|a_w(x)| \leqslant 2(M+1)\|w\|_G < \infty, \qquad |b_w(y)| \leqslant 2(M+1)\|w\|_G < \infty$$

для п. в. точек $(x,y) \in G$. Положив $w(x_1, y_1) + a_w(x) = \tilde{a}_w(x)$, получим $w(x,y) = \tilde{a}_w(x) + b_w(y)$, где $\tilde{a}_w(x)$, $b_w(y) \in L_\infty(G)$, так что $w \in L^2_\infty(G)$ и $L^1_\infty(G) \subset L^2_\infty(G)$. Кроме того, $L^2_\infty \subset L^3_\infty$. Действительно, если бы, например, было $\mu_x(e) > 0$, где $e = \{x \in X_G : |\varphi(x)| > \|\varphi\|_G\}$, то выполнялось бы $\mu\{(x,y) \in G : |\varphi(x)| > \|\varphi\|_G\} > 0$, что невозможно. Таким образом, в условиях теоремы $L^1_\infty \subset L^2_\infty \subset L^3_\infty$. Обратные включения очевидны.

Условие теоремы 2 нельзя опустить, как показывает следующий пример, взятый, по существу, из [9].

Пример 1. Множество G есть область, ограниченная линиями $y = x$, $y = x + x^3$, $x = 1$. На G задана функция $w = 1/x - 1/y$, если $(x,y) \neq (0,0)$, и $w = 0$, если $(x,y) = (0,0)$. Нетрудно проверить, что w ограничена (и даже непрерывна); в то же время $\varphi(x) = 1/x$ и $\psi(y) = -1/y$ не ограничены соответственно на X_G и Y_G. Таким образом, $w \in L^1_\infty(G)$, но $w \notin L^3_\infty(G) = L^2_\infty(G)$. Учитывая, что $w(x,y) \to 0$ при $(x,y) \to 0$ ($(x,y) \in G$), легко проверить, что $w(x,y)$ принадлежит замыканию $\overline{L^2_\infty(G)}$, следовательно, $L^2_\infty(G)$ не проксиминально.

§ 3. Пространство $L_1(G)$

В этом параграфе через $\|\cdot\|_G$ будем обозначать норму в пространстве $L_1(G)$ функций, суммируемых на $G \subset \mathbb{R}^2$, $\|f\|_G = \iint\limits_G |f(x,y)|\,dxdy$. Как и раньше, рассматриваем три пространства из $L_1(G)$:

$$L^1_1(G) = \{w \in L_1(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi, \psi\ \mu\text{-измеримы и конечны п. в}\};$$
$$L^2_1(G) = \{w \in L_1(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi, \psi \in L_1(G)\};$$
$$L^3_1(G) = \{w \in L_1(G) : w = \varphi(x) + \psi(y),\ \varphi \in L_1(X_G),\ \psi \in L_1(Y_G)\},$$

где X_G, Y_G — проекции G на óси x и y.

Для $f(x,y) \in L_1(G)$ рассмотрим задачи:

$$\|f - w\|_G \to \min, \qquad w \in L^i_1(G), \qquad i = 1, 2, 3,$$

и найдем условия проксиминальности подпространств $L^i_1(G)$.

Нам понадобится следующая известная теорема (см. [13, с. 156]).

Теорема (R). *Сумма замкнутых подпространств U и V банахова пространства Z является замкнутой в том и только в том случае, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для всякой $w \in U + V$ существует представление $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$, для которого $\|u\| + \|v\| \leqslant c\|u + v\|$.*

Лемма 3. *Пусть H — ограниченное множество класса П, тогда подпространства $L^1_1(H)$, $L^2_1(H)$, $L^3_1(H)$ совпадают и замкнуты.*

Доказательство. Пусть h_x, h_y — проекции H на óси x и y. Ради простоты будем считать $\mu_x(h_x) = \mu_y(h_y) = 1$. Пусть $w = \varphi(x) + \psi(y) \in L_1(H)$. Тогда

$$\iint\limits_H |\varphi(x) + \psi(y)|\,dxdy = \int\limits_{h_y} dy \int\limits_{h_x} |\varphi(x) + \psi(y)|\,dx < \infty,$$

и по теореме Фубини $\int\limits_{h_x} |\varphi(x)+\psi(y)|\,dx < \infty$ для μ_y-п. в. $y \in h_y$, поэтому

$$\iint\limits_H |\varphi(x)|\,dxdy = \int\limits_{h_x} |\varphi(x)|\,dx < \infty,$$

т. е. $\varphi(x) \in L_1(H)$ и $\varphi(x) \in L_1(h_x)$. Аналогичным образом $\psi(y) \in L_1(H)$, $\psi(y) \in L_1(h_y)$. Отсюда $L_1^1(H) \subset L_1^2(H)$ и $L_1^1(H) = L_1^3(H)$. Обратные включения для $H \in \Pi$ очевидны, и, значит, $L_1^1(H) = L_1^2(H) = L_1^3(H)$.

Замкнутость $L_1^i(H)$, $i = 1,2,3$, докажем, следуя [3]. Пусть $w = \varphi(x)+\psi(y) \in L_1(H)$. Так как $\varphi(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого, можно считать, что $\iint\limits_H \varphi(x)\,dxdy = 0$. Тогда, поскольку φ, $\psi \in L_1(H)$, получим

$$\|w\|_H = \iint\limits_H |\varphi(x)+\psi(y)|\,dxdy$$
$$\geqslant \iint\limits_H [\varphi(x)+\psi(y)]\operatorname{sign}\psi(y)\,dxdy = \iint\limits_H |\psi(y)|\,dxdy = \|\psi\|_H,$$

откуда $\|\varphi\|_H \leqslant \|w\|_H + \|\psi\|_H \leqslant 2\|w\|_H$. Таким образом, $\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H \leqslant 3\|w\|_H$, и остается сослаться на теорему (R), поскольку подпространство функций из $L_1(H)$, зависящее лишь от одного переменного, очевидно, замкнуто.

Лемма 4. *Пусть G — l-связное открытое множество, $D_1 = D(z_1,\delta_1)$ — фиксированный квадрат из G, $w(x,y) = \widetilde{\varphi}(x)+\widetilde{\psi}(y) \in L_1(G)$. Тогда функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ можно выбрать так, что $w(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)$ и выполняются условия:*

1) $\|\varphi\|_{D(z_1,\delta)} \leqslant 2\|w\|_G$, $\|\psi\|_{D(z_1,\delta)} \leqslant 2\|w\|_G$ *при* $\delta \leqslant \delta_1$;

2) *для произвольного квадрата $D = D(t,\delta) \subset G$ при достаточно малом $\delta = \delta(D)$*

$$\|\varphi\|_D \leqslant (m+1)\|w\|_G, \qquad \|\psi\|_D \leqslant (m+1)\|w\|_G,$$

где m — длина какой-либо молнии, соединяющей точки z_1 и z.

Доказательство. Положив $q = \iint\limits_{D_1} \widetilde{\varphi}(x)\,dxdy$ и $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) - q/\delta^2$, $\psi(y) = \widetilde{\psi}(y) + q/\delta^2$, как и во второй части леммы 3, при $\delta \leqslant \delta_1$ получим

$$\|\psi\|_{D(z_1,\delta)} \leqslant \|\psi\|_{D_1} \leqslant \|w\|_{D_1} \leqslant \|w\|_G, \qquad \|\varphi\|_{D(z_1,\delta)} \leqslant \|\varphi\|_{D_1} \leqslant 2\|w\|_{D_1} \leqslant 2\|w\|_G.$$

Пусть $\{D_1, D_2, \ldots, D_m = D\}$ — δ-молния, соединяющая z_1 и z ($D_i = D(z_i,\delta)$, $z_i = (x_i,y_i)$), и пусть для определенности $x_2 = x_1$. Тогда $\varphi(x)$ принимает в точках из D_2 те же значения, что и в соответствующих точках из D_1, поэтому

$$\|\varphi\|_{D_2} = \|\varphi\|_{D_1} \leqslant 2\|w\|_G, \qquad \|\psi\|_{D_2} \leqslant \|w\|_G + 2\|w\|_G = 3\|w\|_G.$$

Таким же образом для D_3 получим $\|\psi\|_{D_3} \leqslant 3\|w\|_G$ и $\|\varphi\|_{D_3} \leqslant 3\|w\|_G$. Совершив $m-1$ шагов, для $D = D_m$ получим

$$\|\varphi\|_{D_m} \leqslant (m+1)\|w\|_G, \qquad \|\psi\|_{D_m} \leqslant (m+1)\|w\|_G,$$

что и требовалось.

Мы используем далее следующую теорему Комлоша [14; 15, с. 283] (в [14] эта теорема доказана для вероятностных мер в терминах закона больших чисел).

Теорема (К). *Из всякой ограниченной последовательности* $\{w_n\} \subset L_1(G)$ *можно выбрать подпоследовательность* $\{w_{n_k}\}$, *для которой средние арифметические*

$$\widetilde{w}_m(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} w_{n_k}(z), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

сходятся п. в. к функции $w_0 \in L_1(G)$.

Построение $\widetilde{w}_m(z)$ по последовательности $w_n(z)$ будем называть *процедурой* (К); полученную последовательность для простоты будем обозначать той же буквой, что и исходную, но с другим индексом (т. е. вместо $\widetilde{w}_m$ будем писать w_m).

Теорема 3. *Пусть* G — *открытое множество из* $\mathbb{R}^2$. *Тогда подпространство* $L_1^1(G)$ *проксиминально.*

Доказательство. Как и раньше, будем вначале считать G l-связным. Пусть $f(x,y) \in L_1(G)$, $w_n = \varphi_n(x) + \psi_n(y) \in L_1^1(G)$ — минимизирующая последовательность для f, так что $\|f - w_n\|_G \to \rho(f, L_1^1)$, и можно принять $\|w_n\|_G \leqslant 2\|f\|_G$. Пусть $D_j = D(z_j, \delta_j) \subset G$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — счетная последовательность открытых квадратов без общих точек ($D_j \in \Pi$), сумма которых совпадает с G с точностью до множества нулевой меры μ (см. [12]); m_j — длина молнии $l(z_1, z_j)$, соединяющей z_1 и z_j. Согласно лемме 4 можно принять, что $\|\varphi_n\|_{D_1}, \|\psi_n\|_{D_1} \leqslant 2\|w_n\|_{D_1} \leqslant 4\|f\|_G$. Применив процедуру (К) к ограниченной последовательности $\{w_n = \varphi_n + \psi_n\}$, получим последовательность $\{w_i = \varphi_i + \psi_i\} \subset L_1^1(G)$ такую, что

a) $\{w_i\}$ — минимизирующая последовательность для f;
b) $\|w_i\|_G \leqslant 2\|f\|_G$;
c) $\{w_i\}$ сходится п. в. на G к $w_0 \in L_1(G)$;
d) $\|\varphi_i\|_{D_1}, \|\psi_i\|_{D_1} \leqslant 4\|f\|_G$.

Эти свойства вытекают из выпуклости подпространства L_1^1 и выпуклости нормы. Используя ограниченность $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ на квадрате D_1 и перманентность метода средних арифметических, применим еще дважды процедуру (К); в результате получим последовательность $\{w_s = \varphi_s + \psi_s\}$, которая удовлетворяет условиям, аналогичным a)–d), а также условию:

e) $\{f_s\}$, $\{\psi_s\}$ сходятся п. в. на D_1 соответственно к $\varphi_0(x)$, $\psi_0(y) \in L_1(D_1)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{w_s\}$ на объединении $D_{1,2}$ квадратов D_1 и D_2. Возьмем $\delta \leqslant \delta_1$ такое, что существует δ-молния $l_\delta(z_1, z_2)$ длины m_2, соединяющая z_1 и z_2. Без ограничения общности можно считать, что $\delta_2 \leqslant \delta$. (В противном случае разобьем квадрат $D_2 = D(z_2, \delta_2)$ на частичные квадраты $D_2^k = D(z_2^k, \tilde{\delta}_2)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\tilde{\delta}_2 < \delta$. При этом длины молний, соединяющих z_1 с точками z_2^k $(k = 1, \ldots, N)$, можно считать не большими, чем $m_2 + 2$). По лемме 4 имеем $\|\varphi_s\|_{D_{1,2}} \leqslant (m_2 + 2)\|w_s\|_G$, $\|\psi_s\|_{D_{1,2}} \leqslant (m_2 + 2)\|w_s\|_G$, и по-прежнему $\|w_s\|_G \leqslant 2\|f\|_G$. Снова трижды применяя процедуру (К), получим последовательность $\{w_r = \varphi_r + \psi_r\}$, которая удовлетворяет условиям, аналогичным a)–c), а также условиям:

d′) $\|\varphi_r\|_{D_{1,2}}, \|\psi_r\|_{D_{1,2}} \leqslant 2(m_2 + 2)\|f\|_G$;

e′) $\{\varphi_r(x)\}$, $\{\psi_r(y)\}$ сходятся на $D_{1,2}$ п. в. соответственно к функциям $\varphi_0(x)$, $\psi_0(y)$ (которые мы снова обозначили через φ_0, ψ_0, поскольку на D_1 они совпадают с ранее определенными на D_1 функциями φ_0, ψ_0).

Далее, рассмотрим последовательность $\{w_r = \varphi_r + \psi_r\}$ на объединении $D_{1,2,3} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ и т. д. Продолжив это построение счетное число раз и применив диагональный процесс, получим последовательность $\{w_l = \varphi_l + \psi_l\}$ такую, что $w_l(x,y)$ сходится п. в. к $w_0(x,y) \in L_1(G)$, а $\varphi_l(x)$ и $\psi_l(y)$ сходятся п. в. на G к измеримым функциям $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(y)$ соответственно. Таким образом, $w_0 \in L_1^1(G)$. Кроме того, $\{w_l\}$ — минимизирующая последовательность, поэтому по лемме Фату имеем

$$\rho(f, L_1^1) = \lim_{l\to\infty} \iint\limits_G |f - w_l|\,dxdy \geqslant \iint\limits_G \lim_{l\to\infty} |f - w_l|\,dxdy = \iint\limits_G |f - w_0|\,dxdy,$$

и, значит, w_0 — ЭНП для f в подпространстве $L_1^1(G)$. В силу произвольности f подпространство $L_1^1(G)$ проксиминально. Если G содержит более одной l-компоненты, приведенные рассуждения можно провести для каждой l-компоненты K независимо от других l-компонент. Действительно, если $\{w_n\}$ — минимизирующая последовательность для f в $L_1^1(G)$, то сужения $w_n(x,y)$ в K образуют минимизирующую последовательность для сужения f в $L_1^1(K)$. Теорема доказана.

Перейдем к подпространству $L_1^2(G)$. Введем некоторые геометрические характеристики для плоского множества. Будем говорить, что граница $\operatorname{Fr} G$ открытого множества G обладает *свойством Q-покрытия*, если для всякой точки $z \in \operatorname{Fr} G$ найдется открытый квадрат $D \subset G$ ($D \in \Pi$), который можно сдвинуть параллельно оси x или y так, что он покроет некоторую окрестность точки z в множестве G (т. е. покроет пересечение некоторой ее окрестности с множеством G). *Ограниченным крестом* множества G (ср. [1, 5]) назовем его открытое ограниченное подмножество G^+, удовлетворяющее условию: существует $\delta > 0$ такое, что для всякой точки $\bar z(\bar x, \bar y) \in \overline{G} \setminus \overline{G^+}$ хотя бы одна из прямых $x = \bar x$, $y = \bar y$ пересекает G^+ по множеству линейной меры, не меньшей δ.

Теорема 4. *Пусть G — открытое ограниченное множество с границей, обладающей свойством Q-покрытия. Тогда подпространство $L_1^2(G)$ совпадает с $L_1^1(G)$ и, следовательно, проксиминально.*

Доказательство. Пусть $w = \varphi(x) + \psi(y) \in L_1(G)$. Допустим, что $\varphi(x)$ несуммируема на G. Тогда существует точка $z_0 \in \overline{G}$, в любой окрестности которой в множестве G функция $\varphi(x)$ (а значит, и $\psi(y)$) несуммируема. В силу леммы 3 $z_0 \in \operatorname{Fr} G$. Пусть для определенности $D_1 = D((x_1, y_1), \delta)$ — квадрат из G, сдвиг которого $-D((\tilde x_1, y), \delta)$ содержит некоторую окрестность U точки z_0 в множестве G. Тогда сдвиг этой окрестности $\widetilde U = U + (\tilde x_1 - x_1)$ принадлежит квадрату D_1. Поскольку $\psi(y)$ несуммируема на U, она несуммируема и на $\widetilde U$, а значит, и на D_1, что невозможно. Действительно, по лемме 3 из суммируемости $w = \varphi(x) + \psi(y)$ на D_1 вытекает суммируемость на D_1 слагаемых $\varphi(x)$, $\psi(y)$. Таким образом, $\varphi, \psi \in L_1(G)$ и $w = \varphi(x) + \psi(y) \in L_1^2(G)$, что и требовалось.

Замечание. Условие Q-покрытия существенно, как показывает пример 2. Из этого примера следует также, что условие ограниченности длин молний (и даже δ-молний) не является достаточным для проксиминальности $L_1^2(G)$ (в отличие от $L_\infty^2(G)$). Вместе с тем, класс множеств, удовлетворяющих требованию теоремы 4, достаточно широк. Ему принадлежат, например, выпуклые области, симметричные относительно осей координат, а также множества вида $\{a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$, где $f(x)$ непрерывна.

Пример 2. Ограниченное множество G состоит из двух топологических компонент. Первая ограничена линиями $y = x$, $y = x + x^2$, $y = 1$, а вторая — линиями $x = 2$, $x = 2 + y^3$, $y = 1$. Ясно, что G l-связно.

Положим $\varphi(x) = 1/x^3$, $\psi(y) = -1/y^3$ и $w = \varphi(x) + \psi(x)$. Нетрудно проверить, что $w \in L_1(G)$, но $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ несуммируемы на G. В то же время $w(x,y)$ принадлежит замыканию $\overline{L_1^2(G)}$; следовательно, $L_1^2(G)$ не проксиминально. Включение в G второй компоненты показывает, что ограниченность длин молний и даже δ-молний (для данного G длина всякой приведенной молнии не больше трех) не является достаточной для проксиминальности $L_1^2(G)$. Точка $(0,0)$ является «особой»: любая ее окрестность (в множестве G) не покрывается никаким «сдвинутым» квадратом $D \subset G$. Добавив к G, например, прямоугольник $\{3 < x < 4, 0 < y < 1\}$, получим множество G', для которого подпространство $L_1^2(G')$ проксиминально.

Рассмотрим теперь случай неограниченного множества G.

Теорема 5. *Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям:*

1) *линейные меры сечений G_x, G_y ограничены (в частности, меры проекций X_G и Y_G конечны);*
2) *G содержит ограниченный крест G^+ с границей, удовлетворяющей условию Q-покрытия.*

Тогда подпространство $L_1^2(G)$ проксиминально.

Доказательство. Пусть $w = \varphi(x) + \psi(y) \in L_1(G)$, но $\varphi(x)$ (а значит, и $\psi(y)$) несуммируема. Допустим вначале, что существует точка $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{G}$, в любой окрестности которой (в множестве G) $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ несуммируемы. Рассуждая так же, как в теореме 4, убеждаемся, что $z_0 \in \overline{G} \setminus \overline{G^+}$. Пусть для определенности точки z_0, $\tilde{z}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in G^+$ лежат на прямой $y = \tilde{y}_0$ (в соответствии с определением G^+), тогда и в любой окрестности U точки $\tilde{z}_0 \in G^+$ функция $\varphi(x)$ также будет несуммируемой. Учитывая свойства креста G^+ и теорему 4, придем к противоречию. Пусть теперь по-прежнему $\varphi(x)+\psi(y) \in L_1(G)$, $\varphi(x) \notin L_1(G)$, но $\varphi(x)$ суммируема на любой ограниченной измеримой части G. Покроем G^+ некоторым квадратом $D(\theta, R) \in \Pi$. Тогда в силу последнего допущения $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ будут несуммируемы либо на $P = \{(x,y) \in G : |x| \geqslant R\}$, либо на $Q = \{(x,y) \in G : |y| \geqslant R\}$. Примем для определенности первый вариант. Поскольку $\delta < \mu_x(G_y \cap G^+) < \mu_x(G_y) \leqslant K < \infty$ и $Y_P \subset Y_{G^+}$, имеем

$$\infty = \iint_P |\psi|\,dxdy = \int_{Y_P} |\psi|\,dy \int_{G_y\cap P} dx \leqslant \int_{Y_{G^+}} |\psi|\,dy \int_{G_y} dx$$
$$\leqslant K \int_{Y_{G^+}} |\psi|\,dy \leqslant \frac{K}{\delta} \int_{Y_{G^+}} |\psi|\,dy \int_{G_y\cap G^+} dx = \frac{K}{\delta} \iint_{G^+} |\psi|\,dxdy.$$

Таким образом, $\psi(y)$ несуммируема на G^+, так что с учетом условия 2 снова приходим к ситуации теоремы 4 и, рассуждая так же, как и раньше, приходим к противоречию, завершающему доказательство теоремы 5.

Замечание. Ни одно из двух условий теоремы 5 нельзя опустить, как показывают примеры 3, 4. В то же время легко построить неограниченное множество G, удовлетворяющее обоим условиям.

Пример 3. Пусть d_n — область, ограниченная линиями $y = x$, $y = x + 1/x^2$, $x = n^3$, $x = n^3 + 1/n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} d_n$, $\varphi(x) = x^{1.5}$,

$\psi(y) = -y^{1,5}$, $w = x^{1,5} - y^{1,5}$. Нетрудно подсчитать, что

$$\mu(G) < \infty, \quad \mu_x(X_G) < \infty, \quad \mu_y(Y_G) < \infty,$$
$$\iint\limits_G |w|\,dxdy < \infty, \quad \iint\limits_G |\varphi|\,dxdy = \infty.$$

Таким образом, $w \in L_1^1(G)$, но $w \notin L_1^2(G)$. Ясно также, что w принадлежит замыканию $\overline{L_1^2(G)}$ в метрике L_1, и поэтому $L_1^2(G)$ не проксиминально. Множество G имеет границу, обладающую свойством Q-покрытия, но не содержит ограниченного креста.

Пример 4. Область G состоит из следующих групп прямоугольников:

1) декартовы произведения интервалов v_n и u_n, где

$$v_n = \left\{x : \sum_{k=0}^{n-1} k^{0,1} < x < \sum_{k=0}^{n} k^{0,1}\right\}, \quad u_n = \left\{y : \sum_{k=0}^{n-1} k^{-1,2} < y < \sum_{k=0}^{n} k^{-1,2}\right\},$$
$$n = 1, 2, \ldots;$$

2) декартовы произведения интервалов u_n и интервала $\{-1 < x < 0\}$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) декартовы произведения интервалов v_n и h_n, где $h_n = \{y : -n^{-2} < y < 0\}$, $n = 1, 2, \ldots$;

4) прямоугольник $d_0 = \{-1 < x < 0,\ -1,1 < y < 0\}$.

Полагаем $w = \varphi(x) + \psi(y)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x < 0, \\ n^{0,15} & \text{при } x \in v_n; \end{cases} \qquad \psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < y < 0, \\ -n^{0,15} & \text{при } y \in u_n; \end{cases}$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно подсчитать, что $\mu(G) < \infty$, $w \in L_1^1(G)$, $\varphi \notin L_1(G)$, $\psi \notin L_1(G)$ и, значит, $w \notin L_1^2(G)$. Функция w принадлежит замыканию $\overline{L_1^2(G)}$; следовательно, $L_1^2(G)$ не проксиминально. Множество G содержит ограниченный крест, выродившийся в прямоугольник

$$G^+ = \left\{-1,1 < y < \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1,2},\ -1 < x < 0\right\}$$

и обладающий границей со свойством Q-покрытия, но меры сечений G_y не ограничены при $y \to 0$.

Перейдем, наконец, к подпространству $L_1^3(G)$.

Теорема 6. *Пусть G — открытое множество и $\mu(G) < \infty$. Для того чтобы подпространства $L_1^2(G)$ и $L_1^3(G)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*:

($*$) существует число $\delta > 0$ такое, что меры всех непустых сечений G_x и G_y не меньше δ.

Условие ($*$) необходимо, а в условиях теорем 4 или 5 и достаточно для проксиминальности подпространства $L_1^3(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется условие ($*$), т. е. $\mu_y(G_x)$, $\mu_x(G_y) \geqslant \delta$, и пусть $w = \varphi(x) + \psi(y)$. Тогда

$$\infty > \iint\limits_G |\varphi(x)|\,dxdy = \int\limits_{X_G} |\varphi(x)|\,dx \int\limits_{G_x} dy \geqslant \delta \int\limits_{X_G} |\varphi(x)|\,dx$$

и, значит, $\varphi \in L_1(X_G)$. Аналогично $\psi \in L_1(Y_G)$, поэтому $w \in L_1^3(G)$ и $L_1^2 \subset L_1^3$. Верно и обратное включение. Действительно, если $\varphi(x) \in L_1^3(G)$, то $\int\limits_{X_G} |\varphi|\,dx \leqslant C < \infty$. Допустив, что $\varphi \notin L_1^2(G)$, получим

$$\infty = \iint\limits_G |\varphi|\,dxdy \leqslant \iint\limits_{Y_G} dy \int\limits_{X_G} |\varphi|\,dx \leqslant C \int\limits_{Y_G} dy,$$

так что $\int\limits_{Y_G} dy = \mu_y(Y_G) = \infty$. Но тогда

$$\iint\limits_G dxdy = \int\limits_{Y_G} dy \int\limits_{G_y} dx \geqslant \int\limits_{Y_G} \delta\,dy = \infty,$$

что противоречит тому, что $\mu(G) < \infty$.

Пусть теперь условие $(*)$ не выполняется. Тогда существует последовательность непересекающихся подмножеств $\{e_n\}$, $e_n \subset X_G$, $0 < \mu_x(e_n) \leqslant K < \infty$ таких, что $\mu_y(G_x) < 1/2^n$ при $x \in e_n$. Положим $\varphi(x) = 1/\mu_x(e_n)$ при $x \in e_n$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin \cup e_n$. Тогда

$$\int\limits_{X_G} |\varphi|\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{e_n} \frac{dx}{\mu_x(e_n)} = \infty,$$

так что $\varphi \notin L_1(X_G)$. С другой стороны,

$$\iint\limits_G |\varphi|\,dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{e_n} |\varphi|\,dx \int\limits_{G_x} dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{e_n} |\varphi| \mu_y(G_x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{e_n} \frac{dx}{\mu_x(e_n)} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

так что $\varphi \in L_1(G)$. Таким образом, при $w_0 = \varphi(x)$ имеем $w_0 \notin L_1(X_G)$ и $w_0 \in L_1(G)$, значит, $L_1^2 \neq L_1^3$. Нетрудно видеть, что построенная функция w_0 принадлежит замыканию $\overline{L_1^3(G)}$. Поэтому $L_1^3(G)$ не проксиминально.

Последнее утверждение леммы очевидно.

Таким образом, класс множеств G, для которых $L_1^3(G)$ проксиминально, весьма узок (в отличие от $L_\infty^3(G)$). Ему принадлежит, например, множество $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ |x| < 1 - \varepsilon,\ |y| < 1 - \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

§ 4. Пространство $L_p(G)$, $1 < p < \infty$

Остановимся кратко на пространствах $L_p(G)$ функций, суммируемых в p-й степени на множестве $G \subset \mathbb{R}^2$ $(1 < p < \infty)$. Как известно, эти пространства рефлексивны. Однако это не приводит к существенным упрощениям. Дело в том, что основная трудность состоит в доказательстве замкнутости $L_p^1(G)$, поскольку это подпространство (как и для $p = \infty$, $p = 1$) не является суммой подпространств функций $\{\varphi(x)\}$ и $\{\psi(y)\}$ и обычно применяемые теоремы не работают. Доказательство замкнутости $L_p^1(G)$ можно провести тем же методом, что и для $L_\infty^1(G)$. Построенные в доказательстве предложения 1 функционалы $A(z,\delta)(w)$, $B(z,\delta)(w)$ являются непрерывными на $L_p(G)$. Поэтому, рассуждая так же, как в предложении 1, придем к заключению, что $L_p^1(G)$ — замкнутое подпространство для произвольного открытого множества G.

Как известно, всякое такое подпространство в рефлексивном пространстве является проксиминальным. Рассмотрение подпространств L_p^2 и L_p^3 можно вести теми же методами, что и в случае $p = 1$. Следует лишь заметить, что замкнутость $L_p^1(D)$ на квадрате $D \in \Pi$ вытекает в этом случае из замкнутости $L_p^1(G)$ на произвольном G. Таким образом, приходим к заключению, что формулировки теорем 3–6 остаются верными и для пространств $L_p(G)$ при $1 < p < \infty$.

В заключение отметим, что вместо меры Лебега μ в определении пространств $L_p(G) = L_p(G, \mu)$ можно рассматривать меры более общие, чем мера Лебега. Пусть, в частности, ν_x (соответственно ν_y) — мера, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств оси x (оси y), абсолютно непрерывная относительно линейной меры Лебега μ_x (μ_y), и пусть $0 < \nu_x(e) < \infty$ ($0 < \nu_y(e) < \infty$) для всякого ограниченного открытого подмножества оси x (оси y). Тогда приведенные в статье теоремы остаются верными и для пространств $L_p(G, \nu)$, где ν — произведение мер ν_x и ν_y.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Офман Ю. П.* О наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № 2. С. 239–252.
2. *Diliberto S. P., Straus E. G.* On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables // Pacific J. Math. 1951. V. 1, N 1. P. 195–210.
3. *Holland S. M., Light W. A., Sulley L. J.* On proximinality in $L_1(T \times S)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86, N 2. P. 279–282.
4. *Light W. A., Cheney E. W.* Approximation theory in tensor product spaces. Berlin: Springer-Verl., 1985. (Lecture Notes in Math.; v. 1169).
5. *Моторный В. П.* К вопросу о наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 6. С. 1211–1214.
6. *Хавинсон С. Я.* Чебышевская теорема для приближения функции двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 650–666.
7. *Buck R. C.* On approximation theory and functional equations // J. Approx. Theory. 1972. V. 5, N 3. P. 228–237.
8. *Marshall E. D., O'Farrel A. G.* Approximation by a sum of two algebras. The lighting bolt principle // J. Funct. Anal. 1983. V. 52, N 3. P. 353–368.
9. *Гаркави А. Л., Медведев В. А., Хавинсон С. Я.* О существовании наилучшего равномерного приближения функции двух переменных суммами $\varphi(x) + \psi(y)$ // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 819–827.
10. *Арнольд В. И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 4. С. 679–681.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
13. *Рудин Ф. А.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
14. *Komlós J.* A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1967. V. 18. P. 217–229.
15. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985.

г. Москва *Статья поступила 17 августа 1995 г.*