



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. N. Ljashenko, The weak convergence of step processes in the space of closed sets, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 122–129

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

January 19, 2025, 00:23:03



СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СТУПЕНЧАТЫХ ПРОЦЕССОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

В настоящей работе описывается подход к изучению асимптотического поведения последовательностей случайных процессов, основанный на трактовке траекторий как случайных множеств на плоскости. Отличие такой точки зрения от традиционного функционального подхода можно пояснить с помощью двух простых примеров.

Последовательность функций $(\sin nx)$ на промежутке $[0; 1]$ не сходится ни в каком из общепринятых смыслов, однако последовательность соответствующих графиков все плотнее зачерчивает прямоугольник $[0; 1] \times [-1; 1]$. Последовательность функций (nx) на $[-1; 1]$ также не сходится, однако графики ее членов все "ближе" примыкают к прямой $x=0$. Опираясь на интуицию, хочется сказать, что первая последовательность стремится к прямоугольнику, а вторая - к вертикальной прямой. Этим утверждениям можно придать строгий смысл, если рассматривать графики как элементы пространства замкнутых множеств плоскости или полосы $E=[a; b] \times \mathbb{R}$.

Пусть \mathcal{G} - множество открытых, \mathcal{F} - множество замкнутых, а \mathcal{K} - множество компактных подмножеств E (топология индуцирована на E евклидовой топологией плоскости); \mathcal{G}_E борелевская σ -алгебра в E . Введем обозначения:

$$\mathcal{F}^{\emptyset} = \{ F \mid F \in \mathcal{F} \text{ \& } F \cap B = \emptyset \};$$

$$\mathcal{F}_B = \{ F \mid F \in \mathcal{F} \text{ \& } F \cap B \neq \emptyset \} \text{ очевидно, что } \mathcal{F}_B = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^{\emptyset}$$

Определим топологию $J_{\mathcal{F}}$ на \mathcal{F} как наименьшую, содержащую множества вида \mathcal{F}^K , \mathcal{F}_G , где $K \in \mathcal{K}$, а $G \in \mathcal{G}$. В результате получим топологическое пространство замкнутых множеств. Оно является компактным, хаусдорфовым и сепарабельным (см. [1], с.24). Нам понадобится следующий критерий сходимости в \mathcal{F} .

Последовательность (F_n) сходится в \mathcal{F} к пределу F тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) если $G \in \mathcal{G}$ и $G \cap F \neq \emptyset$, то начиная с некоторого номера, $F_n \cap G \neq \emptyset$.

б) если $K \in \mathcal{K}$ и $K \cap F = \emptyset$, то начиная с некоторого номера, $F_n \cap K = \emptyset$ (см. [1], с.26, 27).

Рассматривая борелевскую σ -алгебру $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, определяемую топологией $J_{\mathcal{F}}$, будем называть замкнутыми случайными множествами отображения произвольного вероятностного пространства в \mathcal{F} ,

измеримы по Борелю относительно σ -алгебры событий.

Введем последовательность $(\alpha_n) (n=0, 1, 2, \dots)$ одинаково распределенных независимых случайных величин. Распределение α_i обозначим через S , а функцию распределения - через H . Определим случайную функцию ξ на $[0; +\infty[$ следующим образом:

$$\xi(t) = \alpha_{[t]}. \text{ Положим для } t \in [0; 1] \quad \xi_n(t) = b_n \xi(nt),$$

где $n \in \mathbb{N}$, (b_n) - строго возрастающая, стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел. С помощью ξ_n определим

последовательность случайных подмножеств E (полагая $a=0$, $b=1$): $A_n = \bar{\xi}_n$ (функцию мы отождествляем с ее графиком, $\bar{\xi}_n$ - замыкание графика ξ_n). Легко видеть, что A_n удовлетворяет определению замкнутого случайного множества (ЗСМ).

Известно, что распределение ЗСМ A полностью определяется так называемым сопровождающим функционалом, сопоставляющим каждому $K \in \mathcal{K}$ величину $T_A(K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$

(см. [1], с.53, 56). Этот функционал может быть продолжен до емкости на множество всех подмножеств E . Во многих рассмотренных случаях удобен также функционал

$$Q_A(K) = 1 - T_A(K) = P(A \cap K = \emptyset).$$

Наша задача состоит в отыскании условий, при которых последовательность распределений \mathcal{P}_n ЗСМ A_n слабо сходится к некоторому предельному распределению. В частности, мы будем интересоваться условиями сходимости к невырожденному распределению, а также более сильными условиями сходимости к распределению без фиксированных точек ($x \in E$ называется фиксированной точкой ЗСМ A , если $P(x \in A) = 1$, см. [1], с.84). Кроме этого, в нашу задачу входит описание класса предельных распределений.

Понятие слабой сходимости вводится здесь естественным образом: как сходимость $\mathcal{P}_n(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ на всех $M \in \sigma_{\mathcal{F}}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{P}(\partial M) = 0$. Слабую сходимость будем обозначать знаком \Rightarrow .

Для решения поставленных задач нам понадобятся некоторые вспомогательные факты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $\mathcal{B}(L)$ класс открытых прямоугольников $]a, b[\times]c, d[\subset E$, где $(a, b), (c, d) \in L$, а L - счетное всюду плотное подмножество R^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через \mathcal{T} класс множеств вида

$$\bigcup_{i=1}^k \bar{V}_i \cup \dots \cup \bar{V}_k,$$

где $n, k \in \mathbb{Z}_0^+$; $B_i, B'_i \in \mathcal{B}(L)$ (см. определение 1).

ЛЕММА 1. \mathcal{T} является счетной базой топологии $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1], с. 24.

ЛЕММА 2. Если $\mathcal{P}_n(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ для всех $M \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на теорему 2.2 из книги [2] (с. 25) и лемму 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\mathcal{L}(L)$ класс множеств вида

$$B_1 \cup \dots \cup B_s \cup \bar{B}_{s+1} \cup \dots \cup \bar{B}_m;$$

где $s, m \in \mathbb{Z}_0^+$, $B_j \in \mathcal{B}(L)$.

Обозначим через Q функционал, определяющий распределение \mathcal{P} , а через Q_n - функционал, определяющий распределение \mathcal{P}_n .

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{P}_n(\mathcal{F}_V) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_V)$ для всех $V \in \mathcal{L}(L)$. Тогда $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ на \mathcal{T} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_j, B'_j \in \mathcal{B}(L)$; $n, k \in \mathbb{Z}_0^+$;

$$Y = \mathcal{F}_{B_1, \dots, B_n} \bar{B}'_1 \cup \dots \cup \bar{B}'_k; \quad M = \bar{B}'_1 \cup \dots \cup \bar{B}'_k;$$

тогда
$$\mathcal{P}(Y) = \sum_{I \subset \Delta_n} \sum_{i \in I} Q(MU(UB_i)) (-1)^{\text{card } I};$$

где $\Delta_n = \{1, \dots, n\}$. Аналогичная формула связывает \mathcal{P}_n и Q_n . (См. [1], с. 58). Под знаком Q_n стоят множества из класса $\mathcal{L}(L)$, поэтому каждое слагаемое сходится к соответствующему значению Q и, значит, $\mathcal{P}_n(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ на множествах вида \mathcal{F}_M ($M \in \mathcal{L}(L)$), то $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 4. Если $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$; $M \in \sigma_R$; $\Pi_1 = [a, b] \times M$; $\Pi_2 =]a, b[\times M$; то

$$Q_n(\Pi_1) = (1 - S(b_n^{-1}M))^{n(b-a)+2}; \quad Q_n(\Pi_2) = (1 - S(b_n^{-1}M))^{n(b-a)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение Q_n и независимость случайных величин α_j , получаем:

$$\begin{aligned} Q_n(\Pi_1) &= P(A_n \cap \Pi_1 = \emptyset) = P(\xi_n(a - \frac{1}{n}) \notin M \& \dots \& \xi_n(b) \notin M) = \\ &= P(\alpha_{na-1} \notin b_n^{-1}M \& \dots \& \alpha_{bn} \notin b_n^{-1}M) = (1 - S(b_n^{-1}M))^{nb-na+2} \end{aligned}$$

Второе утверждение доказывается аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть Y - промежуток произвольного вида с концами a, b . Положим

$$Y_n^+ = \left[\frac{[na]}{n}, \frac{[nb]+1}{n} \right]; Y_n^- = \left[\frac{[na]+1}{n}, \frac{[nb]}{n} \right].$$

ЛЕММА 5. Пусть Π_1 и Π_2 определяются, как в лемме 4, $h_n = S(b_n^{-1}M)$; $\Pi_n^+ = [a, b]_n^+ \times M$; $\Pi_n^- = [a, b]_n^- \times M$.

Тогда верны следующие утверждения:

- а) $\Pi_n^- \subset \Pi_2 \subset \Pi_1 \subset \Pi_n^+$;
 б) $Q_n(\Pi_n^+) \leq Q_n(\Pi_1) \leq Q_n(\Pi_2) \leq Q_n(\Pi_n^-)$;
 в) $(1-h_n)^{[nb]-[na]+3} \leq Q_n(\Pi_1) \leq Q_n(\Pi_2) \leq (1-h_n)^{[nb]-[na]-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) вытекает из включений $Y_n^- \subset Y \subset Y_n^+$, справедливых для промежутков по определению 4; б) следует из а) и убывания функционала Q_n . Наконец, подставляя в б) значения $Q_n(\Pi_n^\pm)$ из леммы 4, получаем в).

Уже использованная нами техника позволяет доказать следующее утверждение:

ЛЕММА 6. Пусть $\Pi = \bigcup_{j=1}^m \langle a_j, b_j \rangle \times \langle c_j, d_j \rangle$, $\mathcal{D} = [u, v]$, $u < v$, $\text{pr}_Y \Pi \subset \mathcal{D}$. Если $S_{j=1}^m$ - невырожденное распределение, то для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ и всех достаточно больших n

$$\prod_{j=1}^s Q_n(\Pi_j) (1 - S(b_n^{-1}\mathcal{D}))^{2(3-s)} \leq Q_n(\Pi) \leq \prod_{j=1}^s Q_n(\Pi_j) (1 - S(b_n^{-1}\mathcal{D}))^{-4(3-s)}$$

$$\Pi_j = \langle u_j, v_j \rangle \times M_j.$$

ЛЕММА 7. Пусть $K \in \mathcal{K}$, тогда $\overline{\mathcal{F}^K} = \mathcal{F}^K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Немедленно следует из критерия сходимости в пространстве $\mathcal{F}(E)$.

ЛЕММА 8. $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \overset{\circ}{\mathcal{F}}^K$ ($K \in \mathcal{K}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \mathcal{F}^K - открытое множество в \mathcal{F} . Поэтому $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \overline{\mathcal{F}^K} \setminus \mathcal{F}^K$. Используя лемму 7, получаем: $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}^K = \overset{\circ}{\mathcal{F}}^K$.

ЛЕММА 9. Пусть T - сопровождающий функционал замкнутого случайного множества A . Для того чтобы A было вырождено (то есть существовало $F \in \mathcal{F}$ со свойством $P(A=F) = 1$) необходимо и достаточно, чтобы для любого $B \in \mathcal{B}(L)$ $T(\overline{B}) \in \{0; 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $A=F$ п.н., то \mathcal{K} можно разбить на две части:

$$\mathcal{K}^F = \{K \in \mathcal{K} \mid K \cap F = \emptyset\}; \mathcal{K}_F = \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^F.$$

Если $K \in \mathcal{K}^F$, то п.н. $A \cap K = \emptyset$ и $T(K) = 0$. Если же $K \in \mathcal{K}_F$,

то п.н. $A \cap K \neq \emptyset$ и $T(K) = 1$.

Достаточность. Предположим выполнение условия леммы. Если $G \in \mathcal{G}$, то $G = \bigcup_n K_n$, где $K_n = \overline{B_n} \in \mathcal{K}$, $B_n \in \mathcal{B}(L)$. Вследствие полунепрерывности T снизу $T(G) \in \{0; 1\}$. Отсюда полагая $Y = \bigcup_{i \in I} G_i$ где $\{G_i | i \in N\}$ - счетное множество фундаментальных окрестностей в E из $\mathcal{B}(L)$, а $I = \{i | T(G_i) = 0\}$, получаем, что $T(Y) = 0$, и, следовательно, п.н. $A \subset Y^c$.

Покажем, что $A = Y^c$ п.н. Действительно, по построению $Y \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим фундаментальную окрестность $\mathcal{F}_{B_1, \dots, B_k}^M$ из леммы 1, содержащую Y^c . Тогда $M \subset Y$ и $\mathcal{P}(\mathcal{F}^M) \geq \mathcal{P}(\mathcal{F}^Y) = 1 - T(Y) = 1$.

B_j являются объединениями G_ℓ , причем не для всех ℓ $T(G_\ell) = 0$. Так или иначе $B_j \subset Y$. Отсюда $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{B_j}) = T(B_j) = 1$. В итоге $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{B_1, \dots, B_k}^M) = 1$ и, значит, $\mathcal{P}(\{Y^c\}) = 1$.

Перейдем к доказательству первого результата о слабой сходимости распределений \mathcal{P}_n замкнутых случайных множеств A_n к невырожденному распределению.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы (\mathcal{P}_n) слабо сходилась к невырожденному распределению, необходимо и достаточно выполнения условий:

а) существует такое всюду плотное в $R \times R$ множество L , что для любой пары $(x, y) \in L$

$$\lim_n \nu([x, y]) = \nu([x, y]) \in [0, +\infty],$$

где ν - мера на σ_R ;

б) существует пара $(x, y) \in L$, для которой $0 < \nu([x, y]) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$, причем \mathcal{P} не вырождено. Рассмотрим прямоугольник $\Pi_\beta = [a+\beta, b-\beta] \times [c+\beta, d-\beta]$, где β таково, что $\Pi_\beta \neq \emptyset$.

В силу монотонности функции $f(\beta) = Q(\Pi_\beta)$ существуют сколь угодно малые β , в которых f непрерывна. Если β - точка непрерывности, то $Q(\overset{\circ}{\Pi}_\beta) = f(\beta) = Q(\Pi_\beta)$, поэтому $\mathcal{P}(\partial \overset{\circ}{\Pi}_\beta) = Q(\overset{\circ}{\Pi}_\beta) - Q(\Pi_\beta) = 0$ по лемме 8, то есть \mathcal{F}^{Π_β} - множество непрерывности. В силу слабой сходимости

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{F}^{\Pi_\beta}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{\Pi_\beta}) \quad \text{или} \quad Q_n(\Pi_\beta) \rightarrow Q(\Pi_\beta).$$

Положим $\Pi_\beta = [\bar{a}, \bar{b}] \times [\bar{c}, \bar{d}]$. По лемме 5

$$(1-h_n)^{[n\bar{b}] - [n\bar{a}] + 3} \leq Q_n(\Pi_\beta) \leq (1-h_n)^{[n\bar{b}] - [n\bar{a}] - 1}$$

Рассмотрим три случая.

I. Пусть $\lim_n h_n = 0$. Тогда, логарифмируя, получаем:

$$n(\bar{b} - \bar{a})h_n \rightarrow -\ln Q(\Pi_\beta) \in [0, +\infty]$$

(здесь $\ln 0 = -\infty$), то есть существует $\lim_n n h_n$ в R_+ .
Обозначим его $\nu([\bar{c}, \bar{d}])$. При этом

$$Q(\Pi_\beta) = \exp(-(\bar{b} - \bar{a})\nu([\bar{c}, \bar{d}])).$$

2. Пусть для достаточно больших n $h_n \geq \delta > 0$. Тогда $Q(\Pi_\beta) = 0$ и $n h_n \rightarrow +\infty$, то есть

$$\lim_n n h_n = \exp(-(\bar{b} - \bar{a})\nu([\bar{c}, \bar{d}])), \quad (I)$$

где $\nu([\bar{c}, \bar{d}]) = +\infty$.

3. Пусть $(h_n) \rightarrow 0$, но $(h_n) \not\rightarrow 0$. Тогда $n h_n \rightarrow +\infty$ и $Q_n(\Pi_\beta) \rightarrow 0$; откуда следует (I).

Легко видеть, что множество пар (x, y) , для которых существует $\lim_n n S(b_n^{-1}[x, y])$, всюду плотно в $R \times R$; более того, всюду плотным является множество пар L , для которых существует $\lim_n n S(b_n^{-1}\langle x, y \rangle)$ ($\langle x, y \rangle$ - промежуток произвольного вида). При этом сопровождающий функционал предельного распределения принимает на $\Pi = [a, b] \times \langle c, d \rangle$ ($a < b, c, d \in L$) значения

$$T(\Pi) = 1 - \exp(-(\bar{b} - \bar{a})\nu(\langle c, d \rangle)).$$

Среди пар множества L найдется такая, что $0 < \nu([x, y]) < +\infty$, так как иначе по лемме 9 \mathcal{P} вырождено. Для завершения доказательства необходимости остается отметить, что ν стандартным образом продолжима на $\sigma_{\mathcal{R}}$ до меры.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. С помощью меры из п.п. а) и б) формулировки теоремы построим функционал ¹⁾

$$Q(K) = \exp(-(\text{mes}_k \otimes \nu)(K)), \quad K \in \mathcal{K}.$$

Легко видеть, что $1 - Q$ - сопровождающий функционал некоторого распределения на $\sigma_{\mathcal{F}}$ (см. [1], с. 56). Так как существует $(x, y) \in L$ со свойством $0 < \nu([x, y]) < +\infty$, то $T([0, 1] \times [x, y]) \neq \{0; 1\}$ и по лемме 9 \mathcal{P} не вырождено.

Покажем, что $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$. Очевидно, \mathcal{S} не вырождено, так как в противном случае не выполняется условие б). Поэтому применима лемма 6. Для достаточно больших n $S(b_n^{-1}\mathcal{D}) < 1$, поэтому неравенство леммы 6 можно прологарифмировать. Оценивая $Q_n(\Pi_j)$ с помощью леммы 5 и пользуясь условием а), получаем, что для любого $M \in \mathcal{B}(L)$ $Q_n(M)$ стремится к $Q(M)$ и по теореме I $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$.

1) Здесь и далее mes_k означает k -мерную меру Лебега.

Из доказательства теоремы 2 видно, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия а), б) теоремы 2, то предельное распределение \mathcal{P} определяется сопровождающим функционалом вида

$$T(K) = 1 - \exp(-(\text{mes}_1 \otimes \nu)(K)),$$

где $K \in \mathcal{K}$, а ν - мера на \mathcal{O}_R .

СЛЕДСТВИЕ. I. Предельные распределения \mathcal{P} из теоремы 2 соответствуют ЗСМ A со свойством:

$$P(\text{card}(A \cap K) = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

где $K \in \mathcal{K}$, $\lambda = (\text{mes}_1 \otimes \nu)(K)$. В частности, ЗСМ A является локально конечным, то есть для всякого $K \in \mathcal{K}$

$$P(\text{card}(A \cap K) < \infty) = 1.$$

Рассмотрим частный по отношению к теореме 2, случай, в котором предельное распределение не только не вырождено, но и не имеет фиксированных точек.

ТЕОРЕМА 4. Для того, чтобы (\mathcal{P}_n) слабо сходилась к распределению без фиксированных точек, необходимо и достаточно выполнения условий:

а) существует такое всюду плотное в $R \times R$ множество L , что для любой пары $(x, y) \in L$

$$\lim_n n S(\nu_n^{-1} \langle x, y \rangle) = \nu(\langle x, y \rangle),$$

где ν - мера на \mathcal{O}_R .

б) существует пара $(x, y) \in L$ такая, что $\nu([x, y]) > 0$;

в) для любой пары $(x, y) \in L$ $\nu(\langle x, y \rangle) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$, где \mathcal{P} - распределение без фиксированных точек. Тогда, в частности, \mathcal{P} не вырождено, откуда по теореме 2 следуют условия а) и б).

Докажем в). Выберем произвольную пару $(x, y) \in L$ и предположим, что $\nu([x, y]) = +\infty$. Очевидно, что Q -функционал предельного распределения имеет вид $Q(K) = \exp(-(\text{mes}_1 \otimes \nu)(K))$ (см. теорему 3), поэтому $Q([0, 1] \times [x, y]) = 0$. С другой стороны, легко видеть, что предельное случайное множество безгранично делимо относительно объединения (см. [1], с.83) и поскольку оно не имеет фиксированных точек, то по лемме 3.1.1 книги I (см. с.84) $Q(K)$ положителен. Итак, $\nu([x, y]) < +\infty$ и тем более $\nu(\langle x, y \rangle) < +\infty$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предположим, что выполнены условия а), б),

в). Из условий б), в) вытекает условие б) теоремы 2, откуда, учитывая а), получаем слабую сходимость (\mathcal{P}_n) к некоторому невырожденному распределению \mathcal{P} . Остается показать, что оно не имеет фиксированных точек. Докажем это "от противного".

Пусть t - фиксированная точка \mathcal{P} , тогда $T(\{t\}) = 1$. Найдется пара $(x, y) \in L$ со свойством $x < t < y$. Поскольку

$$t \in \Pi = [0, 1] \times [x, y],$$

то $T(\Pi) = 1$. По теореме 3 $\nu([\pi, y]) = +\infty$, что противоречит условию в).

ТЕОРЕМА 5. Из условий а) и в) теоремы 4 вытекает, что $S(\{0\}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x < 0 < y$ и $(x, y) \in L$, то с одной стороны

$$S(b_n^{-1}[x, y]) \rightarrow S(\{0\}),$$

а с другой -

$$S(b_n^{-1}[x, y]) = \frac{1}{n} \nu([\pi, y]) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и, следовательно, $S(\{0\}) = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть распределению \mathcal{P} соответствует сопровождающий функционал вида, указанного в теореме 3, Fix - множество фиксированных точек \mathcal{P} , $J_\nu = \{y \mid \nu(\{y\}) = \infty\}$. Тогда

$$\text{Fix} = [0; 1] \times J_\nu,$$

причем множества J_ν и Fix замкнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общего вида функционала, рассмотренного в теореме 3, сразу следует, что утверждения $P((x, y) \in A) = 1$ и $\nu(\{y\}) = +\infty$ эквивалентны. Отсюда $\text{Fix} = [0; 1] \times J_\nu$. Замкнутость немедленно вытекает из безграничной делимости A относительно объединения и леммы 3.1.1 книги [1] (с.84).

В заключение приведем пример. Пусть $H^{(k)}(0) = 0$ для $k = 1, \dots, \lambda - 1$ и $H^{(\lambda)}(0) > 0$. Тогда условия теоремы 4 выполняются при $b_n = n^{1/\lambda}$, а предельная мера ν задается формулой

$$\nu([\pi, y]) = H^{(\lambda)}(0) (\lambda!)^{-1} (|y|^\lambda \text{sign } y - |x|^\lambda \text{sign } x).$$

В частности, при $\lambda = 1$ $\mu = H'(0) \text{mes}_2$

Литература

1. М а т е р о н Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.
2. Б и л л и н г с л и П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.