A. Cotsiolis, A. P. Oskolkov, On the dynamical system generated by the equations of motion of Oldroyd fluids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 155, 136–141

А.А.Котсиолис, А.П.Осколков

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ,ПОРОЖДАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА

I. О.А.Ладыженская предложила в [I] брать в качестве основного объекта изучения теории турбулентности для эволюционных систем с диссипацией, и в том числе для систем, описывающих течения вязких несжимаемых жидкостей, аттрактор системы $\mathfrak{M} \equiv \bigcap_{t\geqslant 0} V_t(H_0)$, где V_t, $t\geqslant 0$ – эволюционный оператор задачи, H_0 – фазовое пространство. В [I] она подробно изучила свойства $\mathfrak{M}$ для двумерной системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k\frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu\Delta v + \operatorname{grad} p = f(x),\ \operatorname{div} v = 0,\ x\in\Omega\in R^2;\ v\big|_{\partial\Omega} = 0,\ t\geqslant 0, \quad (I)$$

а именно, доказала компактность $\mathfrak{M}$ в пространстве $H_0 \equiv \overset{\circ}{J}(\Omega)$, показала, что каждое решение $v(t)\equiv V_t(\psi), t>0$, $v\big|_{t=0} = \psi$, задачи (I) с $\psi\in\mathfrak{M}$ продолжимо однозначно на $(-\infty, 0)$ как решение задачи (I) из $\mathfrak{M}$ и тем самым полугруппа V_t, $t\geqslant 0$, продолжима на $\mathfrak{M}$ до группы V_t, $-\infty<t<\infty$, и изучила свойства динамической системы $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ -\infty<t<\infty\}$, в частности, доказала "конечномерность динамики V_t на $\mathfrak{M}$". В [2] на основе установленных в [I] свойств эволюционного оператора V_t задачи (I) О.А.Ладыженская доказала конечность хаусдорфовой размерности аттрактора $\mathfrak{M}$. В [3] все эти результаты она доказала для предложенных ею (см.[4]) модификаций трехмерных уравнений Навье-Стокса.

В настоящей заметке мы, используя методы работы [I], строим динамическую систему $\{\mathfrak{M};\ V_t,\ -\infty<t<\infty\}$ и исследуем свойства эволюционного оператора V_t для двумерной системы уравнений движения жидкостей Олдройта.

2. Жидкостью Олдройта называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой имеет вид [5] :

$$\sigma + \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 2\nu\mathfrak{D} + 2\varkappa\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t},\quad \lambda,\nu,\varkappa>0,\quad \nu-\varkappa\lambda^{-1}>0. \quad (2)$$

А.П.Осколков показал [6], что движение жидкости Олдройта может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\Delta v-\Delta u+\operatorname{grad} p=f,\quad v=\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\lambda^{-1}u,\quad \operatorname{div} v=0,$$

$$\mu=\varkappa\lambda^{-1},\quad \alpha=\lambda(\nu-\varkappa\lambda^{-1})^{-1}. \tag{3}$$

Систему (3) будем решать в ограниченной области $\Omega\in\mathbb{R}^2$ при $f\equiv f(x)$, $x\in\Omega$, и начально-краевых условиях

$$v\big|_{t=0}=v_0(x),\quad u\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega;\qquad v\big|_{\partial Q_T}=u\big|_{\partial Q_T}=0. \tag{4}$$

Обозначим через P ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ и положим $P\Delta\equiv\tilde{\Delta}$, $P(v_k v_{x_k})\equiv A(v)$, $\vec{\varphi}\equiv\{v,u\}$, $\vec{F}\equiv\{f,0\}$,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-\mu\tilde{\Delta}+A & -\tilde{\Delta}\\ -\alpha^{-1} & \lambda^{-1}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда система (3) запишется в виде операторного уравнения

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}+\Lambda(\vec{\varphi})=\vec{F}(x), \tag{6}$$

которое решается в $Q_\infty=\Omega\times(0,\infty)$ при начально-краевых условиях

$$\vec{\varphi}\big|_{t=0}=\{v_0(x),0\},\qquad \vec{\varphi}\big|_{\partial Q_\infty}=0. \tag{7}$$

Положим $E_0(\Omega)\equiv\overset{\circ}{J}(\Omega)\times H(\Omega)$, $\|\vec{\varphi}\|_{E_0}=\left[\|v\|^2_{2,\Omega}+\alpha\|u_x\|^2_{2,\Omega}\right]^{\frac{1}{2}}$. Из энергетического равенства

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}\|^2_{E_0}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\alpha\lambda^{-1}\|u_x\|^2_{2,\Omega}=(f,v)_{2,\Omega},\quad t\geqslant 0, \tag{8}$$

для любого решения задачи (6), (7) следует оценка ([6] , [7]):

$$\|\vec{\varphi}\|_{E_0}\leqslant R_0\equiv(\mu\lambda_1)^{-1}\|f\|_{2,\Omega},\quad t\geqslant 0, \tag{9}$$

где λ_1 – первое собственное число спектральной задачи

$$-\Delta\psi+\operatorname{grad}\psi=\lambda\psi,\quad \operatorname{div}\psi=0,\ x\in\Omega;\quad \psi\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{10}$$

3. Возьмем в качестве фазового пространства задачи (6), (7) пространство $E_0(\Omega)$. На нем, как показал А.П.Осколков [6] , определена полугруппа ограниченных непрерывных нелинейных операторов V_t, $t\geqslant 0$, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э.Хопфа [4]) $\vec{\varphi}(\cdot,t)\equiv\vec{\varphi}(t)$ задачи (6), (7) по его значению при $t=0$: $\vec{\varphi}(t)\equiv V_t(\vec{\varphi}(0))$. Следуя [1] , [2] , назовем аттрактором задачи (6), (7) множество $\mathfrak{M}\equiv\bigcap_{t\geqslant 0}V_t(K_{R_0})$, где $K_{R_0}=\{\vec{\varphi}:\vec{\varphi}\in E_0(\Omega),\|\vec{\varphi}\|_{E_0}\leqslant R_0\}$. Аттрактор $\mathfrak{M}$ является одним из ос-

новных объектов изучения настоящей заметки.

Положим $E_\ell(\Omega)\equiv(W_2^\ell(\Omega)\cap H(\Omega))\times(W_2^{\ell+1}(\Omega)H(\Omega))$, $p\geq 1$, $\|\vec{\varphi}\|_{E_\ell(\Omega)}=\Big[(\|v\|_{2,\Omega}^{(\ell)})^2+$ $+\alpha(\|u\|_{2,\Omega}^{(\ell+1)})^2\Big]^{1/2}$, и покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть Ω - ограниченная область из $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega\in C^{\ell+1}$, $f(x)\in W_2^{\ell-1}(\Omega)\cap\mathring{J}(\Omega)$, $\ell=1,2,\ldots$. Тогда для слабого решения $\vec{\varphi}(x,t)$ задачи (6), (7) при $\forall t>0$ справедлива оценка:

$$\|\vec{\varphi}(\cdot,t)\|_{E_\ell}\leq C_\ell(\mu^{-1},\|f\|_{2,\Omega}^{(\ell-1)}). \qquad \text{(II)}$$

Пусть сначала $\ell=1$. Для решения $\vec{\varphi}\equiv\{v,u\}$ задачи (6), (7) справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+\mu\|v_{xx}\|_{2,\Omega}^2+\alpha\lambda^{-1}\|u_{xx}\|_{2,\Omega}^2+(v_k v_{x_k},-\Delta v)_{2,\Omega}=(f,-\Delta v)_{2,\Omega},\ t>0, \qquad \text{(I2)}$$

из которого следует неравенство ([I] , [4, гл.УI]):

$$\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+\mu\|v_{xx}\|_{2,\Omega}^2+2\alpha\lambda^{-1}\|u_{xx}\|_{2,\Omega}^2\leq C_1(\mu^{-1})(\|v_x\|_{2,\Omega}^2\cdot\|\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+\|f\|_{2,\Omega}^2),\ t>0. \qquad \text{(I3)}$$

Умножим обе части (I3) на $t>0$ и результат запишем так:

$$\frac{d}{dt}\|t^{1/2}\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+\mu\|t^{1/2}v_{xx}\|_{2,\Omega}^2+2\alpha\lambda^{-1}\|t^{1/2}u_{xx}\|_{2,\Omega}^2\leq C_1\|v_x\|_{2,\Omega}^2\cdot\|t^{1/2}\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+$$
$$+\|\vec{\varphi}\|_{E_1}^2+C_1\|t^{1/2}f\|_{2,\Omega}^2,\quad t>0. \qquad \text{(I4)}$$

Из неравенства (I4) с помощью леммы Гронуолла [4, гл.УI] и оценки (9) получим оценку (ср. [I]):

$$\max_{\alpha\delta\leq t\leq 1}\|\vec{\varphi}(\cdot,t)\|_{E_1}^2\leq\frac{1}{\delta}C_2(R_0), \qquad \text{(I5)}$$

а так как задача (6), (7) инвариантна относительно сдвига по t, то и оценку (II) при $\ell=1$. При $\ell=2,3,\ldots$ доказательство оценки (II) аналогично доказательству соответствующей оценки для задачи (I), данному О.А.Ладыженской в [I] , [4] .

В силу теоремы I эволюционный оператор V_t задачи (6), (7) при $\forall t>0$ переводят шар K_{R_0} в множество $V_t(K_{R_0})$, ограниченное в $E_1(\Omega)$ и компактное в $E_0(\Omega)$, и потому доказана

ТЕОРЕМА 2. Эволюционный оператор V_t задачи (6), (7) при $\forall t>0$ является вполне непрерывным в $E_0(\Omega)$, а аттрактор $\mathfrak{M}$ является компактом в K_{R_0}.

4. ТЕОРЕМА 3. Каждое решение $V_t(\vec{\varphi}(0))$, $t\geq 0$, задачи (6),

(7) с $\vec{\varphi}(0)\in \mathfrak{M}$ однозначно продолжается на $(-\infty, 0)$ как решение задачи (6), (7), лежащее в $\mathfrak{M}$. Тем самым полугруппа V_t $t\geq 0$ на $\mathfrak{M}$ продолжается до группы V_t, $-\infty<t<\infty$, ограниченных непрерывных нелинейных операторов. Аттрактор $\mathfrak{M}$ состоит из тех и только тех элементов $\vec{\psi}\in K_{R_0}$, для которых задача (6), (7) имеет решение $\vec{\varphi}(t)\equiv V_t(\vec{\psi})$, равное $\vec{\psi}$ при $t=0$, при $\forall t\in(-\infty,\infty)$.

Пара $\{\mathfrak{M}; V_t, -\infty<t<\infty\}$ и является динамической системой, порождаемой задачей (6), (7) о движении жидкостей Олдройта.

Пусть $\vec{\varphi}(t)$ и $\tilde{\vec{\varphi}}(t)$, $t>0$ – два "хороших" решения задачи (6),(7), пусть $0<t_1\leq t\leq t_2<\infty$, и пусть $y(t)\equiv e^{-2\lambda^*(t-t_1)}\|\vec{\varphi}(t)-\tilde{\vec{\varphi}}(t)\|^2_{E_0}$, где $\lambda^*\equiv\lambda^*(\mu,\lambda_1)$ – достаточно большое число. Как и в [I, § 2], для доказательства теоремы 3 достаточно доказать, что для $y(t)$ справедлива мультипликативная оценка

$$h(y(t))\leq[h(y(t_1))]^{1-\beta(t)}[h(y(t_2))]^{\beta(t)}\chi(t,t_1,t_2),\quad t_1\leq t\leq t_2, \tag{I6}$$

в которой $h(y)=(\ln My^{-1})^{-1}$ есть непрерывная монотонная возрастающая функция y при $y\in\left[0,\frac{M}{3}\right]$, $M\equiv 3\max\limits_{t_1\leq t\leq t_2} y(t)$, равная нулю при $y=0$, $\beta(t)=(t-t_1)(t_2-t_1)^{-1}$, а $\chi(t,t_1,t_2)=\exp[c_1(t-t_1)(t_2-t)]$, причем постоянная $c_1>0$ определяется данными задачи.

Разность $\vec{\Phi}(t)=\vec{\varphi}(t)-\tilde{\vec{\varphi}}(t)=\{w,\hat{w}\}\equiv\{v-\tilde{v}, u-\tilde{u}\}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dt}+\mathcal{A}(t)\vec{\Phi}=0,\quad \mathcal{A}(t)=\begin{pmatrix}-\mu\tilde{\Delta}+A_2(v,\tilde{v}) & -\tilde{\Delta}\\ -\alpha^{-1} & \lambda^{-1}\end{pmatrix}=$$

$$\equiv\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2(t)\equiv\begin{pmatrix}-\mu\tilde{\Delta} & -\tilde{\Delta}\\ -\alpha^{-1} & \lambda^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_2(v,\tilde{v}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{I7}$$

где $A_2(v,\tilde{v})w\equiv v_k w_{x_k}+\tilde{v}_{x_k}w_k$. Так как операторы $-\mu\tilde{\Delta}$ и $-\tilde{\Delta}$ являются самосопряженными положительно определенными операторами в $L^2(\Omega)$ и $\alpha,\lambda>0$, то оператор $\mathcal{A}_1$ является положительно определенным самосопряженным оператором в $E_0(\Omega)\equiv\mathring{J}(\Omega)\times H(\Omega)$. Далее, как и в [I, § 2], проверяется, что, во-первых, оператор $\mathcal{A}_2(t)$ подчинен $\mathcal{A}_1$, т.е. он определен на $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_1)$ и $\|\mathcal{A}_2(t)\mathcal{A}_1^{-1}\|\leq C_2$, и, во-вторых, $\mathcal{A}_2(t)$ дифференцируем по t и $\|\mathcal{A}_{2t}(t)\mathcal{A}_1^{-1}\|\leq C_3$, причем постоянные C_2 и C_3 определяются лишь данными задачи. Тогда, как и в [I, § 2], для решения $\vec{\Phi}(t)$ уравнения (I7) при достаточно больших λ^* и C_1, определенных лишь данными задачи, справедливо неравенство: для $\forall \{a(t), b(t)\} \in \mathcal{D}(A_1)$

$$([A+\lambda^* I]\{a,b\},\ A_2^*\{a,b\} - A_2\{a,b\})_{E_0} - (A_{2t}\{a,b\},\{a,b\})_{E_0} \geq$$

$$\geq -C_1 \| [A+\lambda^* I]\{a,b\}\|_{E_0} \cdot \|\{a,b\}\|_{E_0}, \tag{18}$$

откуда и следует оценка (16).

Отметим, что при доказательстве теоремы 3 формулировка начально-краевой задачи (3),(4) в операторной форме (6),(7) оказывается очень удобной.

5. В работе авторов [8] на основе установленных в настоящей заметке свойств эволюционного оператора V_t и аттрактора $\mathcal{M}$ задачи (6),(7) доказана "конечномерность динамики V_t задачи (6), (7) на $\mathcal{M}$ " и конечность хаусдорфовой размерности $\mathcal{M}$.

Авторы выражают признательность Л.Д.Фаддееву и О.А.Ладыженской за поддержку их исследований по гидродинамике неньютоновских жидкостей.

Литература

1. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1972, т.27, с.91-114.
2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1982, т.115, с.137-155.
3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.84, с.131-146.
4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязких несжимаемых жидкостей,2-ое изд.М., 1970.
5. О л д р о й т Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. – В сб.: Реология, теория и приложения.М.,1962, с.262-310.
6. О с к о л к о в А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореферат докт.дисс.Л., 1983, 32 с.

7. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнения движения жидкостей Олдройта на   и поведения ее решений при
– В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.150, с.112–117.
8. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О предельных режимах и аттракторе для уравнений движения жидкостей Олдройта. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.152, с.97–100.

A.A.Cotsiolis, A.P.Oskolkov. On the dynamical system generated by the equations of motion of Oldroyd fluids.

A construction is given of the attractor for the initial boundary value problem for the equations of motion of Oldroyd fluids in dimension 2. Properties of the evolution operator are studied and dynamical system is described.