A. M. Vershik, Locally transversal symbolic dynamics, *Algebra i Analiz*, 1994, Volume 6, Issue 3, 94–106

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 3

Посвящается юбилею
Людвига Дмитриевича Фаддеева

ЛОКАЛЬНО-ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА[1]

А. М. Вершик

§1. Введение

Обычно под символической динамикой имеют в виду изучение действия группы трансляций решетки на пространстве произвольных конфигураций на этой решетке с конечным числом возможных спинов; более общо — действие группы сдвигами в пространстве конфигураций на этой группе. Однако занятия теориями адических преобразований, подстановок Хедлунда-Морса, клеточных автоматов и близких комбинаторно-алгебраических динамик подводят к схеме, в которой традиционная символическая динамика оснащается некоторым „трансверсальным" действием, играющим самостоятельную важную роль. Это действие можно назвать „орициклическим" из-за аналогии, возникающей при установлении изоморфизма между гиперболическими системами и марковскими компактами, — оно соответствует действию орициклических подгрупп или их контракций. В случае одностороннего марковского компакта это действие названо адическим (см. далее) из аналогий с p-адической арифметикой.

Ключевым понятием здесь является понятие гомоклинического разбиения (или отношения эквивалентности) — оно является траекторным для трансверсального действия и хорошо известно со времен Пуанкаре в гиперболической динамике.

Цель настоящей работы — высказать несколько определений, подкрепить их важность двумя классическими примерами, а также связать напрямую гиперболическую динамику с теорией подстановок и адического сдвига. Основное определение описывает трансверсальное локальное действие (и соответствующую группу), в марковском или более общем компакте; проблема состоит в классификации таких действий на данном компакте и установлении связи с аналогичным действием в одностороннем компакте. Можно „обратить" последний вопрос так: расширить действие подстановки (=адического преобразования) до трансверсального локального действия на двустороннем пространстве. Примеры подстановок Морса и Фибоначчи, рассмотренные далее, приводят к оснащенному гиперболическому действию соответственно на соленоиде и двумерном торе; эти примеры изучены

[1] При частичной поддержке ГКВШ России, грант 2-16-6-20.

достаточно полно и, видимо, типичны. Этой статьей мы продолжаем работы [1, 2], где рассмотрены близкие вопросы.

Отметим, что недавняя работа Л. Д. Фаддеева и А. Ю. Волкова [3] показывает, что в математической физике естественно возникает дискретная динамика похожего вида; она происходит из дискретизации динамики интегрируемых непрерывных систем и описывается в терминах локальных взаимодействий клеточных автоматов, т.е. в терминах трансверсального локального действия. Посвящая эту статью Л. Д. Фаддееву в связи с его 60-летием, автор пользуется случаем, чтобы еще раз отметить важную объединительную роль математической физики в современной математике.

§2. Марковские и софические компакты

А. К истории вопроса. Было бы сложно проследить за истоками и эволюцией понятий, приводящих к определениям трансверсальных действий, и мы отметим лишь несколько бесспорных связей. Теория марковских разбиений, начавшаяся с работ Р. Адлера и Б. Вейсса [4, 5] и Я. Синая [6, 7], Р. Боуэна [8], которая устанавливает изоморфизм гиперболических систем и топологических марковских цепей, подводит к вопросу о том, что соответствует сжимающимся и расширяющимся аносовским слоениям при этом изоморфизме и что отвечает действию групп вдоль слоев. До самого последнего времени этот вопрос во всей полноте почти не изучался. В работе С. Ито [9] определяется трансверсальный в смысле Синая поток в марковском компакте, однако он слишком привязан к одномерным слоениям; в этой работе фактически появляется специальный случай адического преобразования. В связи с определением гиббсовских мер в символическом случае Д. Капокаччиа [10] (см. [11]) ввела гомоклиническое отношение эквивалентности; для целей доказательства центральной предельной теоремы М. Гордин [12] систематически и независимо использовал это отношение в несколько более абстрактной форме; он указал автору на работы [10–12]. Наконец, В. Кригер [13] глубоко исследовал проблему размерности слоев в символическом слоении с помощью K_0-функтора и ввел важное понятие обильной (ample) группы, близкое к нашему понятию трансверсального локального действия. С помощью этих понятий в [13] находятся инварианты топологической марковской цепи.

Совсем другая линия привела автора к тем же вопросам. Теория стационарного адического преобразования по существу эквивалентна теории подстановок[2] Морса–Хедлунда — см. далее и [14–16, 17, 18].

Стационарное адическое преобразование определяется в одностороннем марковском или мультимарковском компакте и дает иную реализацию подстановок, которые обычно рассматриваются как сдвиги в надлежащем (немарковском!) компакте. Одно из прямых следствий адической реализации состоит в постановке вопроса о том, как продолжить это преобразование до группы, действующей уже на двустороннем компакте так, чтобы сдвиг в компакте стал автоморфизмом группы новых адических преобразований. На языке подстановок это означает введение естественного расширения подстановочного эндоморфизма. Исследование примеров и привело автора к связи с гиперболической теорией, в которой подстановке —

[2] Слово „подстановка“ перегружено в русском математическом языке, уместнее было бы говорить „замещение“, что более соответствует английскому “substitution”.

адическому преобразованию отводится роль, аналогичная трансверсальному действию. Уточнение этих понятий и вопросов в §3, 4. Мы постарались сделать этот текст по возможности независимым и поэтому приводим ряд определений, часть из которых малоизвестна. При этом мы выбираем естественный (а не минимальный) уровень общности.

Б. Марковские и софические компакты. Пусть A — конечный алфавит, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$; A^+ — пространство всех непустых конечных слов в алфавите A, $X = X(A) \equiv A^{\mathbf{Z}}$ — вполне несвязный компакт всех двусторонних бесконечных слов. Обозначим через S левый сдвиг („шифт") в

$$S(\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}) = \{y_i\}_{i\in\mathbf{Z}}, \quad y_i = x_{i+1}.$$

Нас будут интересовать S-инвариантные компакты в X специального вида. Пусть $M = (\varepsilon_{a_{j_1}a_{j_2}})_{j_1,j_2=1}^k$, $\varepsilon_{ab} = 0 \vee 1$ — ненулевая матрица; пара букв (a,b) M-допустима, если $\varepsilon_{ab} = 1$. Двусторонний марковский компакт $X_M(A) = X_M$ по определению состоит из всех последовательностей $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$, у которых все пары $x_i x_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ M-допустимы. Другое название — топологическая марковская цепь. Если $\varepsilon_{ab} \equiv 1$, то $X_M \equiv X$. Односторонний марковский компакт X_M состоит из односторонних последовательностей $\{x_i\}_{i\geqslant 0}$ с тем же условием.

Пусть теперь $M = (\varepsilon_{a_{j_1}\dots a_{j_s}})$, $j_1, \dots j_s = 1, \dots k$ — тензор, состоящий из нулей и единиц; слово $a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_s}$ — M-допустимо, если $\varepsilon_{a_{j_1}\dots a_{j_s}} = 1$. *Мультимарковский компакт*, определяемый тензором M ("subshift of finite type"), состоит по определению из всех последовательностей $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$, для которых любое подслово длины s M-допустимо. Аналогично определяется односторонний компакт.

Если X_1 и X_2 два S-инвариантных компакта (возможно, в разных алфавитах), то под гомоморфизмом понимается непрерывное отображение X_1 в X_2, коммутирующее со сдвигом S. Легко видеть, что мультимарковский компакт есть изоморфный образ некоторого марковского компакта; алфавитом в нем служат M-допустимые слова длины s в исходном алфавите. Однако не всякий гомоморфный образ марковского компакта является мультимарковским. Б. Вейссу [19] принадлежит замечательное расширение понятия мультимарковости, делающее теорию замкнутой относительно гомоморфизмов; а именно понятие *софического компакта* (sofic-конечный (ивр.)). Вот самое прямое определение этих компактов.

Пусть $\overline{X} \subset X(A)$, S — инвариантный компакт в алфавите A. На множестве A^+ определим два отображения

$$P\colon A^+ \to 2^{A^+} \quad \text{и} \quad F\colon A^+ \to 2^{A^+},$$

$$Pw = \{\, u \in A^+ : uw \quad \text{есть подслово некоторого слова в } \overline{X}\,\},$$
$$Fw = \{\, u \in A^+ : wu \quad \text{есть подслово некоторого слова в } \overline{X}\,\}.$$

Компакт $\overline{X}$ называется софическим, если уровни постоянства отображения P (или, эквивалентным образом, — F) образуют конечное разбиение A^+. Иначе говоря, существует лишь конечное число признаков (возможно, зависящих от неограниченного числа символов), которые определяют, какие слова могут предшествовать данному слову (или следовать за ним). Очевидно, марковский и мультимарковский компакты — софические. Теорема Б. Вейсса утверждает, что софические компакты и только они являются гомоморфными образами марковских компактов и, тем самым, образуют замкнутый относительно гомоморфизмов класс.

Пример. Пусть алфавит $A = \{0, 1, 2\}$ и все слова, кроме слов вида $21\ldots(k)\ldots 12$, $k = 0, 1, \ldots,$ — допустимы. Соответствующий компакт софический, но не мультимарковский. Этот пример возникает при естественной символической реализации автоморфизма 2-тора $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Любой софический компакт (X, S) может быть изоморфно отображен на марковский компакт, в котором алфавит состоит из уровней постоянства отображения P (или F) — см. выше, а матрица M определяется следованием этих уровней; поэтому мы ничего не потеряем в общности нашей теории, рассматривая лишь марковские компакты; однако естественность примеров и гомоморфизмов при сведении к марковским может пропасть.[3] Односторонние софические компакты определяются аналогично. Как и в теории марковских цепей, для софических компактов определяются понятия транзитивности и неприводимости, совпадающие с обычными для марковских и мультимарковских компактов; первое означает, что любые два допустимых конечных слова могут быть подсловами некоторого допустимого слова; неприводимость означает, что компакт не имеет гомоморфных образов на марковский компакт, состоящий из конечного числа точек, большего одной (иначе говоря, X не имеет нетривиальных периодических факторов). Мы будем рассматривать лишь неприводимые марковские и софические компакты. Для них верно следующее утверждение (для марковских см. [20]): существует единственная S-инвариантная мера максимальной энтропии. Сдвиг S в пространстве (X, μ) является B-автоморфизмом (=изоморфным автоморфизму Бернулли). Для марковского случая — это теорема Д. Орнштейна, для софического — ее прямое следствие.

§3. Гомоклиническое разбиение и локальное трансверсальное действие

Пусть X — произвольный неприводимый софический компакт. Определим на X гомоклиническое разбиение τ (отношение эквивалентности): две последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\} \in X$ лежат в одном элементе разбиения τ (т.е. τ-эквивалентны), если существует такое $k \geqslant 0$, что $x_i = y_i$ при $|i| \geqslant k$.

Теорема 1. *Разбиение τ пространства (X, μ), где X — неприводимый софический компакт, а μ — мера максимальной энтропии, есть абсолютно неизмеримое* (1), *однородное* (2) *разбиение, т.е.* (1) *не существует нетривиальных измеримых, τ-измеримых множеств,* (2) *любое измеримое преобразование $T\colon X \to X$, переводящее почти всякую точку x в точку Tx из того же элемента разбиения τ, сохраняет меру μ.*

Измеримое преобразование, обладающее свойством (2), будем называть трансверсальным преобразованием; его определение можно высказать так: почти всякая траектория T лежит в одном из элементов разбиения τ, т.е. T меняет лишь конечное число координат последовательности.

По поводу доказательства теоремы можно повторить, что для марковских компактов — это небольшое усиление классического закона $0 - 1$, а общий случай

[3]Изучение произвольных гиперболических автоморфизмов тора приводит к более общим (чем софические) компактам, однако и на них можно определить локально-трансверсальное действие (см. далее). Подробнее это обобщение будет рассмотрено в другом месте.

сводится к нему. Замечу, кстати, что, насколько мне известно, вопрос, существует ли для всякого K-автоморфизма образующая η, для которой $\bigwedge_{n=0}^{\infty} \bigvee_{|k|=n}^{\infty} S^k\eta = \nu$, открыт. Гомоклиническое разбиение можно определить для гомеоморфизма произвольного метрического компакта: $x \sim y$, если $\lim_{|k|\to\infty} \rho(S^k x, S^k y) = 0$ ([9, 10]), более абстрактное определение в [12]. В [1] оно было отправной точкой для построения изоморфизма гиперболического автоморфизма тора и марковской цепи.

Трансверсальные преобразования образуют подгруппу группы преобразований, сохраняющих меру μ, а сдвиг является ее автоморфизмом. Трансверсальное преобразование T называется локализованным в координате $i \in \mathbb{Z}$, если для почти всякой точки $x \in X$ существует число $k(x)$ такое, что $(Tx)_j = x_j$ $|j-i| \geqslant k(x)$ и при этом, если $x_j = y_j$ для $|j-i| < k(x)$, то $(Tx)_j = (Ty)_j$. Теперь мы можем дать основное определение. Группа G трансверсальных преобразований софического компакта (X,μ) называется *локальной трансверсальной группой*, если она порождена преобразованиями T_i, $i \in \mathbb{Z}$, $G = \langle T_i, i \in \mathbb{Z}\rangle$, где T_i локализовано в координате i, а $ST_i = T_{i-1}S$ (S — левый сдвиг). Группа G называется *исчерпывающей*, если ее разбиение на траектории совпадает с гомоклиническим разбиением.

Трансляционная инвариантность позволяет построить группу $G = \mathbb{Z} \leftthreetimes G$ — расширение G с помощью сдвига S, являющегося автоморфизмом группы G. Фактически трансверсальная группа задана, если определено уже лишь одно преобразование T_0; в свою очередь, T_0 задается некоторым специальным упорядочением элементов разбиения τ (см. примеры далее).

Теперь мы можем сформулировать общую задачу:

Для заданного марковского (или софического) компакта расклассифицировать с точностью до метрического изоморфизма локальные трансверсальные группы (л.т.); в частности коммутативные л.т. группы.

Заметим, что речь идет о счетном классе конструктивно заданных групп, и, не исключая возможности алгоритмической неразрешимости этой проблемы, подчеркнем очень конкретный характер описываемых действий, скажем, для двухбуквенного алфавита к заданной глубине локальности.

Дадим более прямое определение локально-трансверсального преобразования T_0 на одностороннем софическом компакте X. Пусть $\mathcal{B}$ — множество конечных X-допустимых слов, обладающее свойствами:

1) почти каждая по мере максимальной энтропии на X последовательность $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ начинается с некоторого слова из $\mathcal{B}$. 2) никакое слово из $\mathcal{B}$ не является началом другого слова из $\mathcal{B}$.

Заметим, что $\mathcal{B}$ является собственным подмножеством множества всех допустимых слов. Пусть t — отображение множества $\mathcal{B}$ в множество допустимых слов, сохраняющее длину слова. Определим

$$T_0(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) = (t(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots),$$

где $(x_1, x_2, \dots x_k) \in \mathcal{B}$, а $t(\dots)$ — ее образ (той же длины).

Преобразование $T_0\colon X \to X$, определенное почти всюду, называется *локально-трансверсальным*. Нетрудно перенести это определение на двусторонние последовательности (в этом случае $\mathcal{B}$ есть множество допустимых слов с отмеченной в каждом из них буквой). Определение охватывает и далеко обобщает понятие адического преобразования, подстановки и совпадает с данным выше.

Л.т. группы включают очень многие примеры такие, как группы сдвигов на торе и соленоиде, подстановки и др. Сама группа G может иметь конечное число образующих, поскольку между T_i возможны соотношения. Поэтому наш вопрос можно ставить совсем узко, зафиксировав ранг группы G.

§4. Адическое преобразование и подстановки Морса–Хедлунда

А. Адическое преобразование софического компакта. Рассмотрим теперь односторонний (правый) марковский софический компакт $X \subset \{\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\}$, $x_i \in A$, $i \geqslant 0$.

Предположим, что буквы алфавита A линейно упорядочены; тогда на X возникает лексикографическое упорядочение:

$$\{x_i\} \prec \{y_i\}, \quad \text{если } x_i = y_i,\ i > i_0 \text{ и } x_{i_0} < y_{i_0}.$$

Лемма 1. *Почти каждая по мере μ (ограниченной на односторонние последовательности) точка $x \in X$ имеет одну предшествующую и одну последующую точки в смысле определенного порядка.*

Тем самым, определено действие группы $\mathbb{Z}$ почти всюду на (X, μ): образующая T группы $\mathbb{Z}$ ставит в соответствие точке x следующую за ней в смысле порядка. Это действие локально-трансверсально в смысле §2, т.е. образ точки лежит в том же классе гомоклинического (одностороннего) разбиения, и координаты $(Tx)_i$, $i = 0, 1, \dots, i_0$, которые отличаются от соответствующих координат точки x, определяются однозначно цилиндром длины i_0. Определенное таким образом преобразование T называется *адическим*. Это определение можно отнести и к более общим компактам (не стационарным), и в таком виде адическое преобразование становится универсальной моделью любого преобразования, сохраняющего меру (см. [14, 15, 16]). Если $X = A^{\mathbb{N}}$ (полный компакт), то адическое преобразование есть прибавление единицы в кольце целых p-адических чисел ($p = \#A$) и имеет стандартный спектр из всех корней из единицы степеней p^k, $k = 0, 1, \dots$

Если ввести различные упорядочения алфавита $\prec_a$, которые зависят от символов алфавита, то можно определить преобразование T, как и прежде, но с тем изменением, что Tx есть точка, следующая за x в смысле лексикографического порядка, определяемого упорядочением $\{x_i\} \prec \{y_i\}$, если $x_i = y_i$, $i > i_0$, $x_{i_0} \prec_{x_{i_0+1}} y_{i_0}$.

Пример. $A = \{0, 1\}$, $0 <_0 1$, $1 <_1 0$. В этом случае адическое преобразование изоморфно известному преобразованию Морса.

Точно так же можно упорядочение алфавита поставить в зависимость от слов данной длины и определить преобразование точно так же. Эти преобразования называются *обобщенными адическими* преобразованиями. Легко убедиться непосредственно в справедливости утверждения.

Лемма 2. *Всякое обобщенное адическое преобразование T софического компакта X изоморфно адическому преобразованию некоторого другого софического компакта с, вообще говоря, бо́льшим алфавитом. Таким образом, мы не теряем общности, если будем ограничиваться лишь адическими (необобщенными) преобразованиями марковских компактов, но иногда технически удобно использовать обобщенные преобразования, не увеличивая алфавита.*

Б. Подстановки Морса–Хедлунда [17, 18]. Установим прямую связь адического преобразования и подстановок. *Подстановкой или замещением* называется отображение $\sigma\colon A \to A^+$, сопоставляющее буквам конечные слова. Мы не будем описывать, как строится подстановочный автоморфизм, отвечающий подстановке σ, — его традиционная реализация есть сдвиг в некотором компакте $Y \subset A^{\mathbf{Z}}$ (не марковском и не софическом), который определяется как замыкание сдвигов неподвижной точки отображения $\sigma^\infty\colon A^+ \to A^+$, подробности, например, в [18]. Мы не используем эту реализацию, поскольку предъявим иную. А именно, мы построим марковский компакт по σ, и адическое преобразование в нем будет нашей реализацией подстановочного преобразования, отвечающего подстановке.

Обозначим через A^σ множество пар (a,b), для которых a — фиксированная буква слова $\sigma(b)$; матрица $M^\sigma = \{\varepsilon_{(a,b),(a',b')}\}_{(a',b')\in A^\sigma,(a,b)\in A^\sigma}$ определяется так: $\varepsilon_{(a,b),(a',b')} = 1$, если $a \in \sigma(b)$, $b \in \sigma(a')$ и $a' \in \sigma(b')$. Заметим, что пара (a,b) входит в A^σ столько раз, сколько a входит в $\sigma(b)$. Односторонний марковский компакт $X_M(A^\sigma) \subset A^{\mathbf{N}}$ — построен; упорядочение определяется так: сначала упорядочим алфавит: $(A,<)$, если теперь $(a,b) \in A^\sigma$, $(a',b') \in A^\sigma$, то при $b < b'$ $(a,b) \prec (a',b')$; если же $b = b'$, $a < a'$, то $(a,b) \prec (a',b')$ (это равносильно тому, что вхождение a в $\sigma(b)$ предшествует вхождению a' в $\sigma(b)$, буквы a и a' могут совпадать, но их вхождения в $\sigma(b)$ различны). Тем самым мы определили упорядочение алфавита A^σ и построили адическое преобразование.

Теорема 2. *Если разбиение на цилиндры, определяемые первой координатой в $X(\sigma) = X_M(A^\sigma)$, является образующим разбиением для адического преобразования T компакта $\tilde{X}(\sigma)$, то тройка $(\tilde{X}(\sigma), \mu, T)$ изоморфна каноническому подстановочному автоморфизму, определяемому отображением σ. Этот изоморфизм задается указанной образующей.*

С другой стороны, условие теоремы выполнено практически для всех σ, точнее, оно не выполнено лишь для тождественных σ: $\sigma(a) = \sigma(b)$ для всех $a, b \in A$. В этом случае подстановочное преобразование периодично, а адическое является квазициклическим. Теорема устанавливает эквивалентность теорий подстановок и адических преобразований. Заметим, что построение марковского компакта по подстановке σ не было оптимальным для некоторых σ. Например, если каждая буква входит в $\sigma(\cdot)$ не более одного раза и порядок букв один и тот же во всех словах, то вместо A^σ можно взять алфавит A и упорядочить A по (одинаковому) порядку букв в словах.

Теперь мы можем связать темы этого и предыдущего параграфов. Адическое преобразование определено лишь в одностороннем марковском компакте и при этом оно является локально-трансверсальным в смысле §2. *Нельзя ли его продолжить на двусторонний компакт до действия локальной трансверсальной группы?* Более точно. Пусть $X_M(A)$ — двусторонний, а $X_M(A)$ — односторонний марковские компакты с одинаковыми матрицей M и алфавитом A. Требуется определить локальное трансверсальное действие группы $G = \langle T_i, i \in \mathbb{Z}\rangle$ на $X_M(A)$ и проекцию $\pi\colon X_M(A) \to X_M(A)$, при которой $\mod 0$ $\pi T_0 = T$, где T — адическое преобразование в $X_M(A)$.

Положительное решение этого вопроса позволит объединить гиперболическую символическую теорию сдвига (шифта) с теорией подстановок или стационарных адических преобразований. Два примера следующего параграфа показывают содержательность и нетривиальность этой задачи. Автор считает более вероятным ее положительное решение в общем или достаточно общем случае.

§5. Автоморфизмы Фибоначчи (тор) и Морса (соленоид)

Рассмотрим две подстановки или два адических преобразования. В обоих случаях алфавит $A = \{0, 1\}$.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\Phi(0) &= 01\\ \sigma_\Phi(1) &= 0\end{aligned}\right\} \text{ — подстановка Фибоначчи,}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_M(0) &= 01\\ \sigma_M(1) &= 10\end{aligned}\right\} \text{ — подстановка Туэ–Морса [19].}$$

Соответствующий односторонний марковский компакт в первом случае $X_\Phi = \{\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty} : \varepsilon_i = 0;\ 1, (\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}) \neq (1,1);\ i \geqslant 0\}$, т.е. $M_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, где строки и столбцы матрицы M_Φ занумерованы символами алфавита — $0, 1$. Упорядочение символов — единое: $0 \prec 1$, оно определяет в X_Φ адическое преобразование T_Φ — преобразование Фибоначчи.

Во втором случае компакт $X_M = X$ — полный, т.е. $X_M = X = \{\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}; \varepsilon_i = 0; 1, i \geqslant 0\}$, но порядок на A, X определяется как в примере §4, а именно, $00* \prec 10*$, $11* \prec 01*$ (звездочка означает произвольное продолжение слова). Тем самым, порядок зависит от следующего символа. Заметим, что обычный лексикографический порядок на полном компакте X определяет в качестве адического преобразования обычный диадический автоморфизм — сдвиг на аддитивной группе кольца целых диадических чисел Z_2. Обозначим через T_M адическое преобразование X с указанным порядком. Эти T_Φ и T_M канонически изоморфны соответственно подстановочным преобразованиям Фибоначчи и Морса. Наша цель — продолжить до локальных трансверсальных действий на двусторонних компактах оба преобразования и идентифицировать их с гиперболическими системами. Мы начнем с T_Φ.

а) „Фибоначчи“ [1, 2]. Компакт X_Φ есть пространство всех двусторонних последовательностей нулей и единиц без соседних единиц. Обозначим через X_Φ^0 подмножество финитных последовательностей (число единиц конечно) и введем на нем структуру коммутативной полугруппы следующим образом. Пусть $u^n \in X_\Phi^0$, т.е. $u_k^n = \sigma_{nk}$.

Рассмотрим свободную абелеву полугруппу G^+ с образующими $\{u^n, n \in \mathbb{Z}\}$ и соотношениями $u^{n+2} = u^{n+1} + u^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Полугруппа G^+ изоморфно вкладывается в группу $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$; это вложение единственно с точностью до изоморфизма, и образ описывается следующим образом:*

$$l \colon G^+ \to \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \simeq G,$$

$l(u^n) = H^n e_0$, где $H = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — автоморфизм решетки $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $e_0 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}$, при этом $l(G^+) = \{(r,s) : r\lambda + s \geqslant 0\}$, где $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — золотое сечение.

Отождествим теперь G^+ с множеством финитных последовательностей — X_Φ^0. Для этого достаточно сопоставить каждому $(r,s) \in G^+$ финитную последовательность.

Лемма 2. *Каждый элемент $(r,s) \in G^+$ однозначно разлагается в конечную сумму*

$$(r,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n H^n e_0, \qquad \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0.$$

Это разложение задает изоморфизм G^+ и X_Φ^0.

Доказательство лемм. Так как $H^2 = H + I$, то соотношение

$$l(u^{n+2}) = l(u^{n+1}) + l(u^n)$$

выполнено. Отождествим u^n и $H^n e_0$ и рассмотрим произвольную финитную последовательность $\{\varepsilon_n\} \in X_\Phi^0$, $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0$. Положим

$$l(\{\varepsilon_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n H^n e_0 \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.$$

Отсюда ясно, что $l(G^+)$ лежит в полугрупповой оболочке орбиты $H^n e_0$, которая совпадает, как легко видеть, с множеством $\{(r,s) : r\lambda + s \geqslant 0\}$. Наоборот, возьмем любой элемент этой оболочки и убедимся, что число $r\lambda + s \in \mathbb{Z}(\lambda) \cap \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{Z}(\lambda)$ — кольцо алгебраических чисел вида $n\lambda + m$, допускает единственное представление в виде

$$r\lambda + s = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n \lambda^n, \quad \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0.$$

Действительно, по индукции получаем из $\lambda^2 = \lambda + 1$:

$$2 = \lambda^{-2} + \lambda, \quad 2\lambda = \lambda^{-1} + \lambda^2, \quad 3 = \lambda^{-1} + \lambda^3, \dots,$$

и далее, применяя то же соотношение, убеждаемся, что единственное разложение с условием $\varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n+1} = 0$ существует.

Замечание. Это разложение обобщает и усиливает известную теорему Зеккендорфа о том, что любое натуральное число допускает единственное разложение вида $m = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n F_n$, $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0$, где F_n — числа Фибоначчи $F_1 = 1$, $F_2 = 2$.

Более подробно об этом см. [1]. Мы превратили X_Φ^0 в полугруппу.

Нам осталось определить действие локальных трансверсальных автоморфизмов T_i на X_Φ. Прежде всего, на X_Φ^0 T_i действует по формуле $T_i x = u_i$ (сложение в полугруппе X_Φ^0).

Теорема 3. *Действие T_i на X_Φ определяется как продолжение по непрерывности действия на X_Φ^0. Оно корректно определено для всех точек X_Φ, за исключением счетного числа.*

Замечание. Действие T_i на X_Φ^0 не продолжается до группового, поскольку элемент $T_i^{-1} x = x - u$ определен неоднозначно и не принадлежит X_Φ^0; он является кофинитным, например, $-u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} = u_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$. Однако на всех остальных классах гомоклинической эквивалентности действие всей группы $G = \langle T_i : i \in \mathbb{Z} \rangle \simeq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ определено корректно.

Наконец, группа $G = \mathbb{Z} \leftthreetimes G$ — расширение G с помощью сдвига — естественно изоморфна разрешимой группе $\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, где образующая группы $\mathbb{Z}$ действует как автоморфизм $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; действительно, $l(Su_n) = l(u_{n+1}) = H^{n+1} l_0 = H(l(u_n))$, т.е. $lS = Hl$ и $S = l^{-1} H l$. Остается глобализовать всю картину и объяснить, как вложена в нее подстановка Фибоначчи.

Теорема 4. *Действие группы $\hat{G}$ на X_Φ с мерой μ (максимальной энтропии) метрически изоморфно действию группы $\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ на торе $\mathbb{T}^2$ с мерой Лебега, причем нормальный делитель $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ действует трансляциями на точки, гомоклинические (относительно автоморфизма H тора $\mathbb{T}^2$) нулю, а образующая группы $\mathbb{Z}$ действует как автоморфизм H.*

Доказательство (см. [1]). Спроектируем решетку $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ на собственные прямые автоморфизма H и рассмотрим пересечение проекций на тор положительной полуоси собственной прямой L_λ и второй собственной прямой, отвечающей собственному числу $-\lambda^{-1}$. Тем самым мы отождествим финитные последовательности X_Φ^0 с полученной полугруппой гомоклинических нулю точек на торе. Заметим, что это не все гомоклиничные нулю точки тора. Остается продолжить это соответствие на весь компакт X_Φ; он будет отображаться на тор, при этом мера μ перейдет в лебегову меру; отображение $\varphi \colon X_\Phi \to \mathbb{T}^2$ непрерывно и биективно всюду, кроме множества меры нуль, которое описывается явно.[4]

Изоморфизм φ имеет арифметический смысл (см. [1, 2]), он доставляет подробную информацию и о марковском разбиении, и о том, какие структуры и разложения на торе переходят в те или иные символические структуры. Ответы весьма не просты, например, разложение тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ выглядит довольно сложно, а гомоклиническое разбиение легко описать: гомоклинический класс эквивалентности на $\mathbb{T}^2$ при изоморфизме φ есть в точности образ гомоклинического класса эквивалентности на компакте X_Φ для всех классов, за исключением множества классов меры нуль, на которых проекция φ не биективна (см. сноску); на нем изоморфизм φ склеивает конечное число классов в один. Разбиения на X_Φ, отвечающие „прошлому" и „будущему", переходят соответственно в сжимающиеся и расширяющиеся слоения на торе. Эта картина — типична для широкого класса гиперболических систем (см. [1]). Односторонний компакт $X_\Phi = \{\{\varepsilon_n\}_{n \geqslant 1}, \varepsilon_n = 0; 1, \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} = 0\}$ отображается в окружность $\mathbb{R}/\lambda\mathbb{Z}$ с помощью гомоморфизма $\tilde{\varphi}$

$$\{\varepsilon_n\}_{n \geqslant 1} \overset{\tilde{\varphi}}{\mapsto} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \lambda^{-n} + 1 \in [0, \lambda).$$

Гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ переводит в лебегову меру ξ меру на X_Φ с максимальной энтропией, а адическое преобразование T_Φ в поворот окружности $\mathbb{R}/\lambda\mathbb{Z}$ на 1 (см. [1, 2]). Теперь мы можем ответить на вопрос, как связан T_Φ со структурой локально трансверсального действия: для этого профакторизуем группу G по отношению эквивалентности $u_n \sim (-1)^n u_{-n+2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

[4] Это множество тех $x = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in X_\varphi$, для которых при некотором $n(x)$, и при всех $i > x_{n+i} + x_{n+i+1} = 1$.

Теорема 5. *Действие группы $G = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ при указанной факторизации переходит действие группы $\mathbb{Z}$ адическими преобразованиями компакта X_φ.*

Доказательство. Проверяется, что указанная эквивалентность факторизует нулевой слой расширяющегося слоения на торе (относительно автоморфизма H) в окружность $\mathbb{R}/\lambda\mathbb{Z}$, чем убивается действие одной из образующих группы G. Вторая образующая действует поворотами окружности. С другой стороны, эта факторизация соответствует переходу от двустороннего компакта X_Φ к одностороннему X_Φ.

Аналогичное построение возможно для других автоморфизмов тора.

б) „Морс“. В этом примере ситуация проще, чем в предыдущем, и более арифметична. Тем не менее, автоморфизм Морса имеет непрерывную компоненту в спектре в отличие от чисто дискретного спектра в случае Фибоначчи.

Мы приведем окончательные формулировки. Пусть Q_2 — вполне несвязная группа характеров к группе всех вещественных двоично-рациональных чисел (соленоид). Рассмотрим извращенное действие группы Q_2 на Q_2 (обычное действие определяется тривиально, так как $Q_2 \subset Q_2$).

Для этого определим сначала действие на Q_2 одной из образующих группы Q_2, например, $\mathbb{1} \in Q_2$; обозначим ее $\mathcal{M}$. В свою очередь для этого достаточно определить действие $\mathcal{M}$ на Z_2-подгруппе целых 2-адических чисел, а затем продолжить на Q_2. Наконец, поскольку группа рациональных чисел, знаменатели которых свободны от двоек, плотна в Z_2, то мы дадим явные формулы для действия $\mathcal{M}$ на них. Фактически мы определим действие $\mathcal{M}$ на целых числах. Определим последовательность

$$a_r = \frac{2^r - 1}{3}, \quad r \equiv 0(2),$$
$$a_r = \frac{2^r - 2}{3}, \quad r \equiv 1(2).$$

Любое натуральное число $n \in \mathbb{N}$ единственным способом записывается одним из способов $(r = r(n))$

$$n = \begin{cases} 2^r l + a_{r-1}, & (1^*) \\ 2^r l + 2^{r-1} + a_r.(2^*) \end{cases}$$

Определим отображение $\mathcal{M}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{M}(n) = \begin{cases} n + a_{r(n)}, (1) \\ n - a_{r(n)} \ (2) \end{cases}$$

в зависимости от представления $(*)$.

Вот таблица первых значений $\mathcal{M}(n)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
1	3	7	2	5	15	4	6	9	11	31	10	13	8	12	14	...

Определим $\mathcal{M}(-n) = -\mathcal{M}(n-1) - 1$, тем самым $\mathcal{M}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \setminus \{0; -1\}$.

Положим

$$\mathcal{M}(-\frac{1}{3}) = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{M}(-\frac{2}{3}) = -1. \qquad (*)$$

Теорема 6. *Задание $\mathcal{M}$ на $\mathbb{Z}$ вместе с условием $(*)$ однозначно определяет продолжение $\mathcal{M}$ по непрерывности на аддитивную группу целых диадических чисел Z_2. Распространим это действие на Q_2, полагая $\mathcal{M}$ тождественным на Q_2/Z_2. Наконец, определим действие автоморфизма $S\colon Q_2 \to Q_2$, $Sx = 2x$ и $T_i = S^i T_0 S^{-i}$, $T_0 = \mathcal{M}$. Легко проверить, что $T_i^2 = T_{i+1}$, и тем самым мы задали действие группы двоично-рациональных чисел Q_2 и его расширения $S \leftthreetimes Q_2$ на Q_2. Автоморфизм S является гиперболическим автоморфизмом.*

Теорема 7. *Реализуем Q_2 как компакт $X = \{0;1\}^{\mathbb{Z}}$, записывая элемент Q_2 как последовательность значений на нем аддитивных характеров $\chi_i \in Q_2$, $2\chi_i = \chi_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Снабдим Q_2 мерой Хаара. Тогда*

1) *описанное (извращенное) действие Q_2 на Q_2 является локально-трансверсальным действием в смысле §3, действие S переходит в левый сдвиг на X;*

2) *ограничение действия образующей T_0 на группу $Z_2 \subset Q_2$, снабженную мерой Хаара, изоморфно преобразованию Морса.*

Замечание. Обычная реализация преобразования Морса строится в $\mathbb{Z}_2$-расслоении над Z_2, мы же реализовали его непосредственно в Z_2.

Можно надеяться, что включение преобразования Морса в более широкую группу позволит точнее охарактеризовать его спектр. То же относится и к другим подстановкам.

Мы приведем более подробные детали арифметического смысла приведенных разложений в другом месте.

Список литературы

[1] Вершик А. М., *Арифметический изоморфизм гиперболических автоморфизмов тора и софических сдвигов*, Функцион. анализ и его прил. **26** (1992), № 3, 22–27.

[2] Vershik A., *The Fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Report, no. 4, 1991/1992, Inst. Mittag-Leffler.

[3] Faddeev L. D., Volkov A. Yu., *Hirota equation as an example of integrable symplectic map*.

[4] Adler R., Weiss B., *Entropy a complete metric invariant for automorphisms of the torus*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **57** (1967), no. 6, 1573–1576.

[5] Adler R., Weiss B., *Similarity of automorphisms of the torus*, Memoirs of AMS (1970), no. 98.

[6] Синай Я. Г., *Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы*, Функцион. анализ и его прил. **2** (1968), № 1, 64–89.

[7] Гуревич Б. М., Синай Я. Г., *Автоморфизмы тора и цепи Маркова*, Доп. к рус. пер. П. Биллингсли: Эргодическая теория и теория информации, М., 1970, с. 205–233.

[8] Bowen R., *Markov partitions for axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. Math. **92** (1970), no. 3, 725–727.

[9] Ito Sh., *A constuction of transversal flows for maximal Markov automorphisms*, Second Japan-USSR symposium on probability theory, vol. 3, 1972, pp. 2–17.

[10] Capocaccia D., *A definition of Gibbs state for a compact set with Z^ν action*, Comm. Math. Phys. **48** (1976), 85–88.

[11] Ruelle D., *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, 1978.

[12] Gordin M., *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems*, Com. Math. **149** (1993), 149–162.

[13] Krieger W., *On Dimension Functions and Topological Markov Chains*, Invent. Math. **56** (1980), 239–250.

[14] Вершик А. М., *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*, ДАН СССР **259** (1981), № 3, 526–529.

[15] Вершик А. М., *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
[16] Livshits A. N., Vershik A. M., *Adic models of ergodic transformations, spectral theory and related topics*, Adv. Sov. Math. AMS **9** (1992), 185–204.
[17] Gottshalk W. H., *Substitution minimal sets*, Trans. AMS **109** (1963), 467–491.
[18] Queffelec M., *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Lect. Notes in Math. **1294** (1987).
[19] Weiss B., *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monatsh. Math. **77** (1973), 426–474.
[20] Parry W., *Intrinsic Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964), no. 1, 55–65.

Поступило 16 февраля 1994 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27