Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба, Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 1, 210–220

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2021. Том 62, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБО СУБНОРМАЛЬНЫМИ И ЧАСТИЧНО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ц. Хуан, Б. Ху, А. Н. Скиба

Аннотация. Изучается влияние слабо субнормальных и частично субнормальных подгрупп на строение G. В частности, доказано, что конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G и любая подгруппа Шмидта группы G частично субнормальна в G.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.118

Ключевые слова: конечная группа, слабо субнормальная подгруппа, частично субнормальная подгруппа, сверхразрешимая группа, подгруппа Шмидта.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны, и G всегда обозначает группу; G называется *группой Шмидта*, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа из G нильпотентна. Подгруппа H из G называется *полуперестановочной* в G [1], если H имеет такое добавление B в G, что H перестановочна с каждой подгруппой L из B, т. е. $HL = LH$; $\mathfrak{U}$*-нормальной* в G [2], если каждый главный фактор группы G между H^G и H_G циклический. Символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает $\mathfrak{F}$*-корадикал* группы G [3], т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G со свойством $G/N \in \mathfrak{F}$. Мы используем $G^{\mathfrak{N}}$ и $G^{\mathfrak{U}}$ для обозначения нильпотентного и сверхразрешимого корадикалов группы G соответственно.

Подгруппа A группы G называется *субнормальной* в G, если $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Субнормальные и обобщенно субнормальные подгруппы нашли широкие приложения при изучении групп G с различными ограничениями на характер вложения в G выделенных систем подгрупп. В данной работе рассмотрены следующие два обобщения субнормальности.

Определение 1.1. Говорят, что подгруппа H группы G является (i) *слабо субнормальной* в G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полуперестановочной подгруппы B из G; (ii) *частично субнормальной* в G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы B из G.

Исследования поддерживаются грантом НФСО Китая (грант № 11401264) и TAPP Цзянсуского высшего образовательного института (PPZY 2015A013).

Ясно, что все субнормальные и все перестановочные подгруппы слабо субнормальны; все субнормальные подгруппы и все $\mathfrak{U}$-нормальные подгруппы частично субнормальны в G.

Пример 1.2. Пусть $7 < p < q < r < t$ — простые числа, где r делит $t-1$. Пусть P — простой точный $\mathbb{F}_pC_q$-модуль и A — подгруппа порядка p из P. Тогда $A < P$, так как $q > p$.

(i) Пусть $G = (P \rtimes C_q) \times A_5$, где A_5 — знакопеременная группа степени 5. Пусть $H = AB$, где B — группа порядка 12 в A_5. Тогда A субнормальна и B полуперестановочна в G, поэтому H слабо субнормальна в G. Поскольку $B = H \cap A_5$ не является субнормальной в A_5, H не является субнормальной в G по [4, гл. A, лемма 14.1(b)]. Понятно, что $H_G = 1$, поэтому каждая неединичная подгруппа из H не является $\mathfrak{U}$-нормальной в G. Следовательно, H не является частично субнормальной в G.

(ii) Пусть $G = (C_7 \rtimes (C_2 \times C_3)) \times (P \rtimes C_q)$, где $C_2 \times C_3 = \mathrm{Aut}(C_7)$. Пусть $H = AB$, где $B = C_2$. Тогда $H_G = 1$ и B $\mathfrak{U}$-нормальна в G, поскольку $B^G = C_7 \rtimes C_2$. Следовательно, H частично субнормальна в G. Предположим, что H слабо субнормальна в G, т. е. $H = LT$ для некоторой субнормальной подгруппы L и некоторой полуперестановочной подгруппы T из G. Пусть V — подгруппа в G такая, что $G = TV$ и T перестановочна со всеми подгруппами из V. Сначала предположим, что $T = H = AB$. Но тогда для каждого $x \in G$ имеет место $TC_3^x = C_3^xT$ (см. ниже лемму 2.2), поэтому $BC_3^x = C_3^xB = C_3^x \times B$, поскольку любые две холловские $\{2,3\}$-подгруппы группы G сопряжены. Следовательно, $(C_3)^G = C_7 \rtimes C_3 \le C_G(C_2)$. Но тогда $[C_7, C_2] = 1$; противоречие. Значит, $T < H$. Понятно, что H не субнормальна в G, поэтому A является наибольшей субнормальной подгруппой группы G, содержащейся в H. Следовательно, $L = A$ и $T = B$. Применяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что $[C_7, C_2] = 1$. Это противоречие показывает, что H не слабо субнормальна в G.

Бэр доказал [5] (см. также [6, гл. 1, теорема 1.13]), что если $G = AB$, где A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы в G, и производная подгруппа G' нильпотентна, то G также сверхразрешима. Этот результат был обобщен многими авторами (см., например, недавние статьи [7–11]). В данной работе докажем следующий факт в этом направлении исследований.

Теорема 1.3. *G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G и любая подгруппа Шмидта группы G частично субнормальна в G.*

Фактически теорема 1.3 является следствием наших следующих двух результатов, которые, возможно, независимо интересны, поскольку они обобщают некоторые уже известные результаты.

Первая теорема обобщает вышеупомянутый результат Бэра.

Теорема 1.4. *Предположим, что $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G. Тогда G разрешима. Более того, если производная подгруппа G' нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Следствие 1.5 (см. теорему 3.8 в [12]). *Предположим, что $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые подгруппы в G такие, что A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A. Если производная подгруппа G' нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Следствие 1.6. *Если $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые слабо субнормальные подгруппы в G, то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Пусть $D = (G')^{\mathfrak{N}}$. Тогда гипотеза справедлива для G/D по лемме 2.1(1) ниже, поэтому G/D сверхразрешима по теореме 1.4. Следовательно, $G^{\mathfrak{U}} \leq D$. Обратное включение очевидно. Значит, $D = G^{\mathfrak{U}}$. Следствие доказано.

Из следствия 1.6 получаем

Следствие 1.7 (см. теорему 2.1 в [10]). *Если $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые подгруппы в G такие, что A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A, то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.*

Следствие 1.8 (см. теорему 2 в [9]). *Если $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые субнормальные подгруппы в G, то $(G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.*

Теорема 1.9. *Если каждая подгруппа Шмидта в G частично субнормальна в G, то производная подгруппа G' нильпотентна.*

Следствие 1.10 (см. теорему 2 в [13]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ нильпотентна.*

Следствие 1.11 (см. теорему в [8]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ абелева.*

Подгруппа M группы G называется *модулярной в* G, если M является модулярным элементом (в смысле Куроша [14, с. 43]) решетки всех подгрупп группы G, т. е. (i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, (ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$. В силу теоремы 5.2.5 из [14] каждая модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Из этого факта и теоремы 1.9 получаем также

Следствие 1.12 (см. теорему 1.1 в [15]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то $G/F(G)$ абелева.*

2. Доказательство теоремы 1.4

Лемма 2.1. *Пусть A, B и N — подгруппы группы G, где A слабо субнормальна в G и N нормальна в G.*

(1) *AN/N слабо субнормальна в G/N.*

(2) *Если $A \leq B$, то A слабо субнормальна в B.*

(3) *Если $N \leq B$ и B/N слабо субнормальна в G/N, то B слабо субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть $A = \langle L, T\rangle$, где L — субнормальная и T — полуперестановочная подгруппы в G.

(1) $AN/N = \langle LN/N, TN/N\rangle$, где LN/N субнормальна в G/N по [4, гл. A, лемма 14.1(b)] и TN/N полуперестановочна в G/N по лемме 2.4(2) из [1]. Следовательно, AN/N слабо субнормальна в G/N.

(2) Утверждение следует из [4, гл. A, лемма 14.1(a)] и леммы 2.4(4) из [1].

(3) Пусть $B/N = \langle V/N, W/N\rangle$, где V/N субнормальна в G/N и W/N полуперестановочна в G/N. Тогда $B = \langle V, W\rangle$, где V субнормальна в G и W полуперестановочна в G по лемме 2.4(3) в [1], поэтому B слабо субнормальна в G.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами из B, то A перестановочна с V^x для каждой подгруппы V из B и всех $x \in G$.*

Доказательство. Так как $G = AB$, то $x = ab$ для некоторого $a \in A$ и $b \in B$. Тогда

$$AV^x = AV^{ab} = AabVb^{-1}a^{-1} = AbVb^{-1}a^{-1} = bVb^{-1}Aa^{-1} = bVb^{-1}A = AbVb^{-1}$$

является подгруппой в G, поэтому $AV^x = V^xA$. Лемма доказана.

Лемма 2.3 (см. теоремы 3.4 и 3.5 в [16]). *Группа G разрешима, если $G = AB$, где A — сверхразрешимая подгруппа и B — примарная подгруппа нечетного порядка в G.*

Следующий очевидный факт хорошо известен (см., например, [3, I, следствие 7.7.2]).

Лемма 2.4. *Если A — субнормальная подгруппа в G, то $O_p(A) \leq O_p(G)$ для каждого простого числа p.*

Лемма 2.5. (1) *Если максимальная подгруппа M группы G слабо субнормальна в G, то $|G : M| = p$ для некоторого простого числа p.*

(2) *Если M является сверхразрешимой подгруппой в G и M имеет такое циклическое добавление T в G, что M перестановочна со всеми подгруппами из T, то G разрешима.*

Доказательство. (1) По условию $M = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полуперестановочной подгруппы B в G. Более того, M/M_G слабо субнормальна в G/M_G по лемме 2.1(1). Если $M_G \neq 1$, то по индукции для некоторого простого числа p имеем $|G : M| = |G/M_G : M/M_G| = p$. Предположим, что $M_G = 1$, и пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим, что $R \leq N_G(A)$ [4, гл. A, лемма 14.3], поэтому $A^G = A^{RM} \leq M_G = 1$, следовательно, $M = B$ полуперестановочна в G. Пусть T — подгруппа в G такая, что $G = MT$ и $MV = VM < G$ для каждой собственной подгруппы V из T. Максимальность M подразумевает, что $V \leq M$, поэтому T является циклической подгруппой порядка p^n для некоторого простого числа p. Но тогда $|G : M| = |T : T \cap M| = p$.

(2) Предположим, что G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу R. Пусть H/R — произвольная подгруппа в TR/R. Тогда $TR/R \simeq T/(T \cap R)$ является циклическим добавлением к MR/R в G/R и $H = R(H \cap T)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(HR/R)(MR/R) &= (R(H \cap T)/R)(MR/R) = (H \cap T)MR/R \\ &= M(H \cap T)R/R = (MR/R)(H/R),\end{aligned}$$

это означает, что MR/R перестановочна со всеми подгруппами из TR/R. Таким образом, гипотеза справедлива для $(G/R, MR/R, TR/R)$, поэтому G/R разрешима по индукции и, следовательно, G разрешима.

Предположим, что в G нет абелевых минимальных нормальных подгрупп. Тогда $M_G = 1$, так как M разрешима. Следовательно, $M \cap T = 1$, поскольку

$$(M \cap T)^G = (M \cap T)^{TM} = (M \cap T)^M \leq M_G = 1.$$

Пусть V — максимальная в T подгруппа. Тогда

$$|G : MV| = (|MT| : |MV|) = (|M||T| : |M \cap T|) : (|M||V| : |M \cap V|) = |T : V|$$

— простое число. Следовательно, MV — максимальная в G подгруппа. Понятно, что гипотеза справедлива для (MV, M, V), поэтому MV разрешима по индукции. По лемме 2.2 имеем $MV^x = V^xM$ для всех $x \in G$. Следовательно, $L := M^V \cap V^M$ субнормальна в G согласно [17, лемма 1.1.9(2)]. Но $L \leq MV$, тем самым L разрешима. Предположим, что $L \neq 1$. Тогда для некоторого простого числа p имеем $1 < O_p(L) \leq O_p(G)$ по лемме 2.4, поэтому G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу; противоречие. Следовательно, $L = 1$. Тогда $[M, V] \leq [M^V, V^M] \leq M^V \cap V^M = 1$, стало быть, V является циклической нормальной подгруппой в G. Таким образом, $V = 1$, поэтому $|T| = p$ для некоторого простого числа p. Тогда $|G : M| = p$. Если $p = 2$, то M нормальна в группе G и G разрешима. Если $p > 2$, то G разрешима по лемме 2.3.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

(1) *G/R разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G. Более того, если G' нильпотентен, то G/R сверхразрешима. Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $R \nleq \Phi(G)$.*

Прежде всего заметим, что $AR/R \simeq A/(A \cap R)$ и BR/R сверхразрешимы и эти подгруппы слабо субнормальны в G по лемме 2.1(1). Более того, если G' нильпотентна, то $(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$ нильпотентна. Таким образом, гипотеза справедлива для G/R, поэтому G/R разрешима (соответственно сверхразрешима) в силу выбора G. Если G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$, то G/N разрешима (соответственно сверхразрешима), значит, $G \simeq G/(R \cap N)$ разрешима (соответственно сверхразрешима), что противоречит выбору группы G. Поэтому R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $R \nleq \Phi(G)$ согласно [18, VI, теорема 8.6] и выбору G.

(2) *G разрешима.*

Ввиду утверждения (1) достаточно показать, что R разрешима. Предположим, что это неверно.

По условию $A = \langle L, T \rangle$, где L является субнормальной подгруппой и T — полуперестановочной подгруппой в G. Если $L \neq 1$, то для некоторого простого числа p имеем $1 < O_p(L) \leq O_p(G)$ по лемме 2.4, и тогда $R \leq O_p(G)$ согласно утверждению (1), что противоречит нашему предположению о подгруппе R. Таким образом, $L = 1$. Тогда $A = T$ является полуперестановочной в G подгруппой. Пусть U — подгруппа в G такая, что $G = AU$ и $AL = LA$ для всех подгрупп L из U. Пусть V — произвольная циклическая подгруппа в U. Тогда AV разрешима по лемме 2.5(2). С другой стороны, $AV^x = V^xA$ для всех $x \in G$ по лемме 2.2 и, следовательно, $A^V \cap V^A$ субнормальна в G согласно [17, лемма 1.1.9(2)]. Поэтому $A^V \cap V^A = 1$ по лемме 2.4. Таким образом, $[A, V] = [A^V, V^A] \leq A^V \cap V^A = 1$, поэтому для каждой циклической подгруппы V из U имеет место $V \leq N_G(A)$. Но тогда $U \leq N_G(A)$ и, следовательно, $R \leq A$ согласно утверждению (1). Поэтому R является абелевой группой. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (2).

В дальнейшем доказательстве теоремы предполагаем, что G' нильпотентна.

(3) *$R = C_G(R) = F(G) = O_{p',p}(G)$ — силовская p-подгруппа в G для некоторого простого числа p и G/R циклична.*

Из утверждений (1) и (2) следует, что для некоторого простого числа p имеет место $R = C_G(R) = O_{p',p}(G) = F(G)$ согласно [4, гл. A, теорема 15.6].

По условию $G/F(G)$ — абелева группа, поэтому $G/R = G/F(G) = G/C_G(R)$ изоморфна неприводимой абелевой группе автоморфизмов группы R. Следовательно, G/R циклична согласно [6, гл. 1, лемма 1.3]. Отсюда следует, что R — силовская p-подгруппа группы G.

(4) *$AR \neq G \neq BR$. Следовательно, подгруппы AR и BR сверхразрешимы.*

Предположим, что $AR = G$. Тогда A — максимальная подгруппа в G, поэтому $|G : A| = p = |R|$ по лемме 2.5(1). Следовательно, $R = F(G)$ циклична, тем самым G сверхразрешима согласно утверждению (1); противоречие. Таким образом, $AR < G$. Подгруппа A слабо субнормальна в AR по лемме 2.1(2), поэтому гипотеза выполняется для (A, R) на AR. Следовательно, AR сверхразрешима по выбору G. Аналогично проверяется, что BR — сверхразрешимая группа.

Заключительное противоречие. Прежде всего заметим, что ввиду утверждения (3) $R = C_{AR}(R) = F(AR) = O_{p',p}(AR)$ и AR/R — циклическая группа. С другой стороны, подгруппа AR сверхразрешима согласно утверждению (4), поэтому $AR/O_{p',p}(AR) = AR/R$ является циклической группой порядка, делящего $p-1$ [6, гл. 1, теорема 1.9]. Аналогично BR/R является циклической группой порядка, делящего $p-1$. Так как при этом G/R является циклической группой, из $G/R = (AR/R)(BR/R)$ следует, что любая силовская подгруппа группы G/R содержится либо в AR/R, либо в BR/R. Следовательно, $G/R = G/C_G(R)$ является циклической группой порядка, делящего $p-1$, поэтому $|R| = p$ [6, гл. 1, теорема 1.4], что влечет сверхразрешимость группы G. Полученное противоречие завершает доказательство результата.

3. Доказательство теоремы 1.9

Лемма 3.1 (см. предложение 1.8 и лемму 3.3 в [2] или теорему 1.1 и лемму 2.2 в [19]). *Пусть A и $N \leq E$ — подгруппы в G, где N нормальна и A $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Тогда*

(1) *AN/N $\mathfrak{U}$-нормальна в G/N.*

(2) *Если E/N $\mathfrak{U}$-нормальна в G/N, то E $\mathfrak{U}$-нормальна в G.*

(3) *$A \cap E$ $\mathfrak{U}$-нормальна в E.*

(4) *Если E $\mathfrak{U}$-нормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ $\mathfrak{U}$-нормальна в G.*

Лемма 3.2. *Пусть A и $N \leq E$ — подгруппы в G, где N нормальна и A частично субнормальна в G. Тогда*

(1) *AN/N частично субнормальна в G/N.*

(2) *Если $A \leq E$, то A частично субнормальна в E.*

(3) *Если E/N частично субнормальна в G/N, то E частично субнормальна в G.*

(4) *Если E частично субнормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ частично субнормальна в G.*

(5) *Если A — максимальная подгруппа в G, то $|G : A|$ — простое число.*

Доказательство. Пусть $A = \langle L, T\rangle$, где L — субнормальная подгруппа и T является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G.

(1) $AN/N = \langle LN/N, TN/N\rangle$, где LN/N субнормальна в G/N согласно [4, гл. A, лемма 14.1(a)] и TN/N $\mathfrak{U}$-нормальна в G/N по лемме 3.1(1). Следовательно, AN/N частично субнормальна в G/N.

(2) Утверждение следует из [4, гл. A, лемма 14.1(b)] и леммы 3.1(3).

(3) Пусть $E/N = \langle V/N, W/N\rangle$, где V/N субнормальна в G/N и W/N $\mathfrak{U}$-нормальна в G/N. Тогда $E = \langle V, W\rangle$, где V субнормальна в G и W $\mathfrak{U}$-нормальна в G по лемме 3.1(2), поэтому E частично субнормальна в G.

(4) Пусть $E = \langle V, W\rangle$, где V субнормальна и W является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой в G. Тогда

$$\langle A, E\rangle = \langle\langle L, T\rangle, \langle V, W\rangle\rangle = \langle\langle L, V\rangle, \langle T, W\rangle\rangle,$$

где $\langle L, V\rangle$ субнормальна в G согласно [4, теорема 14.4] и $\langle T, W\rangle$ $\mathfrak{U}$-нормальна в G по лемме 3.1(4). Следовательно, $\langle A, E\rangle$ частично субнормальна в G.

(5) Сначала предположим, что $A_G \neq 1$. Тогда A/A_G является максимальной частично субнормальной подгруппой в G/A_G согласно утверждению (1), поэтому по индукции получаем, что $|G : A| = |G/A_G : A/A_G|$ — простое число. Наконец, предположим, что $A_G = 1$. Тогда из [4, гл. A, лемма 14.3] получаем, что $L^G = L^{RA} \leq A_G = 1$, поэтому $A = T$ $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Но тогда $G = A^G$ сверхразрешима и, следовательно, $|G : A|$ — простое число.

Лемма доказана.

Лемма 3.3 (см. [18, III, теорема 5.2] или [3, VI, теорема 24.2]). *Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — силовская p-подгруппа группы G и $Q = \langle x\rangle$ является циклической силовской q-подгруппой в G, $p \neq q$. Кроме того, $\langle x^q\rangle \leq \Phi(G)$ и P имеет экспоненту p или 4 (если P — неабелева 2-группа).*

Доказательство теоремы 1.9. Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка.

(1) *Если E — собственная подгруппа в G, то $E' \leq F(E)$* (это следует из леммы 3.2(2) и выбора G).

(2) *Если N — минимальная нормальная подгруппа в G, то $(G/N)' \leq F(G/N)$.*

Если G/N нильпотентна, то это очевидно. Предположим, что G/N не является нильпотентной, и пусть E/N — произвольная подгруппа Шмидта в G/N. Пусть H — минимальное добавление к N в E. Тогда $H/(H \cap N) \simeq HN/N = E/N$ — группа Шмидта и $H \cap N \leq \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A — подгруппа Шмидта в H.

Из леммы 3.3 вытекает, что

$$(H/(H \cap N))/\Phi(H/(H \cap N)) = (H/(H \cap N))/(\Phi/(H \cap N)) \simeq H/\Phi = P \rtimes Q,$$

где P — силовская p-подгруппа, Q — силовская q-подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $p \neq q$. Отсюда, снова по лемме 3.3, следует, что $A = A_p \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \nleq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, тем самым $E = HN = (A_q)^H N$.

Согласно лемме 3.2(4) $(A_q)^H = A^H$ является частично субнормальной подгруппой в G и, следовательно, $E/N = (A_q)^H N/N$ частично субнормальна в G/N по лемме 3.2(1). Значит, гипотеза верна для G/N, поэтому выбор G подразумевает, что мы имеем (2).

(3) *G разрешима.*

Ввиду утверждений (1) и (2) достаточно лишь показать, что G не является неабелевой простой группой. Предположим, что это неверно, и пусть A — произвольная подгруппа Шмидта из G. По условию A частично субнормальна в G. С другой стороны, G — неабелева простая группа. Следовательно, A $\mathfrak{U}$-нормальна в G и $A_G = 1$. Но тогда $1 < A^G$ и каждый главный фактор G ниже A^G циклический. Следовательно, G не является неабелевой простой группой. Это противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *Если R — минимальная нормальная подгруппа в G, то $R \nleq \Phi(G)$ и для некоторого простого числа p имеет место $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$. Кроме того, $|R| > p$ и для некоторой максимальной подгруппы M из G имеет место $G = R \rtimes M$.*

Прежде всего заметим, что для некоторого простого p имеет место $R \leq O_p(G)$ ввиду утверждения (3). Утверждение (2) подразумевает, что производная подгруппа $(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$ группы G/R нильпотентна. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $L \neq R$. Тогда $G'/(G' \cap L)$ нильпотентна, поэтому

$$G' \simeq G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap L)) = G'/(R \cap L)$$

нильпотентна. Тем самым $G/F(G)$ абелева, что противоречит выбору G. Поэтому R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G и $R \leq G'$. Более того, $R \nleq \Phi(G)$, так как в противном случае G' нильпотентна ввиду [4, гл. A, лемма 13.2]. Следовательно, $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [4, гл. A, теорема 15.6(2)]. Отметим наконец, что R не является циклической группой, так как в противном случае группа $G/C_G(R) = G/R = G/F(G)$ циклическая. Значит, приходим к (4).

(5) *$M \simeq G/R$ нильпотентна. Следовательно, R является силовской p-подгруппой G.*

Предположим, что M не является нильпотентной, и пусть H — подгруппа Шмидта в M. Тогда $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы B из G. Поскольку A разрешима по утверждению (3), для некоторого простого числа q имеет место $O_q(A) \neq 1$. Тогда $O_q(A) \leq O_q(G) \leq R$ по утверждению (4) и лемме 2.4, поэтому$R \cap M \neq 1$. Это противоречие показывает, что $A = 1$, следовательно, $H = B$ $\mathfrak{U}$-нормальна в G. Также ясно, что $H_G = 1$, поэтому каждый главный фактор G ниже H^G цикличен. Но $R \leq H^G$ по утверждению (4) и, следовательно, R циклическая, что противоречит утверждению (4). Это противоречие показывает, что $M \simeq G/R$ нильпотентна. Тогда $O_p(M)R \leq O_p(G) = R$. Следовательно, $O_p(M) = 1$, поэтому утверждение (5) выполнено.

(6) *M — группа Миллера — Морено (т. е. M не абелева, но каждая собственная подгруппа в M абелева). Более того, M является q-группой для некоторого простого числа $q \neq p$.*

Прежде всего отметим, что M является холловой p'-подгруппой в G ввиду утверждений (4) и (5).

Пусть S — произвольная максимальная подгруппа в M. Тогда $RS/F(RS)$ абелева ввиду утверждения (1) и $R = (RS)'$ в силу утверждений (4) и (5). тем самым $S \simeq RS/R$ абелева. Следовательно, выбор G и утверждение (5) влекут (6).

Заключительное противоречие. Ввиду утверждения (6) $Z(M) \cap \Phi(M) \neq 1$. Пусть Z — подгруппа порядка q в $Z(M) \cap \Phi(M)$, и пусть $E = RZ$. Тогда E не является нильпотентной в силу утверждения (4). С другой стороны, $R = R_1 \times \cdots \times R_t$, где R_k — минимальная нормальная подгруппа в E для всех $k = 1, \ldots, t$ по теореме Машке. Следовательно, для некоторого i подгруппа $R_i \rtimes Z$ не является нильпотентной, поэтому эта подгруппа содержит подгруппу Шмидта вида $A = A_p \rtimes Z$.

Предположим, что $A < E$. Тогда $|A_p| < |R|$ и $A_G = 1$. Согласно предположению A является частично субнормальной подгруппой в G. Пусть $A = \langle L, T \rangle$, где L является субнормальной подгруппой и T является $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппой G. Сначала предположим, что A субнормальна в G. Тогда в E имеется такая собственная подгруппа V, что $A \leq V$ и V нормальна в E. Поскольку $Z \leq V < E$, для некоторого k имеем $R_k \nleq V$. Тогда $R_k \cap V = 1$, следовательно, $R_k \leq C_E(V)$, поэтому $R_k \leq N_G(Z) = M$, где M максимальна в G; противоречие. Значит, A не является субнормальной в G. Следовательно, $L \neq A$, поэтому $T \neq 1$. Но тогда $R \leq T^G$ ввиду утверждения (4). Кроме того, $T_G = 1$, поскольку $A_G = 1$. Таким образом, R циклическая, что противоречит утверждению (4).

Следовательно, $A = E$, поэтому $R = A_p$ и Z действует неприводимо на R. Понятно, что $Z \leq \Phi(M)$, тем самым каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R, из чего следует, что каждая максимальная подгруппа из M циклическая. Следовательно, $q = 2$, поэтому $|R| = p$, что противоречит утверждению (4).

Теорема доказана.

4. Заключительные замечания

1. Напомним, что $F_{\{p,d\}}$*-группой* [20] называется группа Фробениуса, ядром которой является элементарная абелева группа порядка p^m с циклическим дополнением порядка d, где m — показатель числа p по модулю q для любого $q \in \pi(d)$.

В [20] В. А. Ведерников доказал следующий замечательный результат, завершающий исследования из [8, 13] о группах с субнормальными подгруппами Шмидта.

Теорема 4.1 (см. теорему 1 в [20]). *В ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта субнормальны тогда и только тогда, когда $G/Z_\infty(G) = G_1 \times \cdots \times G_n$, где G_i — $F_{\{p_i,d_i\}}$–группа, причем $(d_i, d_j) = 1$ для любых $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

2. Ввиду теорем 1.9 и 4.1 вполне естественным является следующий вопрос. *Предположим, что каждая подгруппа Шмидта группы G частично субнормальна или слабо субнормальна в G. Верно ли тогда, что каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в ней?*

Пусть $p > q > r$ — простые числа, где r одновременно делит $p-1$ и $q-1$. Пусть $C_p \rtimes C_r$ и $C_q \rtimes C_r$ — неабелевы группы порядков pr и qr соответственно. Пусть $G = (C_p \rtimes C_r) \curlywedge (C_q \rtimes C_r)$ — прямое произведение групп $C_p \rtimes C_r$ и $C_q \rtimes C_r$ с объединенной фактор-группой C_r. Тогда обе подгруппы Шмидта этой группы одновременно частично субнормальны и слабо субнормальны G и обе они не субнормальны в G. Таким образом, ответ на данный вопрос отрицателен.

3. Представляется весьма интересной задача описания точного строения групп G с условием, что каждая подгруппа Шмидта модулярна в G. В на-

стоящее время неизвестно даже, является ли в таких группах секция $G/F(G)$ циклической.

4. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Говорят, что группа G является *σ-примарной* [21], если G является σ_i-группой для некоторого i; *σ-разложимой* [3] или *σ-нильпотентной*, если G σ_i-замкнута для всех i.

В последние годы исследования многих авторов (см., например, [21–32]) связаны с изучением и применениями так называемых σ-субнормальных подгрупп [21]. Напомним, что подгруппа A в G называется *σ-субнормальной* в G [21], если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$, где либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ σ-примарна для всех $i = 1, \dots, n$.

Отмеченные выше результаты из [8, 13] получили дальнейшее развитие также в теории σ-субнормальных подгрупп. В частности, доказано, что если каждая подгруппа Шмидта группы G σ-субнормальна, то G' является σ-нильпотентной группой [23]. Более того, в каждой группе G, удовлетворяющей этому условию, имеется нормальная σ-нильпотентная подгруппа N с циклической фактор-группой G/N [30].

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315, N 1. P. 31–41.

2. *Hu B., Huang J., Skiba A. N.* Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$- abnormal subgroups // J. Group Theory. 2019. V. 22, N 5. P. 915–926.

3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

5. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1, N 2. P. 115–187.

6. *Weinstein M., ed.* Between nilpotent and solvable. United Kingdom: Polygonal Publ. House, 1982.

7. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 11. С. 10–14.

8. *Монахов В. С., Княгина В. Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

9. *Монахов В. С., Чирик И. К.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 253–280.

10. *Монахов В. С.* О сверхразрешимом корадикале взаимно перестановочного произведения // Проблемы физики, математики и техники. 2018. Т. 1, № 34. С. 69–70.

11. *Monakhov V. S., Trofimuk A. A.* Finite groups with two supersoluble subgroups // J. Group Theory. 2019. V. 22, N 2. P. 297–312.

12. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolvability of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53. P. 218–226.

13. *Семенчук В. Н.* Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1981. С. 138–149.

14. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

15. *Близнец И. В., Селькин В. М.* Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта // Проблемы физики, математики и техники. 2019. Т. 4, № 41. С. 36–38.

16. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1978. С. 50–63.

17. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010.

18. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

19. *Chi Z., Skiba A. N.* On a lattice characterization of finite soluble PST-groups // Bull. Aust. Math. Soc. 2019. P. doi:10.1017/S0004972719000741.
20. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.
21. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
22. *Beidleman J. C., Skiba A. N.* On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 5. P. 955–964.
23. *Al-Sharo K. A., Skiba A. N.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2017. V. 45. P. 4158–4165.
24. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. V. 495, N 1. P. 114–129.
25. *Skiba A. N.* On some classes of sublattices of the subgroup lattice // J. Belarusian State Univ. Math. Informatics. 2019. V. 3. P. 35–47.
26. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal // Sci. China Math. 2019. V. 62. P. 1355–1372.
27. *Skiba A. N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. 2020. V. 550. P. 69–85.
28. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Pedraza-Aguilera M. C., Perez-Calabuig V.* On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups // RACSAM. 2020. V. 114, N 94. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00824-4.
29. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Pedraza-Aguilera M. C., Yi X.* On σ-subnormal subgroups of factorised finite groups // J. Algebra. 2020. V. 559. P. 195–202.
30. *Yi X., Kamornikov S. F.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. V. 560. P. 181–191.
31. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О σ-субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 60, № 2. С. 337–343.
32. *Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N.* On σ-subnormal subgroups of finite $3'$-groups // Ukranian Math. J. 2020. V. 72, N 6. P. 806–811.

Поступила в редакцию 27 ноября 2019 г.
После доработки 4 августа 2020 г.
Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Хуан Цзяньхун
Школа математики и статистики,
Цзянсуский педагогический университет,
Сюйчжоу 221116, Китай
jhh320@126.com

Ху Бин
Школа математики и статистики,
Цзянсуский педагогический университет,
Сюйчжоу 221116, Китай
hubin118@126.com

Скиба Александр Николаевич
Факультет математики и технологий программирования,
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com