Т. А. Мельник, С. А. Назаров, Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 2, 188–238

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА НА СОЕДИНЕНИИ ТЕЛА С ТОНКИМИ ТЯЖЕЛЫМИ СТЕРЖНЯМИ

© Т. А. Мельник, С. А. Назаров

Исследуется спектр задачи Неймана в сингулярно вырождающейся области с соотношением предельных размерностей 3:1:1. Характерной особенностью являются точки сгущения спектра предельной задачи. Строятся и обосновываются асимптотики нескольких серий собственных значений. В каждой из серий начальные члены асимптотик собственных значений одинаковы, а их расщепление происходит в младших членах при участии собственных значений некоторого интегрального оператора на дуге, вдоль которой стержни присоединены к телу.

§1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1. Сочленение сингулярно вырождающихся областей. Зависящая от параметра $\varepsilon > 0$ область $\Xi_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ (точнее, семейство областей) называется тонкой или сингулярно вырождающейся, если замыкание Ξ_ε при $\varepsilon \to +0$ стягивается к подмногообразию с размерностью $m < n$. Число m называется предельной размерностью Ξ_ε. Алгорифмы построения асимптотик решений эллиптических задач в тонких областях разработаны в полной мере (см. [1–10] и др.) и в последнее время повышенное внимание уделяется математическим исследованиям краевых задач на соединениях сингулярно вырождающихся областей (см. [11–22] и др.). Настоящая статья посвящена асимптотическому анализу одной из таких задач на соединении типа 3:1:1, а именно задаче Неймана для трехмерного тела, сочлененного с густым периодическим семейством тонких стержней. Принадлежность к типу $m : k : d$ в $\mathbb{R}^n$ означает, что к области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ с предельной размерностью $m \leqslant n$ (тело) вдоль k-мерного подмногообразия на $\partial\Omega_0$ (зона сочленения, $k < m$) присоединяется ε-периодическое семейство тонких областей $\{G_j(\varepsilon)\}$ с предельной размерностью $d < n$ (стержни). Подобная

Ключевые слова: тонкие области, соединения, асимптотики собственных чисел, точки сгущения спектра.

классификация используется и далее, а случай $k = 0$ отвечает „изолированным отросткам“, т.е. исключает из анализа процедуру осреднения, характерную для данной работы. Отметим, что в [11, 14] рассмотрены соединения типа 3:0:2 в $\mathbb{R}^3$, в [11, 13–15] — типа 2:0:1 в $\mathbb{R}^2$, а в [12] и [16–22] — соответственно типов 2:0:1 и 3:0:1 в $\mathbb{R}^3$.

Первые исследования соединений типа 3:2:1, по-видимому, были предприняты в статьях [23, 24], где изучалась функция Грина задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. При помощи методов осреднения [25–28] в работах [29–32] были найдены предельные уравнения, описывающие акустические колебания в пористой среде с тонкими каналами (тип 3:2:1). Кроме того, в [29] обсуждались спектральные свойства таких задач и отмечалась одна из характерных особенностей густых соединений: в результате предельного перехода операторный множитель при спектральном параметре теряет компактность. В итоге „ ... исчерпывающего исследования спектральных свойств не сделано“ [29, с. 163]. Такой же подход применен в [32] для соединений типа 3:2:2.

Независимо от упомянутых публикаций авторами в [33–37] был разработан строгий метод анализа спектров ряда задач на густых соединениях разнообразных типов (3:1:1, 3:2:1, 2:1:1 в $\mathbb{R}^3$ и 2:1:1 в $\mathbb{R}^2$). Оказалось, что тип соединения предопределяет как строение пограничного слоя в зоне сочленения, так и основные свойства результирующей задачи, в частности структуру ее спектра.

Модельные задачи, описывающие явление пограничного слоя, ставятся в неограниченных областях, имеющих выходы на бесконечность различных форм (полуцилиндры, конусы, секторы слоя и т. п.). Тем не менее доказательства теорем о разрешимости и асимптотическом поведении решений в существенном идентичны — они опираются на общую теорию эллиптических краевых задач в областях с кусочно-гладкой границей (см. [38–42] и др.) и существенно упрощаются при использовании полиномиального свойства соответствующих полуторалинейных форм (см. [43–45] и др.).

Иначе обстоят дела с исследованием спектров результирующих задач, поскольку из-за упоминавшейся потери компактности возникают разнообразные нестандартные спектральные задачи. Так, в случае $m - k = 1$ (предельные размерности тела и зоны сочленения различаются на единицу) результирующая задача сводится к некоторой самосопряженной оператор-функции с разрывными коэффициентами (спектры таких пучков изучены в [46, 47, 37]). Если же соединение имеет тип 3:1:1 и в пределе зона сочленения превращается в кривую Г, на которой постановка каких-либо краевых условий невозможна ввиду некорректности получающейся задачи Соболева, то спектр результирующей задачи связывается со спектром специального интегрального оператора на Г. Аналогичные интегральные операторы возникали при асимптотическом анализе других краевых задач в областях с сингулярно возмущенной границей: трехмерная область с узкой продолговатой полостью [48–50], тело, пронзенное тонким стержнем [21], и пр. Общая схема введения таких операторов описана в [51].

2. Исходная спектральная задача. Пусть Ω_0 — криволинейная призма

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| < h, |x_3| < b, -\varphi(x') < x_2 < 0\},$$

где $x' = (x_1, x_3)$ и $\varphi \in C^\infty([-h,h]\times[-b,b])$, $\varphi \geqslant 1$. Пусть еще ω — плоская область, содержащая начало координат, лежащая в круге $\{x' : x_1^2 + x_3^2 < \rho_0^2 < 1/4 < b^2\}$ и симметричная относительно оси $x_1 = 0$. Для простоты считаем, что $\partial\omega$ — гладкий замкнутый контур. Вдоль отрезка $I_h = \{x : |x_1| < h, x_2 = x_3 = 0\}$ присоединим к Ω_0 тонкие цилиндры

$$G_j(\varepsilon) = \{x : x_2 \in [0, l), \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_3) \in \omega\}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N.$$

Здесь $l \geqslant 1$; N — большое натуральное число, т. е. $\varepsilon = 2h/(2N+1)$ — малый параметр. В результате возникает густое периодическое соединение типа 3:1:1

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_{-N}(\varepsilon) \cup \dots \cup G_N(\varepsilon).$$

Будем считать, что отношения „жесткостей“ и „плотностей“ стержней и тела также являются большими параметрами $\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}$, $\varkappa > 1$ и ε^{-2} (это наиболее интересный случай, в котором все предельные задачи связываются в единую результирующую задачу). В Ω_ε рассмотрим спектральную задачу Неймана с оператором Лапласа и естественными условиями сопряжения на „приклеенных“ торцах $Q_\varepsilon^j = G_j(\varepsilon) \cap \partial\Omega_0$ цилиндров

$$\begin{aligned}
-\Delta_x u(\varepsilon, x) &= \lambda(\varepsilon) u(\varepsilon, x), && x \in \Omega_0;\\
-\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\Delta_x u(\varepsilon, x) &= \varepsilon^{-2}\,\lambda(\varepsilon) u(\varepsilon, x), && x \in G_\varepsilon \equiv \Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_0;\\
\partial_2\, u(\varepsilon, x', -0) &= \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\,\partial_2\, u(\varepsilon, x', +0), && \qquad (1.1)\\
u(\varepsilon, x', -0) &= u(\varepsilon, x', +0), && x' \in Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^{-N} \cup \dots \cup Q_\varepsilon^N;\\
\partial_\nu\, u(\varepsilon, x) &= 0, && x \in \partial\Omega_\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

При этом $\partial_\nu = \partial / \partial \nu$ — производная вдоль внешней нормали к поверхности $\partial \Omega_\varepsilon$ и $\partial_i = \partial / \partial x_i$.

Основная цель работы — построение и обоснование асимптотических представлений при $\varepsilon \to +0$ ($N \to \infty$) собственных значений задачи (1.1)

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \cdots \to +\infty \tag{1.2}$$

и соответствующих собственных функций u_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Подчеркнем, что предельный переход $\varepsilon \to +0$ сопровождается концентрацией масс на малых множествах $G_j(\varepsilon)$ (ср. с [52–55, 28]) и бесконечным увеличением их жесткости (ср. с [16, 18, 21, 22]), причем масса каждого стержня совпадает по порядку с массой тела Ω_0. Разумеется, множители $\varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon|^{-\varkappa}$ и ε^{-2} в (1.1) можно было бы заменить на $\gamma_0 \varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon|^{-\varkappa}$ и $\sigma_0 \varepsilon^{-2}$, однако постоянные $\gamma_0 > 0$ и $\sigma_0 > 0$ никоим образом не влияют на процедуру построения асимптотик и для сокращения формул отброшены.

Результаты работы частично были анонсированы в [34].

3. Структура статьи. В §2 заменой спектрального параметра

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-\varkappa} \widetilde{\lambda}(\varepsilon) \tag{1.3}$$

задача (1.1) приводится к виду, удобному для исследования. В этом же параграфе приводятся вспомогательные утверждения и конструкции, используемые в дальнейшем.

Собственно к асимптотическому анализу мы приступаем в §3, где находим начальные члены асимптотических рядов для собственных значений и функций. Применяется метод сращиваемых разложений и на основе детальной информации о решениях предельных задач (решения в Ω_0 с особенностями на I_h, разложения решений на тонких стержнях G_ε, поведение пограничных слоев на бесконечности) выводится результирующая задача, которая упрощается до спектральной задачи для интегрального оператора $J_\perp$ на I_h, определенного и изученного в п. 4, §3.

Первый этап обоснования построенных асимптотик представлен в §4. Именно, фиксировав собственные значение Λ_n и функцию d_n оператора $J_\perp$, мы сооружаем из них асимптотическое приближение к решению исходной задачи так, что его невязка в соотношениях (1.1) оказывается малой. Это обстоятельство позволяет применить лемму [56] о почти собственных значениях и тем самым указать истинное решение задачи (1.1) в окрестности приближенного. Второй этап — доказательство теоремы сходимости — реализован в §5. Подчеркнем, что результаты §4 и 5, взятые порознь, не дают правильного представления об асимптотическом строении спектральной последовательности (1.2).

4. Обсуждение. Как правило, в теории осреднения оправдание асимптотических конструкций связывается с доказательством сходимости члена $\lambda_n(\varepsilon)$ последовательности (1.2) к собственному значению $\lambda_n(0)$ результирующей задачи (номер *n произволен, но фиксирован*). Асимптотический анализ, проделанный авторами в данной и предшествующих [33–37] работах, показывает, что упомянутый подход не годится для густых периодических соединений из-за усложнения структур спектров (впрочем, его изъяны очевидны и при рассмотрении простейшей задачи Неймана в тонком прямоугольнике). Поясним обнаруженные в задаче (1.1) новые эффекты.

Прежде всего при любом n предел $\lambda_n(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ равен нулю. Это характерная черта задач о концентрированных массах (см. [52–55, 28] и др.), а типичный способ получения сколько-нибудь точной информации о $\lambda_n(\varepsilon)$ — подходящая замена спектрального параметра (ср. с (1.3)). Однако в задаче (1.1) $\lambda_n(\varepsilon) = \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\{a_0^{(1)} - a_1^{(1)}|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa+1} + o(|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa+1})\}$ с постоянными $a_0^{(1)} > 0$ и $a_1^{(1)} > 0$ *общими для всех n*! Иными словами, скорость стремления собственных значений $\lambda_n(\varepsilon)$ к нулю одинакова и, следовательно, расщепление их асимптотик может начинаться разве лишь со второго члена. Оказывается, что оно зависит от значения параметра $\varkappa$ и происходит в p-ом члене, причем $p-1 \in \mathbb{N}$ и $(p-1)^{-1}p \leqslant \varkappa$.

Вторая неприятность вызвана точками сгущения спектра результирующей задачи. Каждая такая точка порождает свою серию собственных значений, так, например, при $\varkappa > 2$ имеем

$$\begin{aligned}&\lambda(\varepsilon, k, n)\\ &\quad= \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\{a_0^{(k)} + a_1^{(k)}|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa+1} + a_2^{(k)}(\Lambda_m - c_\omega)|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} + o(|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa})\}\end{aligned}$$

(c_ω — некоторая интегральная характеристика сечения стержня). Таким образом, имеются собственные значения $\lambda_{n(\varepsilon,k,m)}(\varepsilon)$ (с *переменным* номером, *неограниченно возрастающим* при $\varepsilon \to +0$), для которых предел

$$\lim(\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa}\lambda_{n(\varepsilon,k,m)}(\varepsilon)) = a_0^{(k)}, \quad \varepsilon \to +0, \quad k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant 2$$

отличается от предела $a_0^{(1)}$, предсказанного теоремой сходимости. Этот факт указывает на асимптотическую „стратификацию“ спектра и, разумеется, не может быть выявлен посредством стандартного для теории осреднения анализа.

Наконец, упомянем еще один специфический момент. Для доказательства теоремы 5.2, центральной в §5, требуется построить оператор продолжения функций из $H^1(\Omega_\varepsilon)$ на окрестность множества $\overline{G}_\varepsilon$ с сохранением класса. Похожая ситуация возникает для многих других краевых задач в областях, зависящих от малого параметра; при этом операторы продолжения, которые дают возможность перейти на область, не зависящую от малого параметра, должны быть равномерно ограниченными относительно малого параметра в соответствующих соболевских пространствах. Существование таких операторов является или необходимым условием в постановке некоторых задач (по мнению авторов оно является трудно проверяемым и наиболее ограничительным для приложений), или уже проверенным фактом (так обстоят дела с областями, перфорированными периодически). Для густых соединений оператор продолжения с нужными свойствами не существует и поэтому приходится использовать его эрзац. Именно норма построенного в п. 1, §5 оператора бесконечно большая при $\varepsilon \to 0$, однако норма его *сужения* на любую *конечномерную оболочку* собственных функций задачи (1.1) ограничена постоянной, не зависящей от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Устанавливая в п. 3, §5 теоремы о сходимости, мы ограничиваемся рассмотрением случая $\varkappa > 2$, в котором, как уже упоминалось, асимптотические разложения собственных чисел расщепляются во втором члене. Вместе с тем распространение доказательств на другие случаи не встречает каких-либо новых затруднений.

§2. Вспомогательные построения и утверждения

1. Эквивалентная задача. В силу минимаксного принципа для собственных значений при любом $n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c(n)$, не зависящая от ε, и такая, что

$$0 < \lambda_n(\varepsilon) \leqslant c(n)\,\varepsilon\,|\ln \varepsilon\,|^{-\varkappa}.$$

Для проверки этого факта достаточно взять $(n+1)$-мерное пространство $\mathcal{L}_\varepsilon$ в $H^1(\Omega_\varepsilon)$, натянутое на функции $v_0, \ldots, v_n$,

$$v_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ \sin[\pi(2l)^{-1}(2k+1)x_2], & x \in G_\varepsilon, \end{cases}$$

и обнаружить, что

$$\lambda_n(\varepsilon) = \min_{\substack{H_{n+1}\in H^1(\Omega_\varepsilon) \\ \dim H_{n+1}=n+1}} \max_{\substack{v\in H_{n+1} \\ v\neq 0}} \frac{\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 dx + \varepsilon^{-1} \,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \int_{G_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_0} v^2 dx + \varepsilon^{-2} \int_{G_\varepsilon} v^2 dx}$$

$$\leqslant \max_{v\in\mathcal{L}_\varepsilon\setminus\{0\}} \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\Big(\int\limits_{G_\varepsilon} v^2 dx\Big)^{-1} \int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla v|^2 dx = \frac{\pi^2}{4l^2}(2n+1)^2\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}. \tag{2.1}$$

Таким образом, в задаче (1.1) логично сделать замену (1.3) спектрального параметра и переписать (1.1) в виде

$$-\Delta_x u(\varepsilon,x) = \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\widetilde{\lambda}(\varepsilon)u(\varepsilon,x), \qquad x\in\Omega_0, \tag{2.2}$$

$$-\Delta_x u(\varepsilon,x) = \widetilde{\lambda}(\varepsilon)u(\varepsilon,x), \qquad x\in G_\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$u(\varepsilon,x',-0) = u(\varepsilon,x',+0), \qquad x'\in Q_\varepsilon, \tag{2.4}$$

$$\partial_2\, u(\varepsilon,x',-0) = \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\,\partial_2\, u(\varepsilon,x',+0), \quad x'\in Q_\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\partial_\nu\, u(\varepsilon,x) = 0, \qquad x\in\partial\,\Omega_\varepsilon\,. \tag{2.6}$$

Как обычно, $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ — собственное значение задачи (2.2)-(2.6), если существует ненулевая (собственная) функция $u\in H^1(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_0} \nabla u\cdot\nabla\psi dx + \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon}\nabla u\cdot\nabla\psi dx$$

$$= \widetilde{\lambda}(\varepsilon)\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{\Omega_0} u\psi dx + \widetilde{\lambda}(\varepsilon)\,\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon} u\psi dx, \quad \psi\in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{2.7}$$

Введем в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega_\varepsilon)$ новое, но эквивалентное обычному скалярное произведение

$$\langle u,v\rangle_\varepsilon = \int\limits_{\Omega_0}\nabla u\cdot\nabla v dx + \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon}\nabla u\cdot\nabla v dx$$

$$+\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{\Omega_0} uv dx + \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon} uv dx \tag{2.8}$$

и перепишем (2.7) как спектральное уравнение

$$A_\varepsilon u = (\widetilde{\lambda}(\varepsilon) + 1)^{-1} u, \tag{2.9}$$

в котором $A_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{H}_\varepsilon$ — самосопряженный, положительный и компактный оператор, определенный равенством

$$\langle A_\varepsilon u, v \rangle = \varepsilon \,|\ln \varepsilon\,|^{-\varkappa} \int\limits_{\Omega_0} uv dx + \varepsilon^{-1} \,|\ln \varepsilon\,|^{-\varkappa} \int\limits_{G_\varepsilon} uv dx. \tag{2.10}$$

Под $\mathcal{H}_\varepsilon$ понимается пространство $H^1(\Omega_\varepsilon)$, снабженное скалярным произведением (2.8).

Собственные функции $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ задачи (2.2)-(2.6), отвечающие ее собственным значениям

$$0 = \widetilde{\lambda}_0(\varepsilon) < \widetilde{\lambda}_1(\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) \leqslant \cdots \to +\infty, \tag{2.11}$$

подчиним естественным условиям нормировки

$$\varepsilon \,|\ln \varepsilon\,|^{-\varkappa} \int\limits_{\Omega_0} u_n u_m dx + \varepsilon^{-1} \,|\ln \varepsilon\,|^{-\varkappa} \int\limits_{G_\varepsilon} u_n u_m dx = \delta_{n,m}, \tag{2.12}$$

где $n, m = 0, 1, \ldots, a\ \delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $|\,\Omega_0\,| = \operatorname{mes}_3 \Omega_0$ и $|\omega| = \operatorname{mes}_2 \omega$. При $\varepsilon > 0$ существует единственное имеющее нулевое среднее по Ω_0 решение задачи Неймана

$$\begin{aligned} \Delta_x \psi_\varepsilon(x) &= 2h|\,\Omega_0\,|^{-1}|\omega|, && x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu \psi_\varepsilon(x) &= 0, && x \in \partial\,\Omega_0 \setminus Q_\varepsilon; \\ \partial_2\, \psi_\varepsilon(x', 0) &= \varepsilon^{-1}, && x' \in Q_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Оценим это решение. Сначала сформулируем лемму, которая доказывается по той же схеме, что и лемма 3.4 в [19].

Лемма 2.1. *Для любой функции* $u \in H^1(\Omega_0)$ *верна оценка*

$$\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-1}\int\limits_{S_\varepsilon} u^2 ds_x \leqslant c\biggl(\int\limits_{T_{\varepsilon,R}} |\nabla u|^2 x + |\ln\varepsilon\,|^{-2}\int\limits_{T_{\varepsilon,R}} r^{-2}u^2 dx\biggr)$$

с постоянной c, *не зависящей от* u *и* ε. *Здесь* $S_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 : r = \varepsilon\}$, $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $T_{\varepsilon,R} = \{x \in \Omega_0 : \varepsilon < r < R\}$, $R \in (0,1)$.

Лемма 2.2. *Справедливо неравенство*

$$\|\nabla\psi_\varepsilon; L_2(\Omega_0)\| \leqslant c_0|\ln\varepsilon\,|^{1/2}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Так как ψ_ε и 1 ортогональны в $L_2(\Omega_0)$, из интегрального тождества для задачи (2.13) выводим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx \leqslant c_1\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\varepsilon} \psi_\varepsilon^2 dx'\biggr)^{1/2}. \tag{2.15}$$

При помощи формулы Ньютона–Лейбница и неравенства Коши–Буняковского устанавливаем, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\varepsilon} \psi_\varepsilon^2 dx' \leqslant c_2\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon} \psi_\varepsilon^2 ds_x + \int\limits_{T_{0,\varepsilon}} |\,\partial_2\,\psi_\varepsilon|^2 dx\biggr). \tag{2.16}$$

Для оценки первого слагаемого справа применим лемму 2.1 с $R > 1/2$. Благодаря неравенству Харди

$$\int\limits_\delta^1 t^{-1}|\ln t|^{-2}Y(t)^2 dt \leqslant 4\int\limits_\delta^1 t|Y'(t)|^2 dt, \quad Y \in C^1[0,1],\ Y(1) = 0,\ \delta \in [0,1) \tag{2.17}$$

и неравенству Пуанкаре находим, что

$$
\begin{aligned}
|\ln\varepsilon|^{-1}\int\limits_{T_{\varepsilon,R}} r^{-2}\psi_\varepsilon^2\,dx &\leqslant 2|\ln\varepsilon|\int\limits_{T_{\varepsilon,R}} r^{-2}(1+|\ln r|)^{-2}\psi_\varepsilon^2\,dx\\
&\leqslant c_3|\ln\varepsilon|\Bigg(\int\limits_{T_{\varepsilon,1}} r^{-2}|\ln r|^{-2}|\chi_0(r)\psi_\varepsilon(x)|^2dx+\int\limits_{T_{1/2,R}}\psi_\varepsilon^2dx\Bigg)\\
&\leqslant c_4|\ln\varepsilon|\Bigg(\int\limits_{T_{1/2,1}}\psi_\varepsilon^2dx+\int\limits_{T_{\varepsilon,1}}|\nabla_{(x_2,x_3)}\psi_\varepsilon|^2dx+\int\limits_{T_{1/2,R}}\psi_\varepsilon^2dx\Bigg)\\
&\leqslant c_5|\ln\varepsilon|\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x\psi_\varepsilon|^2dx,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

причем $x_0 \in C_0^\infty[0,1)$ — срезающая функция, равная 1 на $[0,1/2]$.

Теперь, собирая неравенства (2.15), (2.16), (2.18) и учитывая лемму 2.1, приходим к искомой оценке (2.14). •

Замечание 2.1. Все возникшие постоянные c_p не зависят от ε. Далее, подобные постоянные обозначаем одним символом c.

Замечание 2.2. Далее, мы неоднократно ссылаемся на вытекающее из (2.13) интегральное тождество

$$
\frac{1}{\varepsilon}f(\varepsilon)\int\limits_{Q_\varepsilon}U\,dx' = 2hf(\varepsilon)\frac{|\omega|}{|\Omega_0|}\int\limits_{\Omega_0}U\,dx+\int\limits_{\Omega_0}\nabla\widetilde{\psi}_\varepsilon\cdot\nabla U\,dx,\quad U\in H^1(\Omega_0)
\tag{2.19}
$$

с различными множителями $f(\varepsilon)$ и оценку для функции $\widetilde{\psi}_\varepsilon = f(\varepsilon)\psi_\varepsilon$

$$
\|\nabla\widetilde{\psi}_\varepsilon; L_2(\Omega_0)\| \leqslant c|f(\varepsilon)||\ln\varepsilon|^{1/2}.
\tag{2.20}
$$

Лемма 2.3. *При* $i=0,1$ *положим*

$$
I_i(\varepsilon,u)=\int\limits_{\Omega_0}|\nabla u|^2dx+\varepsilon^i|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\int\limits_{\Omega_0}u^2dx+\varepsilon^{-1}|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\|u;H^1(G_\varepsilon)\|^2.
$$

Для любой функции $u\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$
I_0(\varepsilon,u)\leqslant cI_1(\varepsilon,u),
\tag{2.21}
$$

в котором постоянная c не зависит от u и малого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют такие последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{u_n\} \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad I_0(\varepsilon_n, u_n) = 1, \quad I_1(\varepsilon_n, u_n) \leqslant n^{-1}. \tag{2.22}$$

Согласно средней части (2.22), последовательность $\{v_n = |\ln \varepsilon_n|^{-\varkappa/2} u_n\}$ ограничена в $H^1(\Omega_0)$. Поэтому найдется подпоследовательность (без ограничения общности сама $\{v_n\}$), сходящаяся слабо в $H^1(\Omega_0)$ и сильно в $L_2(\Omega_0)$ к некоторой функции $v \in H^1(\Omega_0)$. Благодаря последней формуле в (2.22) имеем

$$\|v_n - v_m; H^1(\Omega_0)\|^2 \leqslant \|v_n - v_n; L_2(\Omega_0)\|^2 + |\ln \varepsilon_n|^{-\varkappa}(n^{-1} + m^{-1}),$$

т.е. последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна в $H^1(\Omega_0)$. Теперь из предположений (2.22) выводим, что $\nabla v = 0$ в Ω_0 и $\|v; L_2(\Omega_0)\| = 1$, т.е.

$$v_n \to v = |\Omega_0|^{-1/2} \quad \text{в } H^1(\Omega_0). \tag{2.23}$$

С другой стороны, следовые теоремы вместе с неравенством из (2.22) показывают, что

$$\varepsilon_n^{-1} |\ln \varepsilon_n|^{\varkappa/2} \left| \int_{Q_{\varepsilon_n}} u_n dx' \right| \leqslant c\varepsilon_n^{-1/2} |\ln \varepsilon_n|^{-\varkappa/2} \|u_n; H^1(G_{\varepsilon_n})\| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{2.24}$$

Обратимся к замечанию 2.2 с $f(\varepsilon) = |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2}$. Положим $U = u_n$ в (2.19) и воспользуемся оценками (2.20) и (2.24). В результате приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_0} v_n dx \right| &= |\ln \varepsilon_n|^{-\varkappa/2} \left| \int_{\Omega_0} u_n dx \right| \\ &\leqslant c \left\{ \varepsilon_n^{-1} |\ln \varepsilon_n|^{-\varkappa/2} \left| \int_{Q_{\varepsilon_n}} u_n dx' \right| + \left| \int_{\Omega_0} \nabla \widetilde{\psi}_\varepsilon \cdot \nabla u_n dx \right| \right\} \\ &\leqslant c(n^{-1/2} + \|\widetilde{\psi}_\varepsilon; L_2(\Omega_0)\| \cdot \|\nabla u_n; L_2(\Omega_0)\|) \leqslant Cn^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Искомое противоречие (формулы (2.23) и (2.25)) обнаружено. •

Замечание 2.3. В силу (2.12) и (2.21) при каждом $n \in \mathbb{N}_0$

$$\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\|u_n; L_2(\Omega_0)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда и из условий нормировки (2.12) вытекает, что главный член асимптотики сужения на G_ε собственной функции $u_n(\varepsilon, x)$ разумно искать в виде $|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}v(x)$, $x \in G_\varepsilon$.

§3. Формальная асимптотика и результирующая спектральная задача

1. Предельное уравнение на прямоугольнике $G_0 = (-h, h) \times (0, l)$. Фиксируем номер n собственного значения $\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)$ и собственной функции u_n, но далее n не пишем. В согласии с замечанием 2.3 предлагаем следующие асимптотические представления:

$$\widetilde{\lambda}(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_k; \tag{3.1}$$

$$u(\varepsilon, x) \sim |\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^+\left(x_1, x_2, \frac{x_1}{\varepsilon} - j, \frac{x_3}{\varepsilon}\right), \quad x \in G_j(\varepsilon), \quad j = 0, \pm1, \ldots, \pm N. \tag{3.2}$$

Считая функции v_k^+ гладкими, разложим их в ряды Тейлора по первому аргументу в точке $x_1 = j\varepsilon$ и перейдем к „быстрым" переменным $\xi_1 = \varepsilon^{-1}x_1$, $\xi_3 = \varepsilon^{-1}x_3$. Представление (3.2) принимает вид

$$u(\varepsilon, x) \sim |\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k^j(x_2, \xi_1 - j, \xi_3), \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} &V_0^j(x_2, \xi_1 - j, \xi_3) \\ &\quad = v_0^+(\varepsilon j, x_2, \xi_1 - j, \xi_3), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &V_k^j(x_2, \xi_1 - j, \xi_3) \\ &\quad = v_k^+(\varepsilon j, x_2, \xi_1 - j, \xi_3) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}(\xi_1 - j)^m \frac{\partial^m v_{k-m}^+}{\partial x_1^m}(\varepsilon j, x_2, \xi_1 - j, \xi_3). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставим ряды (3.1) и (3.3) в уравнение (2.3) и в краевое условие (2.6) на боковой поверхности $S_j(\varepsilon)$ цилиндра $G_j(\varepsilon)$. Учитывая представление $\Delta_x = \varepsilon^{-2}\,\Delta_{\xi'} + \partial^2\,/\,\partial x_2^2$ оператора Лапласа в переменных $\xi' = (\xi_1, \xi_3)$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим, что при $k = 0, 1$

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi'} V_k^j &= 0 \quad \text{в } \omega(j) = \{\xi : (\xi_1 - j, \xi_3) \in \omega\},\\ \partial_{\nu(\xi')} V_k^j &= 0 \quad \text{на } \partial\omega(j),\end{aligned}$$

где $\partial_{\nu(\xi')}$ — производная вдоль нормали. Следовательно, V_0^j и V_1^j не зависят от ξ_1, ξ_3; положим $V_1^j = 0$.

При $k = 2$ получаем такую задачу:

$$\begin{aligned}-\Delta_{\xi'} V_j^2 &= \mu_0 V_0^j(x_2) + \partial_2^2\, V_0^j(x_2) \quad \text{в } \omega(j),\\ \partial_{\nu(\xi')}\, V_2^j &= 0 \quad \text{на } \partial\omega(j);\end{aligned}$$

здесь $\partial_2 = \partial\,/\,\partial x_2$. Условием ее разрешимости служит равенство

$$-|\omega|\,\partial_2^2\, V_0^j(x_2) = \mu_0|\omega| V_0^j(x_2), \quad x_2 \in (0, l),$$

которое при учете (3.4) переписывается в виде

$$-|\omega|\,\partial_2^2\, v_0^+(x_1, x_2) = \mu_0|\omega| v_0^+(x_1, x_2), \quad x_2 \in (0, l), \ \ x_1 = \varepsilon j. \tag{3.6}$$

Поскольку ищется гладкая функция v_0^+ и точки εj, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$ образуют ε-сеть на интервале $I_h = (-h, h)$, уравнение (3.6), заданное первоначально на $2N + 1$ отрезках, распространяется на весь прямоугольник G_0:

$$-|\omega|\,\partial_2^2\, v_0^+(x_1, x_2) = \mu_0|\omega| v_0^+(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G_0. \tag{3.7}$$

Ввиду условий Неймана (2.6) на внешних основаниях цилиндров $G_0(\varepsilon)$, $G_{\pm 1}(\varepsilon), \ldots, G_{\pm N}(\varepsilon)$ дополняем (3.7) условием

$$\partial_2\, v_0^+(x_1, l) = 0, \quad x_1 \in I_h. \tag{3.8}$$

Решая (3.7) и (3.8), находим, что

$$u(\varepsilon, x) \sim |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} v_0^+(x_1, x_2) = |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} B(x_1)\cos[\mu_0^{1/2}(l - x_2)]. \tag{3.9}$$

2. Пограничный слой. Фиксируем номер j цилиндра $G_j(\varepsilon)$ и введем трехмерные „быстрые“ переменные $\xi = \varepsilon^{-1} x$. После перехода к $\varepsilon = 0$ в координатах ξ множество $G_j(\varepsilon)$ трансформируется в полубесконечный цилиндр $\omega(j) \times (0, +\infty)$, а область Ω_0 — в полупространство $\{\xi : \xi_2 < 0\}$. Принимая во внимание расположение цилиндров $G_j(\varepsilon)$ (см. п. 3, §1), функции типа пограничного слоя следует брать 1-периодическими по переменной ξ_1. Поэтому базовыми областями, на которых ставятся задачи для пограничного слоя, назначим полуцилиндр и полуслой

$$\Pi_+ = \{\xi : (\xi_1, \xi_3) \in \omega, \xi_2 > 0\}, \quad \Pi_- = \{\xi : |\xi_1| < 1/2, \xi_2 < 0\}.$$

Первая из таких задач имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi Z(\xi) &= F(\xi), \;\; \xi \in \Pi_-; \\ Z(\xi', 0) &= 0, \;\; \xi' \in \omega; \\ \partial_{\xi_2} Z(\xi', 0) &= 0, \;\; \xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \; \xi_1 \in (-1/2, 1/2); \\ Z(-1/2, \xi^0) &= Z(+1/2, \xi^0), \\ \partial_{\xi_1} Z(-1/2, \xi^0) &= \partial_{\xi_1} Z(+1/2, \xi^0), \quad \xi^0 = (\xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^2, \;\; \xi_2 < 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Сформулируем утверждение, проверка которого повторяет доказательства теорем 1 [50] и 3.2 [12]. Под „энергетическим“ пространством $\mathcal{H}_-$ понимаем замыкание $C_0^\infty(\overline{\Pi}_- \setminus \omega)$ по норме

$$\|u; \mathcal{H}_-\| = (\|\nabla_\xi u; L_2(\Pi_-)\|^2 + \|R^{-1} u; L_2(\Pi_-)\|^2)^{1/2},$$

где R — положительная в $\overline{\Pi}_-$ весовая функция, равная $\rho \ln \rho$ при $\rho = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} > 2$.

Лемма 3.1. *Если $RF \in L_2(\Pi_-)$, то существует единственное обобщенное решение $Z \in \mathcal{H}_-$ задачи* (3.10).

Следствие 3.1. *Благодаря единственности решение Z наследует от F свойства четности или нечетности относительно ξ_1.*

Следствие 3.2. *Имеется решение однородной задачи* (3.10), *растущее логарифмически при* $\rho \to \infty$ *и четное по* ξ_1.

Доказательство. Названное решение ищется в виде

$$W^-(\xi) = -(2\pi)^{-1}(1-\chi_0(\rho))\ln\rho + Z_0(\xi), \tag{3.11}$$

где χ_0 — та же срезка, что и в лемме 2.2, а $Z_0 \in \mathcal{H}_-$ — решение задачи (3.10) с финитной, четной по ξ_1 правой частью

$$F_0(\xi) = (2\pi)^{-1}(\chi_0''(\rho)\ln\rho + \rho^{-1}\chi_0'(\rho)\ln\rho + 2\rho^{-1}\chi_0'(\rho)).$$

Подчеркнем, что $(1-\chi_0)\ln\rho \notin \mathcal{H}_-$, т.е. $W^- \neq 0$. •

Асимптотические свойства решений задачи (3.10) устанавливаются аналогично теореме 3.4 [12].

Лемма 3.2. 1) *Пусть* $F \in C_0^\infty(\overline{\Pi}_-)$. *Тогда для решения* $Z \in \mathcal{H}_-$ *задачи* (3.10) *справедливо асимптотическое представление*

$$Z(\xi) = a_0 + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty. \tag{3.12}$$

2) *Решение* (3.11) *допускает разложение*

$$W^-(\xi) = -(2\pi)^{-1}\ln\rho + c_\omega + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty. \tag{3.13}$$

3) *Если функция* $\xi_1 \mapsto F(\xi)$ *нечетна, то решение* $Z \in \mathcal{H}_0$ *задачи* (3.10) *экспоненциально затухает на бесконечности.*

Замечание 3.1. Формула (3.13) подобна формуле

$$E(\xi^0) = -(2\pi)^{-1}\ln[\rho/c(\Xi)] + O(\rho^{-1}), \quad \rho \to \infty,$$

для решения однородной внешней задачи Дирихле в $\mathbb{R}^2 \setminus \Xi$. Постоянная $c(\Xi)$ называется логарифмической емкостью компакта Ξ [57, 58]. Как и в [50], величину $\exp(2\pi c_\omega)$, связанную с (3.13), именуем погонной логарифмической емкостью диска $\omega \subset \mathbb{R}^3$ (при этом W^- следует продолжить по четности на полуслой $\{\xi : |\xi_1| < 1/2, \xi_2 > 0\}$).

Вторая задача, связанная с пограничным слоем, такова:

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi W^+(\xi) = 0, && \xi \in \Pi_+;\\ &\partial_{\nu(\xi)} W^+(\xi) = 0, && \xi \in \partial\omega \times \mathbb{R}_+;\\ &\partial_{\xi_2} W^+(\xi', 0) = \partial_{\xi_2} W^-(\xi', 0), && \xi' \in \omega. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Лемма 3.3. *Задача* (3.14) *имеет единственное решение* $W^+ \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi}_+)$, *подчиненное соотношению*

$$W^+(\xi) = (2|\omega|)^{-1}\xi_2 + O(\exp(-\delta_+\xi_2)), \quad \xi_2 \to +\infty, \tag{3.15}$$

где $\delta_+ = \Lambda_+^{1/2}$ *и* Λ_+ *— первое положительное собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в* ω. *Кроме того,*

$$\int_\omega W^+(\xi',0)d\xi' = 0; \quad W^+(\xi_1,\xi^0) = W^+(-\xi_1,\xi^0), \ \xi \in \Pi_+. \tag{3.16}$$

Доказательство. Сформулированные утверждения являются конкретизацией общих результатов [41; гл. 5], однако мы проверим их напрямую. Классический метод Фурье [59, гл. 6] обеспечивает существование решения и представления (3.15) с множителем c_+ при ξ_2,

$$c_+ = |\omega|^{-1}\int_\omega \partial_{\xi_2} W^-(\xi',0)d\xi'. \tag{3.17}$$

Отсутствие в (3.15) постоянного слагаемого приводит к первой формуле в (3.16), а вторая формула вытекает из четности функции $\xi_1 \mapsto W^-(\xi)$ и симметрии области ω (см. п. 2, §1). Наконец, множитель (3.17) вычисляем при помощи формулы Грина в секторе слоя $\{\xi \in \Pi_- : 0 < \rho < R\}$:

$$\begin{aligned} c_+|\omega| &= -\lim_{R\to\infty} R \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \partial_\rho W^-(\xi_1, R\cos\varphi, R\sin\varphi)d\varphi\, d\xi_1 \\ &= \lim_{R\to\infty} R \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(-\frac{1}{2\pi R} + O\Big(\frac{1}{R^2}\Big)\right)d\varphi = \frac{1}{2}. \quad \bullet \end{aligned}$$

3. Сингулярное решение задачи Неймана в Ω_0. Асимптотический анзац для сужения на Ω_0 собственной функции $u(\varepsilon,\cdot)$ задачи (2.2)–(2.6) предлагаем таким:

$$u(\varepsilon,x)\sim|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}v_0^-(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k^-(x;\ln\varepsilon),\quad x\in\Omega_0. \tag{3.18}$$

Подставим ряды (3.1), (3.18) в (2.2), (2.6) и соберем коэффициенты при степенях ε — так появляется задача для главного члена v_0^- асимптотики (3.18):

$$\begin{aligned}&\Delta_x v_0^-(x)=0, \quad x\in\Omega_0;\\ &\partial_\nu v_0^-(x)=0, \quad x\in\partial\Omega_0\setminus I_h.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Используемый метод сращиваемых разложений подразумевает однотипные представления решений задач (3.19) и (3.10) соответственно около отрезка $I_h=\{x:|x_1|<h, x_2=x_3=0\}$ и на бесконечности. Из-за присутствия логарифмической составляющей в решении (3.11) придется иметь дело с решениями задачи (3.19), обладающими особенностями на I_h. Основные принципы построения таких решений сформулированы в [48–50]; здесь мы придерживаемся подхода, предложенного в [21]. Именно продолжим все данные задачи (3.19) по четности в две стороны за плоскости $\{x:x_1=\pm h\}$ и заменим условия Неймана на „торцах" $\Xi_\pm=\{x\in\partial\Omega_0:x_1=\pm h\}$ области Ω_0 условиями $4h$-периодичности решения $\mathbf{v}_0$ по переменной x_1,

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}_0(-2h,x^0)=\mathbf{v}_0(2h,x^0),\\ &\partial_1\mathbf{v}_0(-2h,x^0)=\partial_1\mathbf{v}_0(2h,x^0),\\ &\qquad x^0=(x_2,x_3)\in\Xi_0=\{x\in\Omega_0:x_1=0\}:\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ясно, что продолжения (они набираются полужирным шрифтом) сохраняют изначальную гладкость. Кроме того, функция $\mathbf{v}_0$, подчиненная (3.20) и четная относительно названных плоскостей, удовлетворяет однородным условиям Неймана на $\Xi_\pm$. Область Ω_0, наращенную указанным способом, обозначаем Ω_0^*. Итак, функция $\mathbf{v}_0$ должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}&\Delta_x\mathbf{v}_0=0 \quad \text{в } \Omega_0^*,\\ &\partial_\nu\mathbf{v}_0=0 \quad \text{на } \Gamma_0^*=\{x\in\partial\Omega_0^*:|x_1|<2h\}\setminus I_h,\end{aligned}$$

условиям периодичности (3.20) и иметь логарифмические особенности на I_h. Такую функцию можно представить в виде

$$\mathbf{v}_0(x) = A + \int_{I_{2h}} \mathbf{d}(s)\mathbf{G}(x;s)ds. \tag{3.21}$$

При этом A — постоянная, $\mathbf{d}$ - гладкая плотность с нулевым средним по I_h, а $\mathbf{G}$ — обобщенная функция Грина задачи в Ω_0^*, т.е. $4h$-периодическое по x_1 решение задачи

$$\begin{aligned}
\Delta_x \mathbf{G}(x;s) &= (2|\,\Omega_0\,|)^{-1}, && x \in \Omega_0^*,\\
\partial_\nu\, \mathbf{G}(x;s) &= 0, && x \in \Gamma_0^*;\\
(\mathbf{G}(\cdot;s),1)_{\Omega_0^*} &= 0, && s \in I_{2h};\\
\mathbf{G}(x;s) &= (4\pi|x-s|)^{-1} + O(|\ln|x-s||), && x \to s.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Здесь $(\,,\,)_\Xi$ — скалярное произведение в $L_2(\Xi)$, а символ s используется одновременно для точки $(s,0,0) \in I_{2h}$ и ее координаты на отрезке I_{2h}. Нетрудно убедиться в том, что сужение v_0^- функции (3.21) на Ω_0 удовлетворяет (3.19), причем

$$v_0^-(x) = A + \int_{I_h} d(s)\mathbf{G}(x;s)ds + \sum_{\pm} \pm \int_0^{\pm h} d(s)\mathbf{G}(x;\pm 2h - s)ds. \tag{3.23}$$

Пусть g — $4h$-периодическая первообразная функции $I_{2h} \ni x_1 \mapsto \mathbf{G}(x_1,0,0;s)$. Согласно (3.22), она допускает представление

$$g(x_1,s) = \pm(4\pi)^{-1}\ln|x_1 - s| \pm g_\pm^0(x_1,s) \quad \text{при } \pm x_1 > \pm s.$$

Лемма 3.4 (см. лемму 2.1 [19]). *Если* $d \in W_\infty^1(I_h)$, *то*

$$\begin{gathered}
v_0^-(x) = -(2\pi)^{-1} d(x_1)\ln r + (Jd)(x_1) + A + O(r(1+|\ln r|)),\\
r = (x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \to 0.
\end{gathered} \tag{3.24}$$

Здесь J — интегральный оператор, определенный равенством

$$\begin{aligned}(Jd)(x_1) &= \int_{-h}^{h}(d(s)-d(x_1))\mathbf{G}(x_1,0,0;s)ds \\ &+\sum_{\pm}\pm\int_{0}^{\pm h}(d(s)-d(x_1))\mathbf{G}(x_1,0,0;\pm 2h-s)ds \\ &\qquad + d(x_1)\{(2\pi)^{-1}\ln 2-g_{-}^{0}(x_1-0,x_1)-g_{+}^{0}(x_1+0,x_1)\}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Свойства оператора (3.25) изучены в §4 [21]; обсудим их кратко. Пусть $H^s_{\ln}(I_h)$ — пространство сужений на I_h $4h$-периодических функций из пространства Хермандера $H^s_{\ln}(I_{2h})$ [60, гл. 2], порожденного весовой функцией $\mu_s(\xi)=(1+\ln|\xi|+|\ln|\xi||)^s$. Иными словами, норма в $H^s_{\ln}(I_{2h})$ склеивается из норм

$$\|\gamma;H^s_{\ln}(\mathbb{R})\|=\Big(\int_{\mathbb{R}}\mu_s(\xi)^2|\mathcal{F}\gamma(\xi)|^2d\xi\Big)^{1/2},$$

где $\mathcal{F}\gamma$ — преобразование Фурье функции γ. Вложение $H^s_{\ln}(I_{2h})\subset L_2(I_{2h})$ компактно при $s>0$. Ввиду условий периодичности отрезок I_{2h} можно интерпретировать как окружность $\mathbb{S}$ длиной $4h$. Согласно [61], нормой в $H^{1/2}_{\ln}(\mathbb{S})$ может служить выражение

$$\Big(\int_{\mathbb{S}}\int_{\mathbb{S}}|\gamma(s)-\gamma(t)|^2|s-t|^{-1}dsdt+\int_{\mathbb{S}}|\gamma(s)|^2ds\Big)^{1/2}.$$

Таким образом, учитывая формулы (3.22) и $\mathbf{G}(s,0,0;t)=\mathbf{G}(t,0,0;s)$, при большой постоянной $C_h>0$ получаем такую эквивалентную норму в $H^{1/2}_{\ln}(I_h)$:

$$(-(J\gamma,\gamma)_{I_h}+C_h\|\gamma;L_2(I_h)\|^2)^{1/2}. \tag{3.26}$$

Наконец, оператор $J:H^{1/2}_{\ln}(I_h)\to H^{-1/2}_{\ln}(I_h)=H^{1/2}_{\ln}(I_h)^*$ непрерывный, симметрический (как оператор в $L_2(I_h)$ с областью определения $H^{1/2}_{\ln}(I_h)$) и дискретный (при большом $\lambda_0>0$ его резольвента — компактный оператор в $L_2(I_h)$).

4. Результирующая спектральная задача. Применяем метод сращиваемых асимптотических разложений. Для того чтобы согласовать представление (3.24) главного члена $|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}v_0^-$ внешнего разложения (3.18) в Ω_0 с аналогичным членом $w^-(x_1,\xi)$ внутреннего разложения вблизи отрезка I_h внутри Ω_0, положим

$$\begin{aligned} &w^-(x_1,\xi)\\ &\quad = |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}\{d(x_1)W^-(\xi) - d(x_1)[(2\pi)^{-1}\ln\varepsilon + c_\omega] + (Jd)(x_1) + A\}. \end{aligned}$$

В самом деле, если в фигурной скобке заменить $W^-(\xi)$ асимптотическими членами, выделенными в (3.13), и перейти к „медленным" переменным $x = \varepsilon\,\xi$, то возникает асимптотическое выражение для v_0^-, указанное в (3.24).

На объединении Q_ε оснований цилиндров $G_j(\varepsilon)$ справедливы формулы

$$w^-(x_1,\xi)|_{x_2=0} = |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}(-d(x_1)[(2\pi)^{-1}\ln\varepsilon + c_\omega] + (Jd)(x_1) + A), \tag{3.28}$$

$$\partial_2\, w^-(x_1,\xi)|_{x_2=0} = \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}d(x_1)\,\partial_{\xi_2}\,W^-(\xi',0). \tag{3.29}$$

Рассмотрим теперь сами цилиндры G_ε. Первые члены внутреннего разложения собственной функции $u(\varepsilon,\cdot)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} &w^+(x_1,\xi)\\ &\quad = |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}v_0^+(x_1,0)\\ &\qquad + \varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\{W_1^+(\xi)\,\partial_1\,v_0^+(x_1,0) + 2|\omega|W_2^+(\xi)\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

причем v_0^+ определим, согласно (3.9). Как и ранее, подставляя (3.30) и (3.1) в уравнение (2.3) и краевые условия (2.6) на боковых поверхностях $S_j(\varepsilon) \subset \partial\,G_j(\varepsilon)$, приходим к задачам для нахождения 1-периодических по ξ_1 функций W_1^+ и W_2^+. Так, W_1^+ обязана удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi W_1^+(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Pi_+;\\ \partial_{\nu(\xi)}(W_1^+(\xi) + \xi_1) &= 0, \quad \xi \in \partial\,\Pi_+ \setminus \omega, \end{aligned}$$

и поэтому $W_1^+(\xi) = -\xi_1 + [\xi_1 + 1/2]$ ($[t]$ — целая часть числа t). Кроме того, W_1^+ имеет нулевое среднее по любому сечению $\{\xi \in \Pi_+ : \xi_3 = \xi_3^0\}$ цилиндра.

Функция W_2^+ должна быть гармонической в Π_+ и обладать нулевой нормальной производной на $\partial\Pi_+ \setminus \overline{\omega}$. Если в качестве W_2^+ взять решение W^+ задачи (3.14), то дополнительно будут соблюдены условия сращивания внутреннего (3.30) и внешнего (3.3) разложений на цилиндрах $G_j(\varepsilon)$. Действительно, в силу (3.15)

$$\begin{aligned} &w^+(\varepsilon j,\xi)\\ &\quad\sim |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} v_0^+(\varepsilon j,0)\\ &\qquad + \varepsilon|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\{(-\xi_1+j)\,\partial_1 v_0^+(\varepsilon j,0)+\xi_2\,\partial_2 v_0^+(\varepsilon j,0)\}+\dots \quad \text{при } \xi_2\to\infty, \end{aligned}$$

и в соответствии с (3.3)–(3.5) асимптотика при $x_2 \to +0$ первых членов внешнего разложения (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} &|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} v_0^+(\varepsilon j,0)+|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\,\partial_2 v_0^+(\varepsilon j,0)x_2+\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} v_1^+(\varepsilon j,0,\xi_1-j,\xi_3)+\dots\\ &\quad = |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} v_0^+(\varepsilon j,0)+\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\{(-\xi_1+j)\,\partial_1 v_0^+(\varepsilon j,0)+\xi_2\,\partial_2 v_0^+(\varepsilon j,0)\}+\dots \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим условия сопряжения (2.4) и (2.5). Подставим в них внутренние разложения (3.27) и (3.30). Сравнивая главные члены, при учете (3.9) получаем

$$\begin{gathered} |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} B(x_1)\cos\sqrt{\mu_0}\,l = w^-(x_1,\xi)|_{x_2=0},\\ 2|\omega|\,\partial_{\xi_2} W^+(\xi_1,0,\xi_3)B(x_1)\sqrt{\mu_0}\sin\sqrt{\mu_0}\,l = d(x_1)\,\partial_{\xi_2} W^-(\xi',0), \end{gathered}$$

откуда, опираясь на формулы (3.14) и (3.28), выводим

$$\begin{aligned} B(x_1)&=(2|\omega|\sqrt{\mu_0}\sin\sqrt{\mu_0}\,l)^{-1}d(x_1),\\ (Jd)(x_1)&=\{(2|\omega|\sqrt{\mu_0})^{-1}\operatorname{ctg}(\sqrt{\mu_0}\,l)|\ln\varepsilon|^{\varkappa}-(2\pi)^{-1}|\ln\varepsilon|+c_\omega\}d(x_1)-A. \end{aligned}\tag{3.31}$$

Последнее равенство распространим на весь интервал I_h и, положив

$$\Lambda=(2|\omega|\sqrt{\mu_0})^{-1}\operatorname{ctg}(\sqrt{\mu_0}\,l)|\ln\varepsilon|^{\varkappa}-(2\pi)^{-1}|\ln\varepsilon|+c_\omega,\tag{3.32}$$

приходим к уравнению, которое интерпретируем как спектральное,

$$(Jd)(x_1)=\Lambda d(x_1)-A,\quad x_1\in I_h.\tag{3.33}$$

Так как по условию $(d,1)_{I_h}=0$ (см. (3.21)), постоянная A в (3.33) вычисляется по формуле

$$A=-(2h)^{-1}(Jd,1)_{I_h}=-(2h)^{-1}(d,J1)_{I_h}=-(2h)^{-1}(d,j_0)_{I_h}, \tag{3.34}$$

где $j_0(x_1)$ — выражение из фигурных скобок в (3.25).

На подпространстве $H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp=\{\gamma\in H^{1/2}_{\ln}(I_h):(\gamma,1)_{I_h}=0\}$ определим оператор $J_\perp$ равенством

$$(J_\perp\gamma)(x_1)=(J\gamma)(x_1)-(2h)^{-1}(J\gamma,1)_{I_h},\quad x_1\in I_h. \tag{3.35}$$

Согласно (3.26), нормой γ в $H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$ может служить величина

$$(-(J_\perp\gamma,\gamma)_{I_h}+C_h\|\gamma;L_2(I_h)\|^2)^{1/2}=(-(J\gamma,\gamma)_{I_h}+C_h\|\gamma;L_2(I_h)\|^2)^{1/2}.$$

Для любых $\gamma,\varphi\in H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$ имеем

$$(J_\perp\gamma,\varphi)_{I_h}=(J\gamma,\varphi)_{I_h}=(\gamma,J\varphi)_{I_h}=(\gamma,J_\perp\varphi)_{I_h}.$$

Упомянутые свойства пространств $H^s_{\ln}(I_h)$ показывают, что цепочка

$$H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp\subset L_2(I_h)_\perp\subset H^{-1/2}_{\ln}(I_h)_\perp\equiv(H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp)^* \tag{3.36}$$

является гильбертовым компактным оснащением пространства $L_2(I_h)_\perp=\{\varphi\in L_2(I_h):(\varphi,1)_{I_h}=0\}$ пространствами $H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$ и $H^{-1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$. Оператор $J_\perp$ рассматриваем как оператор, действующий между крайними элементами цепочки (3.36). Уравнение (3.33), переписанное в новых обозначениях

$$J_\perp d=\Lambda d, \tag{3.37}$$

называем результирующей спектральной задачей для исходной задачи (2.2)–(2.6). При этом (3.37) $J_\perp$ — неограниченный оператор в $L_2(I_h)_\perp$ с областью определения $H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$.

Факты, перечисленные в предыдущем и данном разделах, и результаты из [48, 21] дают очередное утверждение.

Предложение 3.1. *Оператор $J_\perp:H^{1/2}_{\ln}(I_h)_\perp\to H^{-1/2}_{\ln}(I_h)_\perp$ непрерывный, полуограниченный и симметрический. Собственные числа этого оператора образуют последовательность*

$$\Lambda_1\geqslant\Lambda_2\geqslant\dots\geqslant\Lambda_p\geqslant\dots\to-\infty,\quad p\to+\infty, \tag{3.38}$$

причем $\Lambda_p=-(2\pi)^{-1}\ln p+O(1)$. Соответствующие собственные функции $d_1,d_2,\dots,d_p,\dots$ принадлежат $C^\infty(\overline{I_h})$, и можно считать, что $(d_p,d_q)_{I_h}=\delta_{p,q}$.

§4. Построение глобального асимптотического приближения и оценка его невязки в исходной задаче

1. Конструкция асимптотического приближения. Пусть Λ_n — число из последовательности (3.38), а d_n — соответствующая собственная функция результирующей задачи (3.37). Через $\mu_k^{(n)} \in (\pi^2(k-1)^2 l^{-2},\ \pi^2 k^2 l^{-2}) \equiv \Upsilon_k$ обозначим корни μ трансцендентного уравнения (3.32) с левой частью Λ_n; здесь $n, k \in \mathbb{N}$. Ясно, что на каждом интервале Υ_k эти корни формируют неубывающую последовательность $\{\mu_k^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\pi^2(k-1)^2 l^{-2} < \mu_k^{(1)} \leqslant \mu_k^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \mu_k^{(n)} \leqslant \cdots \to \pi^2 k^2 l^{-2}.$$

Функцию B и постоянную A определим при помощи формул (3.31) и (3.34), причем вместо μ_0, d возьмем одну из пар $\mu_k^{(n)}$, d_n и фиксируем индексы n и k для дальнейшего.

Учитывая (3.24) и (3.27), (3.11), а также (3.37), (3.34), (3.32), видим, что совпадают главные члены следующих разложений:

$$|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2} v_0^-(x) = \{[-(2\pi)^{-1}\ln r + \Lambda_n] d_n(x_1) + \widetilde{v}_0^-(x)\} |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}, \tag{4.1}$$

$$w^-(x_1,\xi) = |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}\{[-(2\pi)^{-1}\ln(\varepsilon\rho) + \Lambda_n] d_n(x_1) + \widetilde{w}^-(x_1,\xi)\}, \tag{4.2}$$

$$\widetilde{v}_0^-(x) = O(r(1+|\ln r|)),$$

$$\widetilde{w}^-(x_1,\xi) = O(\rho^{-1}).$$

Глобальное асимптотическое приближение, принадлежащее $H^1(\Omega_\varepsilon)$, „склеивается“ из начальных членов внешних (3.2), (3.18) и внутренних (3.30), (3.27) разложений при помощи срезки $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\chi(t) = 1$ при $|t| < R_0 = 4^{-1}\min\{l, b, \min\varphi\}$ (см. п. 2, §1) и $\chi(t) = 0$ при $|t| > 2R_0$. Именно, величины (4.1) и (4.2) умножаются на срезки $1-\chi(\varepsilon^{-1} r)$ и $\chi(r)$ соответственно, а затем из их суммы вычитается общий фрагмент $\chi(r)(1-\chi(\varepsilon^{-1} -r))[-(2\pi)^{-1}\ln r+\Lambda_n]d(x_1)$ (члены, подвергшиеся сращиванию). При учете некоторых дополнительных поправок положим

$$\begin{aligned} U^-(\varepsilon, x) &= |\ln\varepsilon|^{-\frac{\varkappa}{2}}\{(1-\chi(\varepsilon^{-1} r))v_0^-(x) + \chi(r)|\ln\varepsilon|^{\frac{\varkappa}{2}} w^-(x_1, \varepsilon^{-1} x) \\ &\qquad + \varepsilon|\ln\varepsilon|^{\varkappa}\chi(r) \\ &\qquad\quad \times (Z_1^-(\varepsilon^{-1} x)\,\partial_1 v_0^+(x_1,0) \\ &\qquad\qquad + 2|\omega| Z_2^-(\varepsilon^{-1} x)\,\partial_2 v_0^+(x_1,0)) \\ &\qquad - \chi(r)(1-\chi(\varepsilon^{-1} r))[-(2\pi)^{-1}\ln r + \Lambda_n] d_n(x_1)\}, \quad x \in \Omega_0; \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
U^{+}(\varepsilon, x) \\
&= |\ln\varepsilon|^{\frac{\varkappa}{2}} v_0^{+}(x_1, x_2) \\
&\quad + \varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{\frac{\varkappa}{2}} \\
&\qquad \times \{W_1^{+}(\varepsilon^{-1} x_1)\,\partial_1 v_0^{+}(x_1, x_2) \\
&\qquad\quad + \chi(x_2)(2|\omega| W_2^{+}(\varepsilon^{-1} x) - \varepsilon^{-1} x_2)\,\partial_2 v_0^{+}(x_1, 0)\}, \\
&\qquad\qquad x \in G_{\varepsilon}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Поясним написанное. В соответствии с (3.9) и (3.31)

$$v_0^{+}(x_1, x_2) = \frac{d_n(x_1)\cos\left(\sqrt{\mu_k^{(n)}}(l - x_2)\right)}{2|\omega|\sqrt{\mu_k^{(n)}}\sin\sqrt{\mu_k^{(n)}}\,l}.$$

Функции $W_2^{+} = W^{+}$ и W_1^{+} уже обсуждались в п. 2 и п. 4, §3, а функции Z_i^{+}, введенные для снятия невязки в первом условии сопряжения (2.4) являются 1-периодическими решениями следующих задач:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\xi} Z_i^{-}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Pi_{-}; \\
&Z_i^{-}(\xi', 0) = W_i^{+}(\xi', 0), \quad \xi' \in \omega; \\
&\partial_{\xi_2} Z_i^{-}(\xi', 0) = 0, \quad \xi' \notin \omega, \quad |\xi_1| < 1/2; \qquad (4.5) \\
&Z_i^{-}(-1/2, \xi^0) = Z_i^{-}(1/2, \xi^0), \\
&\partial_{\xi_2} Z_i^{-}(-1/2, \xi^0) = \partial_{\xi_2} Z_i^{-}(1/2, \xi^0), \quad \xi_2 < 0.
\end{aligned}$$

Продолжая финитно функции W_i^{+} в Π_{-} с сохранением четности/нечетности, приводим (4.5) к виду (3.10). Вспоминая леммы 3.1, 3.2 и следствие 3.1, заключаем, что существуют решения Z_i^{-} с такими свойствами: функция Z_1^{-}, нечетная по ξ_1, экспоненциально затухает при $|\xi^0| \to \infty$, а функция Z_2^{-}, четная относительно переменной ξ_1, имеет асимптотику (3.12).

2. Невязки на цилиндрах $G_j(\varepsilon)$. Для краткости не будем писать (фиксированные) индексы n и k. В задаче (2.2)–(2.6) на G_ε заменим $u(\varepsilon,\cdot)$ и $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ выражением (4.4) и корнем $\mu_k^{(n)}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\Delta_x U^+(x)+\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\mu U^+(x)\\
&\quad=\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}\\
&\qquad\times\{\varepsilon W_1^+(\xi_1)\,\partial_1\,\partial_2\,\partial_2\,v_0^+(x_1,x_2)\\
&\qquad\quad+\varepsilon\,\partial_1[W_1^+(\xi_1)\,\partial_1\,\partial_1\,v_0^+(x_1,x_2)\\
&\qquad\qquad\quad+\chi(x_2)(2|\omega|W_2^+(\xi)-\xi_2)\,\partial_1\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)]\\
&\qquad\quad+2\chi(x_2)|\omega|\,\partial_{\xi_1}W_2^+(\xi)\,\partial_1\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)\\
&\qquad\quad+2\chi'(x_2)(2|\omega|\,\partial_{\xi_2}W_2^+(\xi)-1)\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)\\
&\qquad\quad+\chi''(x_2)\,\varepsilon(2|\omega|W_2^+(\xi)-\xi_2)\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)\\
&\qquad\quad+\varepsilon\,\mu[W_1^+(\xi_1)\,\partial_1\,v_0^+(x_1,x_2)\\
&\qquad\qquad\quad+\chi(x_2)(2|\omega|W_2^+(\xi)-\xi_2)\,\partial_2\,v_0^+(x_1,0)]\}\\
&\quad\equiv\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}\{\varepsilon F_1^+ +\varepsilon\,\partial_1 F_2^+ +F_3^+ +F_4^+ +\varepsilon F_5^+ +\varepsilon\mu F_6^+\},\quad x\in G_\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

В краевых условиях (2.6) появляются такие невязки:

$$
\begin{aligned}
&\partial_2\,U^+(x_1,l,x_3)=0,\quad x'\in Q_\varepsilon;\\
&\partial_\nu\,U^+(x)=\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}F_2^+(x)\nu_1(\varepsilon^{-1}x),\\
&\qquad\qquad x\in S_j(\varepsilon),\ j=-N,\dots,N.
\end{aligned}
$$

Наконец, на припаянных торцах стержней $G_j(\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
&U^+(x_1,0,x_3)\\
&\quad=|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}(v_0^+(x_1,0)+\varepsilon F_6^+(x_1,0,x_3)),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$\partial_2 U^+(x_1, 0, x_3)$$
$$= |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}(\varepsilon W_1^+(\xi_1)\,\partial_1\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0) + 2|\omega|\,\partial_{\xi_2} W_2^+(\xi', 0)\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)). \tag{4.8}$$

Умножим равенство (4.6) на пробную функцию $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ и проинтегрируем по частям в G_ε при учете краевых условий. Получаем

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon}(\nabla U^+\cdot\nabla\psi - \mu U^+\psi)dx\\
&-\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}2|\omega|\int\limits_{Q_\varepsilon}\partial_{\xi_2} W_2^+\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\psi dx'\\
&-|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}\int\limits_{Q_\varepsilon} W_1^+\,\partial_1\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\psi dx'\\
&=\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}\\
&\times\left(\int\limits_{G_\varepsilon}(\varepsilon F_1^+ + F_3^+ + F_4^+ + \varepsilon F_5^+ + \varepsilon\,\mu F_6^+)\psi dx - \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon} F_2^+\,\partial_1\,\psi dx\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

В правой части (4.9) присутствуют слагаемые четырех типов

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_\varepsilon} W_1^+(\xi_1)\nabla_x^\alpha v_0^+\nabla_x^\beta\psi dx, && |\alpha|\leqslant 3,\ \ |\beta|\leqslant 1;\\
&\int\limits_{G_\varepsilon}(2|\omega| W_2^+(\xi) - \xi_2)\nabla_x^\alpha v_0^+\nabla_x^\beta\psi dx, && |\alpha|\leqslant 2,\ \ |\beta|\leqslant 1;\\
&\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_{\xi_1} W_2^+(\xi)\,\partial_1\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\psi dx;\\
&\int\limits_{G_\varepsilon}(2|\omega|\,\partial_{\xi_2} W_2^+(\xi) - 1)\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\psi dx
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(α и β — мультииндексы). Важным является то, что в подынтегральных выражениях множители $W(\xi)$, записанные в быстрых переменных $\xi = \varepsilon^{-1} x$, удовлетворяют условию

$$\int\limits_\omega W(\xi)d\xi' = 0, \quad \xi_2 \in [0, +\infty), \tag{4.11}$$

т.е. имеют нулевые средние по любому поперечному сечению цилиндра. Кроме того, последние три выражения экспоненциально затухают при $\xi_2 \to +\infty$. Сказанное вытекает из леммы 3.3 (см. (3.15), (3.16)) и формулы $W_1^+(\xi_1) = -\xi_1 + [\xi_1 + 1/2]$ (см. комментарий к (3.30)). Для оценивания интегралов (4.10) понадобится

Лемма 4.1. *Пусть* $U \in C^\infty[-h,h]$, $V \in C^\infty[0,l]$, $W \in L_2(\Pi_+)$ *и выполнено условие* (4.11). *Тогда для* $\psi \in H^1(G_\varepsilon)$ *имеем*

$$\Big|\int\limits_{G_\varepsilon} W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)U(x_1)V(x_2)\psi(x)dx\Big| \leqslant c_{U,V}\,\varepsilon^2\,\|\psi; H^1(G_\varepsilon)\|.$$

Доказательство. При $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$ положим

$$\widehat{\psi}_j(x) = \psi(x) - |\omega_j(\varepsilon)|^{-1} \int\limits_{\omega_j(\varepsilon)} \psi(x)dx', \tag{4.12}$$

где $\omega_j(\varepsilon) = \{x' : \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_3) \in \omega\}$. Функция (4.12) обладает нулевым средним по $\omega_j(\varepsilon)$. В силу неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_{\omega_j(\varepsilon)} |\widehat{\psi}_j(x)|^2 dx' \leqslant c\,\varepsilon^2 \int\limits_{\omega_j(\varepsilon)} |\nabla_{x'}\psi(x)|^2 dx'. \tag{4.13}$$

Теперь заканчиваем доказательство, используя условия леммы, формулу Тейлора и неравенство (4.13):

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{G_\varepsilon} W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)U(x_1)V(x_2)\psi(x)dx\Big| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=-N}^{N}\int\limits_{G_j(\varepsilon)} W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)U(\varepsilon j)V(x_2)\widehat{\psi}_j(x)dx \\
&\qquad + \int\limits_{G_\varepsilon} W\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)U'(\theta_j(x_1))(x_1 - \varepsilon j)V(x_2)\psi(x)dx\Big| \\
&\quad \leqslant c\,\varepsilon\,\|W; L_2(\Pi_+)\|\Big\{\Big(\sum_{j=-N}^{N}\int\limits_{G_j(\varepsilon)} \widehat{\psi}_j^2 dx\Big)^{1/2} + \varepsilon\Big(\int\limits_{G_\varepsilon}\psi^2 dx\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\quad \leqslant c\,\varepsilon^2\,\|W; L_2(\Pi_+)\| \cdot \|\varphi; H^1(G_\varepsilon)\|. \quad \bullet
\end{aligned}$$

Замечание 4. Если в условиях леммы 4.1 $W(\xi) = W_1^+(\xi_1)$, то включение $W \in L_2(\Pi_+)$ нарушается, однако очевидная модификация последней выкладки при учете включения $W \in L_2(\omega)$ приводит к оценке

$$\left| \int\limits_{G_\varepsilon} W_1^+(\xi_1) U(x_1) V(x_2)\, \varphi(x) dx \right| \leqslant c\, \varepsilon^{3/2}\, \| \psi; H^1(G_\varepsilon) \|.$$

Итак, применяя установленные неравенства к интегралам из правой части (4.9), видим, что ее модуль мажорируется величиной

$$C\, \varepsilon\, |\ln \varepsilon\, |^{-\varkappa/2} \| \psi; H^1(G_\varepsilon) \|. \tag{4.14}$$

3. Невязки в области Ω_0. Сначала проверим, что для собственных функций d_n оператора $J_\perp$ справедливы равенства $d_n'(\pm h) = 0$. Из $4h$-периодичности функции Грина G и представления (3.23) выводим, что $\partial_1 v_0^-(\pm h, x_2, x_3) = 0$ на „торцах" области Ω_0. С другой стороны, дифференцируя соотношение (4.1) по переменной x_1 (это дозволено — см. [41, 21] и др.), получаем формулу $\partial_1 v_0(\pm h, x_2, x_3) = -(2\pi)^{-1} \ln r d_n'(\pm h) + O(1)$, из которой и следуют искомые равенства.

Теперь, анализируя приведенные представления U^- и v_0^+, учитывая установленные равенства для v_0^- и d_n, а также вспоминая четность функций W^- и Z_2^- относительно ξ_1, заключаем, что

$$\partial_\nu U^-(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \partial\, \Omega_0 \setminus Q_\varepsilon.$$

Кроме того, в силу (4.7), (3.28) и (4.4), (4.5) выполняется первое условие сопряжения $U^+ = U^-$ на Q_ε (на поверхности соединения стержней и тела Q_ε). Благодаря (4.3), (4.5) и (3.29) имеем

$$\begin{aligned} &\partial_2\, U^-(x_1, 0, x_3) \\ &\quad = \varepsilon^{-1}\, |\ln \varepsilon\, |^{-\varkappa/2}\, \partial_{\xi_2} W_2^-(\xi', 0) d_n(x_1) + \varepsilon\, |\ln \varepsilon\, |^{\varkappa/2}\, \partial_2\, \mathrm{Z}(\varepsilon, x_1, 0, x_3), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\mathrm{Z}(\varepsilon, x) = Z_1^-(\varepsilon^{-1} x)\, \partial_1\, v_0^+(x_1, 0) + 2|\omega| Z_2^-(\varepsilon^{-1} x)\, \partial_2\, v_0^+(x_1, 0)$.

Теперь в уравнении (2.2) заменим $u(\varepsilon, x)$ и $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ выражением (4.3) и числом $\mu_k^{(n)}$. Умножим полученное равенство на пробную функцию $\psi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ и проинтегрируем по частям в Ω_0. С целью указать результат вычислений заметим, что

$$[\Delta_{x^0}, \chi(r)(1-\chi(\varepsilon^{-1} r))] = [\Delta_{x^0}, \chi(r)] - [\Delta_{x^0}, \chi(\varepsilon^{-1} r)],$$
$$[\Delta_{x^0}, \chi(r)]Y(x) = \nabla_{x^0} \cdot (Y(x)\nabla_{x^0}\chi(r)) + \nabla_{x^0}Y(x) \cdot \nabla_{x^0}\chi(r),$$

где $x^0 = (x_2, x_3)$ и $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ — коммутатор операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Список слагаемых в правой части тождества

$$\int_{Q_\varepsilon} \partial_2 U^- \psi dx' - \int_{\Omega_0} (\nabla U^- \cdot \nabla \psi - \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-\varkappa} \mu U^- \psi) dx$$
$$= |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} (I_1(\varepsilon, \psi) + \cdots + I_7(\varepsilon, \psi)) \tag{4.16}$$

при использовании обозначений (4.1), (4.2) выглядит так:

$$I_1(\varepsilon, \psi) = \int_{\Omega_0} \widetilde{v}_0^- \nabla_{x^0} \chi\Big(\frac{r}{\varepsilon}\Big) \cdot \nabla_{x^0} \psi dx - \int_{\Omega_0} \psi \nabla_{x^0} \widetilde{v}_0^- \cdot \nabla_{x^0} \chi\Big(\frac{r}{\varepsilon}\Big) dx, \tag{4.17}$$

$$I_2(\varepsilon, \psi) = \int_{\Omega_0} \psi \nabla_{x^0} \widetilde{w}^- \cdot \nabla_{x^0} \chi(r) dx - \int_{\Omega_0} \widetilde{w}^- \nabla_{x^0} \chi(r) \cdot \nabla_{x^0} \psi dx, \tag{4.18}$$

$$I_3(\varepsilon, \psi) = -\int_{\Omega_0} \Big\{\chi(r)\Big[W^- + (2\pi)^{-1} \ln \frac{r}{\varepsilon} - c_\omega\Big](2d'(x_1)\,\partial_1 \psi + d''(x_1)\psi)$$
$$+ \chi(\varepsilon^{-1} r)[-(2\pi)^{-1} \ln r + \Lambda] d'(x_1)\,\partial_1 \psi\Big\} dx, \tag{4.19}$$

$$I_4(\varepsilon, \psi) = |\ln \varepsilon|^{\varkappa} \int_{\Omega_0} \chi(r)\{\partial_{\xi_1} Z_1^- \,\partial_1\,\partial_1\, v_0^+(x_1, 0) + 2|\omega|\,\partial_{\xi_1} Z_2^-\,\partial_1\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\}\psi dx, \tag{4.20}$$

$$I_5(\varepsilon, \psi) = -\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\varkappa} \int_{\Omega_0} \chi(r)\{Z_1^-\,\partial_1\,\partial_1\, v_0^+(x_1, 0) + 2|\omega| Z_2^-\,\partial_1\,\partial_2\, v_0^+(x_1, 0)\}\,\partial_1 \psi dx, \tag{4.21}$$

$$I_6(\varepsilon, \psi) = -\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\varkappa} \Big\{ \int_{\Omega_0} \mathbf{Z} \nabla_{x^0} \chi(r) \cdot \nabla_{x^0} \psi dx + \int_{\Omega_0} \psi \nabla_{x^0} \chi(r) \cdot \nabla_{x^0} \mathbf{Z} dx \Big\}, \tag{4.22}$$

$$I_7(\varepsilon, \psi) = \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} \mu \int_{\Omega_0} U^- \psi dx \tag{4.23}$$

(аргументы функций указываем лишь там, где их отсутствие может вызвать разночтения). Займемся оцениванием интегралов (4.17)-(4.23).

В (4.17) интегрирование фактически ведется по множеству

$$\Pi_\varepsilon \equiv \Pi_{\varepsilon R_0, 2\varepsilon R_0} = \{x \in \Omega_0 : \varepsilon R_0 < r = |x^0| < 2\varepsilon R_0\},$$

т.е. по носителю производной срезки $\chi(\varepsilon^{-1} r)$, на котором в силу (4.1) (см. также [21]) $\widetilde{v}^-(x) = O(r|\ln r|) = O(\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|)$, $|\nabla_{x^0}\widetilde{v}_0^-(x)|^2 = O(|\ln r|^2) = O(|\ln\varepsilon\,|^2)$. Используя неравенство Харди (2.17), имеем

$$|I_1(\varepsilon,\psi)| \leqslant |c|\ln\varepsilon\,|^2\,\varepsilon\left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon}(|\nabla\psi|^2 + r^{-2}|\ln r|^2|\psi|^2)dx\right)^{1/2} \leqslant c|\ln\varepsilon\,|^2\,\varepsilon\,\|\psi; H^1(\Omega_0)\|.$$

Рассмотрим интеграл (4.18). Поскольку $\operatorname{supp}|\nabla\chi(r)| \subset \Pi_1 \equiv \Pi_{R_0,2R_0}$ и $|\widetilde{w}^-(x_1,\xi)| = O(\rho^{-1}) = O(\varepsilon)$, $|\nabla_{x^0}\widetilde{w}^-(x_1,\xi)| = O(\varepsilon^{-1}\rho^{-2}) = O(\varepsilon)$ при $x \in \Pi_1'$ (см. (4.2)), приходим к соотношению

$$|I_2(\varepsilon,\psi)| \leqslant c\,\varepsilon\,\|\psi; H^1(\Omega_0)\|.$$

Согласно формуле (3.13), в лемме 3.2(2)

$$|W^-(\varepsilon^{-1}x) + (2\pi)^{-1}\ln(\varepsilon^{-1}r) - c_\omega| < c\,\varepsilon\,r^{-1} \quad \text{при } r > \varepsilon R_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&|I_3(\varepsilon,\psi)| \\
&\quad\leqslant c\|\psi; H^1(\Omega_0)\| \\
&\quad\quad\times\left(\left(\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R_0, 2R_0}} \varepsilon^2 r^{-2}dx\right)^{1/2}\right. \\
&\quad\quad+\left.\left(\int\limits_{\Pi_{0,2\varepsilon R_0}}\left(W^-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + |\ln r|^2 + |\ln\varepsilon\,|^2 + \Lambda^2 + c_\omega^2\right)dx\right)^{1/2}\right) \\
&\quad\leqslant c\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|\|\psi; H^1(\Omega_0)\|.
\end{aligned}$$

Свойства функций Z_i^- и лемма 3.2(3) обеспечивают экспоненциальное затухание производных $\partial_{\xi_1} Z_i^-$ при $\rho \to \infty$, а также равенство

$$\int_{-1/2}^{1/2} \partial_{\xi_1} Z_i^-(\xi_1, \xi^0) d\xi_1 = 0, \quad \xi^0 \in \mathbb{R}^2_- .$$

Поэтому, повторяя выкладки из доказательства леммы 4.1, приходим к такой оценке интеграла из (4.20):

$$|I_4(\varepsilon, \psi)| \leqslant c |\ln \varepsilon|^{\varkappa} \varepsilon^2 \|\psi; H^1(\Omega_0)\|.$$

Аналогично обрабатываются фрагменты интегралов (4.21) и (4.22), содержащие Z_1^-. Для оставшихся частей напишем

$$\left| \int_{\Omega_0} \chi(r) Z_2^-(\varepsilon^{-1} x) \partial_1 \partial_2 v_0^+(x_1, 0) \partial_1 \psi dx \right| \leqslant c \|\psi; H^1(\Omega_0)\|$$

и получим, что

$$|I_i(\varepsilon, \psi)| \leqslant c_i |\ln \varepsilon|^{\varkappa} \varepsilon \|\psi; H^1(\Omega_0)\| \quad \text{при } i = 5, 6.$$

Аналогичные рассуждения доставляют заключительную оценку

$$|I_7(\varepsilon, \psi)| \leqslant c_7 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{-\varkappa} \|\psi; H^1(\Omega_0)\|.$$

Итак, установлено неравенство

$$|\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} (|I_1(\varepsilon, \psi)| + \cdots + |I_7(\varepsilon, \psi)|) \leqslant c \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\delta_0} \|\psi; H^1(\Omega_0)\|, \tag{4.24}$$

в котором $\delta_0 = \max(\varkappa/2, 2 - \varkappa/2)$.

4. Частичное оправдание асимптотики собственных значений. Суммируя (4.9) и (4.16), а также учитывая (4.8) и (4.15), имеем

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega_0}(\nabla U^- \cdot \nabla\psi - \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\mu U^-\psi)dx - \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon}(\nabla U^+ \cdot \nabla\psi - \mu U^+\psi)dx \\
&\quad = \mathcal{F}^-(\varepsilon,\psi) + \mathcal{F}^+(\varepsilon,\psi) + (2|\omega|)^{-1}|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}\int\limits_{Q_\varepsilon} W_1^+ d'\psi dx' \\
&\qquad - |\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}(2|\omega|\sqrt{\mu})^{-1}\operatorname{ctg}(\mu l)\int\limits_{Q_\varepsilon}\partial_{\xi_2} Z_1^- d'\psi dx' - |\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}\int\limits_{Q_\varepsilon}\partial_{\xi_2} Z_2^- d\psi dx',
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

где $\mathcal{F}^-$ и $\mathcal{F}^+$ — правые части (4.16) и (4.9). Обработаем последние три слагаемых $J_1(\varepsilon,\varphi)$, $J_2(\varepsilon,\psi)$ и $J_3(\varepsilon,\psi)$ в (4.25).

Оценивая J_1 так же, как интеграл в лемме 4.1, получаем, что

$$
|J_1(\varepsilon,\psi)| \leqslant c\,\varepsilon^{1/2}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}(\|\widehat{\psi}(\cdot,0); L_2(Q_\varepsilon)\| + \varepsilon\,\|\psi; H^1(G_\varepsilon)\|),
$$

где функция $\widehat{\psi}$ совпадает на $\omega_j(\varepsilon)$ с функцией $\widehat{\psi}$ из (4.12); $j = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Очевидное неравенство

$$
|\widehat{\psi}_j(x',0)|^2 \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_0^l |\widehat{\psi}_j(x)|^2 dx_2 + 2\,\varepsilon\int\limits_0^l |\,\partial_2\,\widehat{\psi}_j(x)|^2 dx_2 \tag{4.26}
$$

вместе с (4.13) приводит к оценке

$$
\int\limits_{Q_\varepsilon} |\widehat{\psi}(x',0)|^2 dx' \leqslant c\,\varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon} |\nabla\psi(x)|^2 dx.
$$

Таким образом,

$$
|J_1(\varepsilon,\psi)| \leqslant c\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}\|\psi; H^1(G_\varepsilon)\|. \tag{4.27}
$$

Последние два слагаемых J_2 и J_3 в (4.25) однотипны — ограничимся рассмотрением выражения J_3, которое можно интерпретировать как функционал на $H^1(\Omega_0)$, действующий по формуле

$$
J_3(\varepsilon,\psi) = |\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}\int\limits_{\Omega_0}\nabla_\xi Z_2^-|_{\xi=\varepsilon^{-1}x}\cdot\nabla_x(\chi(r)d(x_1)\psi(x))dx, \quad \psi \in H^1(\Omega_0).
$$

Формула выводится из соотношений (4.5) с $i = 2$ при помощи таких действий: переходим к переменным x, периодически вдоль оси Ox_1 продолжаем уравнение на полупространство $\{x : x_2 < 0\}$ и после умножения на $\chi d\psi$ интегрируем его по частям в Ω_0. Теперь в силу формулы (3.12) для Z_2^- получается оценка

$$|J_3(\varepsilon,\psi)| \leqslant c\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa/2}\|\nabla_\xi Z_2^-; L_2(\Pi_-)\| \cdot \|\psi; H^1(\Omega_0)\|. \tag{4.28}$$

Итак, согласно неравенствам (4.14), (4.24) и (4.27), (4.28), правая часть (4.25) представляет собой непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon$ (см. п. 1, §2), норма которого есть $O(\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\delta_1})$ в соответствии с (2.21), где $\delta_1 = \max\{\varkappa, 2\}$. Пусть $\|\cdot\|_\varepsilon$ — норма в пространстве $\mathcal{H}_\varepsilon$, порожденная скалярным произведением (2.8). Вернемся к рассмотрению тождества (4.25) и соберем оценки (4.24) для $\mathcal{F}^-$, (4.14) для $\mathcal{F}^+$ и (4.27), (4.28). Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве приводит к формуле

$$\|U^\varepsilon - (\mu+1)A_\varepsilon U^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\delta_1}, \tag{4.29}$$

а первая часть леммы 12 из [56] дает оценку

$$\begin{aligned}\min\{|(1+\mu)^{-1} - (1+\widetilde{\lambda}_m(\varepsilon))^{-1}| : m \in \mathbb{N}\} &\leqslant \|U^\varepsilon\|_\varepsilon^{-1}\|A_\varepsilon U^\varepsilon - (1+\mu)^{-1}U^\varepsilon\|_\varepsilon \\ &\leqslant c\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\delta_1},\end{aligned} \tag{4.30}$$

частично оправдывающую построенную асимптотику решения спектральной задачи (2.2)–(2.6). Здесь A_ε — оператор из (2.10), а функция U^ε совпадает с U^- на Ω_0 и с U^+ на G_ε.

Предложение 4.1. *Для каждого корня* $\mu_k^{(n)} \in \Upsilon_k = (l^{-2}\pi^2(k-1)^2, l^{-2}\pi^2k^2)$ *трансцендентного уравнения* (3.32) *с левой частью* Λ_n $(k, n \in \mathbb{N})$ *найдется собственное значение* $\widetilde{\lambda}(\varepsilon)$ *задачи* (2.2)–(2.6) *такое, что* $|\widetilde{\lambda}(\varepsilon) - \mu_k^{(n)}| \leqslant c(n,k)\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\delta_1}$.

Это утверждение вытекает из неравенства (4.30) и указывает на один любопытный факт. Так как на $(0, l^{-2}\pi^2)$ имеется бесконечный набор решений уравнения (3.32), собственные значения $\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)$ задачи (2.2)–(2.6) удовлетворяют соотношению

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) < l^{-2}\pi^2. \tag{4.31}$$

Иными словами, при любом $n \in \mathbb{N}$ величина $\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)$ при достаточно малом ε попадает на интервал $\Upsilon_0 = (0, l^{-2}\pi^2)$. Создается впечатление, что корни $\mu_k^{(n)}$

из последующих интервалов вообще не принимают участия в формировании асимптотики спектра задачи (2.2)-(2.6). Разумеется, это впечатление ошибочно, поскольку по предложению 4.1 для каждого $\mu_k^{(m)}$ найдется последовательность собственных значений $\{\widetilde{\lambda}_{n(\varepsilon,m,k)}(\varepsilon)\}$, сходящаяся к $\mu_k^{(m)}$ при $\varepsilon \to +0$ (номер $n(\varepsilon, m, k)$ неограниченно увеличивается). С подобными ситуациями авторы сталкивались в [33-37].

Уравнение (3.32) можно переписать в виде

$$f(\mu_k^{(n)}) = (\Lambda_n - c_\omega)|\ln\varepsilon|^{-\varkappa} + (2\pi)^{-1}|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa},$$

где $f(\mu) = (2|\omega|\sqrt{\mu})^{-1}\operatorname{ctg}(\sqrt{\mu}l)$. Оно содержит малые параметры $|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}$ и $|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa}(\varkappa > 1)$, т.е. разумно найти соответствующую асимптотику корней. Для этого обратная функция f^{-1} раскладывается в ряд Маклорена с коэффициентами $m_0, m_1, \ldots$ В итоге

$$\begin{aligned}\mu_k^{(n)} &= m_0 + |\ln\varepsilon|^{1-\varkappa}m_1 + \cdots + |\ln\varepsilon|^{p(1-\varkappa)}m_p \\ &\quad + |\ln\varepsilon|^{-\varkappa}(\Lambda_n - c_\omega)m_1 + O(|\ln\varepsilon|^{1-2\varkappa}),\end{aligned}$$

причем число $p \in \mathbb{N}$ определяется условием $\varkappa \geqslant p(p-1)^{-1}$. При доказательстве теорем сходимости в п. 3, §5 мы ограничимся случаем $\varkappa > 2$, когда величины δ_0 из (4.24) и δ_1 из (4.30) превращаются соответственно в $\varkappa/2$ и $\varkappa$, а указанное разложение $\mu_k^{(n)}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\mu_k^{(n)} &= [\frac{\pi}{l}\left(k - \frac{1}{2}\right)l]^2\left(1 - \frac{2|\omega|}{\pi l}|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa} - 4\frac{|\omega|}{l}(\Lambda_n - c_\omega)|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\right) \\ &\quad + o(|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Формула (4.32) уточняет соотношение (4.31); теперь

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) \leqslant (2l)^{-2}\pi^2. \tag{4.33}$$

Отдельного обсуждения требуют числа $\widehat{\mu}_0 = 0$, $\widehat{\mu}_k = l^{-2}\pi^2k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\widehat{\mu}_0$ — собственное число исходной задачи Неймана (2.2)-(2.6). При $k \geqslant 1$ положим

$$U_k^\varepsilon(x) = \begin{cases} |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\cos[l^{-1}\pi k(l - x_2)], & x \in G_\varepsilon, \\ (-1)^k|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}, & x \in \Omega_0\,. \end{cases}$$

Предыдущие рассуждения (они разве лишь упрощаются) приводят к формуле $\|U_k^\varepsilon - (1+\widehat{\mu}_k)A_\varepsilon U_k^\varepsilon\|_\varepsilon \leqslant c_k\varepsilon$, улучшающей оценку из предложения 4.1 посредством удаления логарифма.

§5. Завершение обоснования асимптотик

1. Ключевые моменты. Как уже упоминалось, реализация обычной схемы проверки теоремы сходимости встречает препятствие — отсутствие оператора продолжения с равномерно по ε ограниченной нормой [37]. Окольный путь, предложенный в [37], состоит из нескольких этапов. Сначала устанавливается близость сужений собственных функций на соседние цилиндры. Затем строится оператор продолжения, равномерно ограниченный по ε, но только на конечномерных линейных оболочках собственных функций задачи (2.2)–(2.6). Наконец, в п. 3 становится возможным приступить к самим доказательствам теорем. Фрагменты доказательств, повторяющие рассуждения из [33, 37], излагаются конспективно. Напоминаем, что $\varkappa > 2$.

2. Оператор продолжения. Пусть $K_\beta = \{x : |x_1| < h, x_2 = \beta, |x_3| < b\}$ и χ_1 — гладкая срезка, $\chi_1(x_2) = 0$ при $x_2 < -2R_0$ и $\chi_1(x_2) = 1$ при $x_2 > -R_0 = 4^{-1}\min\{l, b, \min\varphi\}$ (см. п. 2, §1). Нетрудно сформировать краевую задачу в области $\{x \in \Omega_\varepsilon : x_2 > -2R_0\}$ для функции $v_n = \chi_1 u_n$, где u_n — нормированная условием (2.12) собственная функция задачи (2.2)–(2.6). Поступая так же, как и в п. 3, §3, и сохраняя прежние обозначения, осуществим продолжения по четности через плоскости $\{x : x_1 = \pm h\}$ и поставим условия периодичности (3.20). Полученная задача инвариантна относительно сдвигов на ε вдоль оси Ox_1, и поэтому, положив

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}(x + \varepsilon e^1) - \mathbf{v}(x)) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_1}^{x_1+\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t, x_2, x_3)\,dt,$$

где e^1 — орт оси Ox_1 и индекс n опущен, получаем, что

$$\begin{aligned}
-\Delta\mathcal{U}(x) &= \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\widetilde{\lambda}(\varepsilon)\mathcal{U}(x) + \varepsilon^{-1}(\mathcal{F}(x+\varepsilon e^1) - \mathcal{F}(x)), && x \in \Xi_0^*;\\
-\Delta\mathcal{U}(x) &= \widetilde{\lambda}(\varepsilon)\mathcal{U}(x), && x \in G_\varepsilon^*;\\
\mathcal{U}(x) &= 0, && x \in K_{-2R_0}^*;\\
\partial_\nu\mathcal{U}(x) &= 0, && x \in \partial\Omega_\varepsilon^*,\ x_2 \geqslant 0;\\
\mathcal{U}(x', -0) &= \mathcal{U}(x', +0), &&\\
\partial_2\mathcal{U}(x', -0) &= \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\,\partial_2\mathcal{U}(x', +0), && x \in Q_\varepsilon^*
\end{aligned} \tag{5.1}$$

(условия периодичности (3.20) не пишем). В (5.1) $\Xi_0^* = \{x \in \Omega_0^* : x_2 > -2R_0\}$ и $F = -2\chi_1' \,\partial_2 u_n - \chi_1'' u_n$, причем $\chi_1'(x_2) \neq 0$ лишь при $x_2 \in (-2R_0, -R_0)$. Из соотношений (5.1) выводим формулу

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mathcal{U}; L_2(\Xi_0^*)\|^2 + \varepsilon^{-1} |\ln\varepsilon|^{-\varkappa} \|\nabla\mathcal{U}; L_2(G_\varepsilon^*)\|^2 \\
&\quad= \varepsilon |\ln\varepsilon|^{-\varkappa} \widetilde{\lambda}(\varepsilon) \|\mathcal{U}; L_2(\Xi_0^*)\|^2 + \varepsilon^{-1} |\ln\varepsilon|^{-\varkappa} \widetilde{\lambda}(\varepsilon) \|\mathcal{U}; L_2(G_\varepsilon^*)\|^2 \\
&\quad\quad+ \int\limits_{\Xi_0^*} \varepsilon^{-1} (\mathcal{F}(x + \varepsilon e^1) - \mathcal{F}(x)) \mathcal{U}(x) dx \\
&\quad\equiv I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Первое слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &\leqslant c\,\varepsilon |\ln\varepsilon|^{-\varkappa} \int\limits_{-2R_0}^{0} dx_2 \int\limits_{-b}^{b} dx_3 \int\limits_{-2h}^{2h} |\partial_t \mathbf{v}(t, x_2, x_3)|^2 dt \\
&\leqslant C\,\varepsilon |\ln\varepsilon|^{-\varkappa} \|\,\partial_1 u; L_2(\Omega_0)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь и далее все постоянные зависят от мажоранты в соотношении $\widetilde{\lambda}(\varepsilon) \leqslant c_0$. Аналогично (5.3) имеем

$$\begin{aligned}
|I_3(\varepsilon)| &\leqslant c\|\,\partial_1 F; L_2(\Xi_0)\| \cdot \|\,\partial_1 u; L_2(\Omega_0)\| \\
&\leqslant c\{\|\chi_1' \,\partial_1 \partial_2 u; L_2(\Xi_0)\| + \|\,\partial_1 u; L_2(\Omega_0)\|\}\|\,\partial_1 u; L_2(\Omega_0)\|;
\end{aligned} \tag{5.4}$$

здесь $\Xi_0 = \{x \in \Omega_0 : x_2 > -2R_0\}$. Для оценки первой нормы в фигурных скобках продифференцируем уравнение (2.2) по x_2, умножим на $(\chi_1')\,\partial_2 u$ и проинтегрируем по частям в Ξ_0. Итогом названных действий оказывается формула

$$\|\chi_1' \,\partial_1 \partial_2 u; L_2(\Xi_0)\|^2 \leqslant c\|\,\partial_2 u; L_2(\Omega_0)\|^2. \tag{5.5}$$

Обратимся к $I_2(\varepsilon)$. При $x \in G_j(\varepsilon)$ положим

$$\mathcal{U}(x) = W_j(x_2) + V_j(x), \quad \int\limits_{\omega_j(\varepsilon)} V_j(x) dx' = 0, \quad x_2 \in (0, l).$$

Интегрируя второе уравнение из (5.1) по $\omega_j(\varepsilon)$ и учитывая условие Неймана на торце $\{x \in \partial G_j(\varepsilon) : x_2 = l\}$, находим, что

$$\begin{gathered}\partial_2^2 W_j(x_2) + \widetilde{\lambda}(\varepsilon) W_j(x_2) = 0, \quad x_2 \in (0, l);\\ \partial_2 W_j(l) = 0.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&W_j(x_2) = A_j(\cos[\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{1/2} l])^{-1} \cos[\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{1/2}(l - x_2)],\\ &\quad A_j = \varepsilon^{-2}\, |\omega| \int\limits_{\omega_j(\varepsilon)} \mathcal{U}(x', 0)\, dx',\\ &\|W_j; L_2(G_j(\varepsilon))\|^2\\ &\quad = \frac{1}{2}\varepsilon^2\, |\omega| A_j^2 \big(\cos[\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{1/2} l]\big)^{-2} \Big(l + \frac{1}{2}\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{-1/2} \sin[2\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{1/2}]\Big).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Подчеркнем, что в силу (4.34) $\cos[\widetilde{\lambda}(\varepsilon)^{1/2} l] \neq 0$ при малом $\varepsilon > 0$. Теперь, применяя неравенство Пуанкаре (4.13) для V_j, получаем

$$\begin{aligned}|I_2(\varepsilon)| &= 2\,\varepsilon^{-1}\, |\ln\varepsilon\,|^{-1} \widetilde{\lambda}(\varepsilon) \sum_{j=-N}^{N} \big(\|W_j; L_2(G_j(\varepsilon))\|^2 + \|V_j; L_2(G_j(\varepsilon))\|^2\big)\\ &\leqslant c\,\varepsilon^{-1}\, |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \widetilde{\lambda}(\varepsilon) \big(\|\mathcal{U}; L_2(Q_\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^2\, \|\nabla_{x'}\mathcal{U}; L_2(G_\varepsilon)\|^2\big).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Так же, как в (2.16), (2.18) и в лемме 2.1, устанавливаем, что

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\, |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \|\mathcal{U}; L_2(Q_\varepsilon)\|^2 &\leqslant c |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \Big(\varepsilon^{-1} \int\limits_{S_\varepsilon(\theta_0)} \mathcal{U}^2 ds_x + \int\limits_{\Omega_0} |\,\partial_2 \mathcal{U}|^2 dx\Big)\\ &\leqslant c |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \Big(|\ln\varepsilon\,|^{-1} \int\limits_{T_{\varepsilon, R_1}(\theta_0)} r^{-2} \mathcal{U}^2 dx + |\ln\varepsilon\,| \int\limits_{\Omega_0} |\nabla\mathcal{U}|^2 dx + \int\limits_{\Omega_0} |\,\partial_2 \mathcal{U}|^2 dx\Big)\\ &\leqslant c |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa + 1} \int\limits_{\Omega_0} |\nabla\mathcal{U}|^2 dx;\end{aligned} \tag{5.8}$$

здесь (r, θ) — полярные координаты плоскости (x_2, x_3), $\theta_0 = \operatorname{arctg} R_0^{-1} b$, $R_1 = \min(1, R_0 \cos^{-1} \theta_0)$.

Таким образом, из неравенств (5.2)–(5.8) при учете формул $\varkappa > 1$ и (2.12) выводим, что

$$\|\mathcal{U}; H^1(\Xi_0^*)\|^2 + \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\|\mathcal{U}; H^1(G_\varepsilon^*)\|^2 \leqslant c(n). \tag{5.9}$$

Эта оценка показывает, что значения собственных функций на соседних тонких цилиндрах близки в норме пространства $\mathcal{H}_\varepsilon$, и позволяет ограниченно по ε продолжить собственную функцию из области Ω_ε в область $\Omega_0 \cup D_\varepsilon$, где D_ε — тонкая пластинка $\{x : |x_1| < h, x_2 \in [0,l), |x_3| < \varepsilon\,\rho_0\}$, а число ρ_0 определено в п. 2, §1.

В [33] проверено, что существует продолжение $P_\varepsilon^{(1)}$ произвольной функции $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ из каждого цилиндра $G_j(\varepsilon)$ в тонкий брус $B_j(\varepsilon) = \{x : |x_1| - \varepsilon_j\,| < \varepsilon\,\rho_0, x_2 \in [0,l), |x_3| < \varepsilon\,\rho_0\}$, подчиненное требованиям

$$P_\varepsilon^{(1)}u \in H^1(\Omega_0 \cup B_{-N}(\varepsilon) \cup \cdots \cup B_N(\varepsilon))$$

и

$$\|P_\varepsilon^{(1)}u; H^1(B_j(\varepsilon))\| \leqslant c\|u; H^1(G_j(\varepsilon))\|, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N. \tag{5.10}$$

Следующий шаг существенно опирается на то, что мы имеем дело с собственной функцией u_n задачи (2.2)–(2.6). Сохраним обозначение u_n за $P_\varepsilon^{(1)}u_n$. В пространстве между укороченными брусами $B_j^0(\varepsilon) = B_j(\varepsilon) \cap \{x : x_2 > \varepsilon\}$ и $B_{j+1}^0(\varepsilon)$ доопределим u_n так:

$$u_n(\varepsilon(j+\rho_0), x^0) + \frac{x_1 - \varepsilon(j+\rho_0)}{\varepsilon(1-2\rho_0)}(u_n(\varepsilon(j+1-\rho_0), x^0) - u_n(\varepsilon(j+d_0), x^0)).$$

Аналогично п. 3, §3 для обработки крайних брусьев используем прием перехода к задаче в расширенной области Ω_0^* (при этом аппелируем к оценке (5.9)). Наконец, продолжение на малые параллелепипеды

$$\{x : \varepsilon(j+\rho_0) < x_1 < \varepsilon(j+1-\rho_0), 0 < x_2 < \varepsilon, |x_3| < \varepsilon\,\rho_0\}$$

осуществляется при помощи оператора, построенного в [33] (см. замечание 4.1). Указанные действия приводят к оператору продолжения, норма которого оценивается, согласно [37], со ссылками на неравенства (5.9) и (5.10). Итак, установлена

Теорема 5.1. *Существует такой оператор*

$$P_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to H^1(\Omega_0 \cup D_\varepsilon),$$

что для собственных функций задачи (2.2)–(2.6) *при малом* ε *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_0} (|\nabla u_n|^2 + \varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} u_n^2)dx + \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa}\|P_\varepsilon u_n; H^1(D_\varepsilon)\|^2 \leqslant c(n)\|u_n\|_\varepsilon^2.$$

3. Теорема сходимости. Ввиду наличия оператора $P_\varepsilon^{(1)}$ можно (для упрощения изложения и выкладок) считать, что ω — квадрат $\{\xi' : |\xi_1| < \rho_0, |\xi_2| < \rho_0\}$. По собственной функции u_n, нормированной условием (2.12), определим функцию

$$D_0 = I_h \times (0,l) \ni (x_1,x_2) \mapsto \widehat{u}_n(x_1,x_2) = \frac{1}{2\rho_0\,\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon\,\rho_0}^{\varepsilon\,\rho_0} |\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa/2}(P_\varepsilon u_n)(x)dx_3. \tag{5.11}$$

В силу теоремы 5.1

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}_n; H^1(D_0)\|^2 &\leqslant c\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon\,|^{-\varkappa} \int\limits_{D_\varepsilon} (|\nabla_{(x_1,x_2)} P_\varepsilon u_n|^2 + |P_\varepsilon u_n|^2)dx \leqslant c\|u_n\|_\varepsilon \\ &\leqslant c(n).\end{aligned}$$

Благодаря этому неравенству и неравенству (4.33) диагональный процесс доставляет такую подпоследовательность последовательности $\{\varepsilon\}$ (вновь обозначаем ее $\{\varepsilon\}$ и напоминаем, что параметр ε принимает дискретные значения; см. п. 2, §1), что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ при $\varepsilon \to +0$ имеем

$$\widehat{u}_n \to v_n \quad \text{слабо в } H^1(D_0), \tag{5.12}$$

$$\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) \to \lambda_n^* \leqslant (2l)^{-2}\pi^2. \tag{5.13}$$

Преобразуем второе слагаемое из (2.12)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon|^{-\varkappa} \int\limits_{G_\varepsilon} u_n u_k dx \\
&= 2\rho_0 \biggl(\int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{0}^{l} X_\varepsilon(x_1)(2\rho_0 \varepsilon)^{-1} \\
&\qquad \times \int\limits_{-\varepsilon\rho_0}^{\varepsilon\rho_0} (|\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} P_\varepsilon u_n - \widehat{u}_n) |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} P_\varepsilon u_k dx_3 dx_2 dx_1 \\
&\quad + \int\limits_{D_0} X_\varepsilon(x_1) \widehat{u}_n \widehat{u}_k dx_1 dx_2 \biggr),
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

где $X_\varepsilon(x) = X(\varepsilon^{-1} x_1)$, $x_1 \in I_h$, а X — 1-периодическое продолжение характеристической функции отрезка $[-\rho_0, \rho_0]$, т.е. $X(\xi_1) = 1$ при $|\xi_1| < \rho_0$ и $X(\xi_1) = 0$ при $|\xi_1| \in (\rho_0, 1/2)$. Очевидно, что слабый в $L_2(I_h)$ предел функции X_ε равен $2\rho_0$. Заметим, что первое слагаемое в правой части (5.14) не превосходит

$$
\begin{aligned}
&c\varepsilon^{-1} |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} \biggl(\int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{0}^{l} X_\varepsilon \varepsilon^2 \int\limits_{-\varepsilon\rho_0}^{\varepsilon\rho_0} |\ln \varepsilon|^{\varkappa} (\partial_3 P_\varepsilon u_n)^2 dx_3 dx_2 dx_1 \biggr)^{1/2} \|u_k; L_2(G_\varepsilon)\| \\
&\leqslant c |\ln \varepsilon|^{-\varkappa} (\|\partial_3 u_n; L_2(G_\varepsilon)\|^2 + \|u_k; L_2(G_\varepsilon)\|^2) \\
&\leqslant c\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Теперь предельным переходом в (2.12) получаем, что

$$
(2\rho_0)^2 \int\limits_{D_0} v_n v_k dx_1 dx_2 = \delta_{n,k}. \tag{5.15}
$$

В частности, $v_n \not\equiv 0$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, так как $\widetilde{\lambda}_0(\varepsilon) = 0$ отвечает нормированная собственная функция $u_0 = |\ln \varepsilon|^{\varkappa/2} (8h\rho_0^2 l + \varepsilon |\Omega_0|)^{-1/2}$, соответствующий предел v_0 есть постоянная. Иными словами, согласно (5.15) с $k = 0$

$$
\int\limits_{D_0} v_n(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.16}
$$

Введем пробную функцию $\psi^\varepsilon = |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}\psi$, где $\psi = 0$ на $\Omega_0, \psi \in C^\infty(\overline{D}_0)$, $\psi(x_1, 0) = 0$ при $x_1 \in I_h$. Используя (5.11), запишем интегральное тождество (2.7) в виде

$$2\rho_0 \int\limits_{D_0} X_\varepsilon \nabla_{(x_1,x_2)}\widehat{u}_n \cdot \nabla_{(x_1,x_2)}\psi dx_1 dx_2 = \widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) 2\rho_0 \int\limits_{D_0} X_\varepsilon \widehat{u}_n \psi ds_1 dx_2. \tag{5.17}$$

Благодаря ограниченности норм $\|X_\varepsilon\, \partial_i\, \widehat{u}_n;\ L_2(D_0)\|$, $i = 1, 2$, заключаем, что $X_\varepsilon\, \partial_i\, \widehat{u}_n \to q_i$ слабо в $L_2(D_0)$ при $\varepsilon \to 0$. Переходя в (5.17) к пределу при учете (5.12) и (5.13), обнаруживаем, что

$$\int\limits_{D_0} \sum_{i=1}^{2} q_i(x_1, x_2)\, \partial_i\, \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lambda_n^* 2\rho_0 \int\limits_{D_0} v_n \psi dx_1 dx_2. \tag{5.18}$$

Вычислим величины q_1 и q_2. Поскольку

$$\int\limits_{D_0} X_\varepsilon\, \partial_2\, \widehat{u}_n \eta dx_1 dx_2 = -\int\limits_{D_0} X_\varepsilon \widehat{u}_n\, \partial_2\, \eta dx_1 dx_2, \quad \eta \in C_0^\infty(D_0),$$

в пределе получаем

$$\int\limits_{D_0} q_2 \eta x_1 x_2 = -2\rho_0 \int\limits_{D_0} v_n\, \partial_2\, \eta dx_1 dx_2, \quad \eta \in C_0^\infty(D_0).$$

Таким образом, $q_2(x_1, x_2) = 2\rho_0\, \partial_2\, v_n(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in D_0$. Для нахождения q_1 обратимся к тождеству (2.7) с пробной функцией $\psi\eta$, где $\eta \in C_0^\infty(D_0)$, $\psi = 0$ на Ω_0 и $\psi(x_1, x_2) = \varepsilon\, |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} W_1^+(\varepsilon^{-1} x_1)$, $x \in G_\varepsilon$. Это тождество принимает вид

$$\int\limits_{D_0} X_\varepsilon\, \partial_1\, \widehat{u}_n \eta dx_1 dx_2 = O(\varepsilon)$$

и поэтому $q_1 = 0$.

Замечание 5.1. Подставим в (2.7) пробную функцию, равную

$$\begin{array}{ll} \varepsilon\, |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} \chi(r) Z_1^-(\varepsilon^{-1} x)\eta(x_1, 0) & \text{на } \Omega_0, \\ \varepsilon\, |\ln\varepsilon|^{\varkappa/2} W_1^+(\varepsilon^{-1} x_1)\eta(x_1, x_2) & \text{на } G_\varepsilon, \end{array}$$

где $\eta \in C^\infty(\overline{D}_0)$ и Z_1^- — решение задачи (4.5). Тогда

$$\varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2}\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_1 u_n\eta dx = O(\varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}),\quad \varepsilon\to 0.$$

Итак, тождество (5.18) означает, что v_n удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} -\partial_2^2 v_n(x_1,x_2) &= \lambda_n^* v_n(x_1,x_2), \quad && (x_1,x_2)\in D_0,\\ \partial_2 v_n(x_1,l) &= 0, && x_1\in I_h, \end{aligned}$$

т.е. $v_n(x_1,x_2) = B_n(x_1)\cos\sqrt{\lambda_n^*}(l-x_2)$. В силу (5.13) из (5.16) выводим

$$\int\limits_{I_h} B_n(x_1)dx_1 = 0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5.19}$$

Пусть γ — гладкая функция с нулевым средним на I_h и $\gamma'(\pm h)=0$. Определим функцию v_0^- формулой (3.23), в которой $d=\gamma$, а постоянная A вычислена в согласии с (3.34). Теперь в интегральное тождество (2.7) подставим пробную функцию Ψ_γ,

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma^-(x) = |\ln\varepsilon|^{-\alpha}\{&(1-\chi(\varepsilon^{-1}r))v_0^-(x)\\ &+\chi(r)[W^-(\varepsilon^{-1}x)-(2\pi)^{-1}\ln\varepsilon - c_\omega)\gamma(x_1)\\ &\qquad\qquad\qquad + (J_\perp\gamma)(x_1)]\\ &-\chi(r)(1-\chi(\varepsilon^{-1}r))((J_\perp\gamma)(x_1)-(2\pi)^{-1}\gamma(x_1)\ln r)\},\quad x\in\Omega_0,\\ \Psi_\gamma^+(x) = \Psi_\gamma^-(x_1,0,x_3)&(\cos\sqrt{\lambda_n(\varepsilon)}l)^{-1}\cos\sqrt{\lambda_n(\varepsilon)}(l-x_2),\quad x\in G_\varepsilon \end{aligned}$$

(фигурирующие здесь величины возникали в §3, §4). Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_\varepsilon} u_n(\varepsilon,x',0)(\partial_2\Psi_\gamma^- - \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\,\partial_2\Psi_\gamma^+)|_{x_2=0}dx'\\ &\quad = |\ln\varepsilon|^{-\alpha}(-I_1(\varepsilon,u_n)-I_2(\varepsilon,u_n)-I_3(\varepsilon,u_n))\\ &\qquad + \widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\int\limits_{\Omega_0}u_n\Psi_\gamma^- dx - \varepsilon^{-1}\,|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\int\limits_{G_\varepsilon}\partial_1 u_n\,\partial_1\Psi_\gamma^+ dx, \end{aligned} \tag{5.20}$$

где I_i — величины, определенные в (4.17)–(4.19), причем d заменено на γ, а в интеграле I_3 последний член подынтегрального выражения замещен таким: $\chi(\varepsilon^{-1} r)[(J_\perp\gamma)'(x_1) - (2\pi)^{-1} \ln r\gamma'(x_3)]\, \partial_1 u_n$. Из неравенства (4.24) вытекает, что предел первых двух слагаемых справа в (5.20) равен нулю при любом α. Ввиду замечания 5.1 то же можно сказать и о последнем слагаемом.

Ближайшей целью является нахождение предела левой части (5.20) при разных α. Пусть сначала $\alpha = \varkappa/2$. Поскольку

$$\partial_{\xi_2} W^-|_{\xi_2=0} = \partial_{\xi_2} W_2^+|_{\xi_2=0} = (8\rho_0^2)^{-1} + \widetilde{W}(\varepsilon^{-1} x'), \qquad \int\limits_\omega \widetilde{W} d\xi' = 0$$

(см. лемму 3.3), эта левая часть представляется как сумма

$$\begin{aligned}(4\rho_0)^{-1} &\int\limits_{I_h} X_\varepsilon \widehat{u}_n \gamma dx_1 - \varepsilon^{-1} |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2} \int\limits_{Q_\varepsilon} \gamma(x_1) u_n(x',0)\widetilde{W}(\varepsilon^{-1} x')dx' \\ &- |\ln\varepsilon|^{-3\varkappa/2} 2\rho_0 \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)}\, \mathrm{tg} \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)} l \\ &\times \left\{ \left[\frac{1}{2\pi}|\ln\varepsilon| - c_\omega\right] \int\limits_{I_h} X_\varepsilon \widehat{u}_n \gamma dx_1 + \int\limits_{I_h} \widehat{u}_n J_\perp \gamma dx_1 \right\}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Аналогично (4.27) проверяем, что

$$\varepsilon^{-1} |\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2} \left| \int\limits_{Q_\varepsilon} \gamma u_n \widetilde{W} dx' \right| \leqslant c|\ln\varepsilon|^{-\varkappa/2} \|u_n; H^1(G_\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon. \tag{5.22}$$

Ясно, что предел последнего слагаемого в (5.21) равен нулю. Поэтому предельный переход в (5.20) приводит к равенству

$$\frac{1}{2} \cos \sqrt{\lambda_n^*} l \int\limits_{I_h} B_n(x_1)\gamma(x_1)dx_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая произвольность γ и формулу (5.13), выводим, что $\lambda_n^* = (2l)^{-2}\pi^2$. Те же самые рассуждения применимы к любой подпоследовательности $\{\varepsilon\}$. Таким образом, установлено

Предложение 5.1. *Для всякого* $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) \to (2l)^{-2}\pi^2 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Теперь, учитывая представление для v_n, *из* (5.15) *выводим, что*

$$2\rho_0^2 l(1 - 1/\pi) \int_{I_h} B_n(x_1)B_m(x_1)dx_1 = \delta_{n,m}. \tag{5.23}$$

Величина предела, упомянутого в предложении 5.1, согласуется с главным членом асимптотики (4.32), $k = 1$. Для нахождения последующих членов асимптотики $\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)$, положим $\alpha = 1 - \varkappa/2$ в равенстве (5.20) и запишем его левую часть так :

$$\begin{aligned}
&2\rho_0 \operatorname{tg} \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)}l \int_{I_h} X_\varepsilon \widehat{u}_n \gamma dx_1 \\
&\times \left\{(8\rho_0^2)^{-1} |\ln\varepsilon|^{\varkappa-1} \operatorname{ctg} \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)}l - \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)}\left(\frac{1}{2\pi} - |\ln\varepsilon|^{-1}c_\omega\right)\right\} \\
&+ |\ln\varepsilon|^{-1} \int_{I_h} X_\varepsilon \widehat{u}_n J_1 \gamma dx_1 + \varepsilon^{-1} |\ln\varepsilon|^{-1+\varkappa/2} \int_{Q_\varepsilon} u_n \gamma \widetilde{W} dx'.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Благодаря (5.22) предел второго слагаемого в (5.24) по-прежнему аннулируется. Раскрывая неопределенность в фигурных скобках из (5.24) и переходя к пределу в (5.20), имеем

$$(2\rho_0)^2 \int_{I_h} B_n \gamma dx_1 \left\{ \frac{1}{8\rho_0^2}[\lim_{\varepsilon\to 0} \Xi_n(\varepsilon)|\ln\varepsilon|^{\varkappa-1} + \lim_{\varepsilon\to 0} O(\Xi_n(\varepsilon)^3|\ln\varepsilon|^{\varkappa-1})] - \frac{1}{4l}\right\} = 0;$$

здесь $\Xi_n(\varepsilon) = 2^{-1}\pi - \sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)}l$. Из этого тождества вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Xi_n(\varepsilon)|\ln\varepsilon|^{\varkappa-1} = 2\rho_0^2 l^{-1}.$$

Предложение 5.2. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) = (2l)^{-2}\pi^2 - 2\pi\rho_0^2 l^{-3}|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa} + o(|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Перейдем теперь к пределу в (5.20) при условии $\alpha = -\varkappa/2$. В итоге

$$\int\limits_{I_h} B_n(x_1)\{[-l^2(4\rho_0^2\pi)^{-1}\beta_n + c_\omega]\gamma(x_1) - (J_\perp\gamma)(x_1)\}dx_1 = 0$$

или, что то же,

$$(J_\perp B_n + [l^2(4\rho_0^2\pi)^{-1}\beta_n - c_\omega]B_n, \gamma)_{I_h} = 0; \tag{5.25}$$

при этом γ — произвольная гладкая функция из $L_2(I_h)_\perp$ и

$$\beta_n = \lim_{\varepsilon\to 0}|\ln\varepsilon|^{\varkappa}\Big(\sqrt{\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon)} - \pi(2l)^{-1} + 2\rho_0^2 l^{-2}|\ln\varepsilon|^{1-\varkappa}\Big). \tag{5.26}$$

Согласно (5.25), B_n — собственная функция оператора $J_\perp$, отвечающая собственному значению

$$\Lambda_m = c_\omega - l^2(r\rho_0^2\pi)^{-1}\beta_n. \tag{5.27}$$

Формулы (5.26) и (5.27) позволяют заключить, что

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) = \pi^2(2l)^{-2} - 2\pi\rho_0^2 l^{-3}|\ln\varepsilon|^{-\varkappa+1}\\ - (\Lambda_m - c_\omega)4\rho_0^2\pi^2 l^{-3}|\ln\varepsilon|^{-\varkappa} + o(|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Сравнивая (5.28) и разложение (4.32), видим, что три члена в асимптотике произвольного собственного значения задачи (2.2)—(2.6) совпадают с трехчленной асимптотикой некоторого корня $\mu_1^{(m)}$ трансцендентного уравнения (3.32) (напоминаем про упрощающее предположение: ω — квадрат). Покажем, что в (5.28) $n = m$. Для этого достаточно убедиться в следующем: если Λ_k — собственное значение оператора $J_\perp$ с кратностью q (т. е. $\Lambda_{k-1} > \Lambda_k = \cdots = \Lambda_{k+q-1} > \Lambda_{k+q}$), то существуют в точности q (с учетом кратностей) собственных значений задачи (2.2)-(2.6), для которых предел (5.26) равен $4\rho_0^2\pi l^{-2}(c_\omega - \Lambda_k)$.

Приступим к доказательству нужного факта. Допустим, что у задачи (2.2)-(2.6) имеется q собственных значений с названным свойством и $\mathrm{q} > q$. Тогда, переходя к пределу в интегральном тождестве (2.7), содержащем каждую из собственных функций $u_{n^1}(\varepsilon,\cdot),\ldots,u_{n^{\mathrm{q}}}(\varepsilon,\cdot)$, и пробную функцию Ψ_γ с $\alpha=-\varkappa/2$, заключаем, что

$$J_\perp B_{n^i}=\Lambda_k B_{n^i}\quad \text{на } I_h, i=1,\ldots,\mathrm{q}.$$

В силу (5.23) получено противоречие: кратность Λ_k равна q.

Предположим теперь, что $\mathrm{q}<q$. По каждой собственной функции $d_k,\ldots,d_{k+q-1}$ оператора $J_\perp$ определим равенствами (4.3) и (4.4) приближения

$$U_i^\varepsilon(x)=\begin{cases} U_i^-(\varepsilon,x), & x\in\Omega_0,\\ U_i^+(\varepsilon,x), & x\in G_\varepsilon,\end{cases} \tag{5.29}$$

для которых верна оценка (4.30). Применяя вторую часть леммы 12 [56], получаем для каждого $i=0,\ldots,q-1$ неравенство

$$\Big\|U_i^\varepsilon\|U_i^\varepsilon\|^{-1}-\sum_{j=1}^{\mathrm{q}}\alpha_{ij}(\varepsilon)u_{n^j}(\varepsilon,\cdot)\Big\|_\varepsilon\leqslant c\,\varepsilon\,|\ln\varepsilon|^{\varkappa}, \tag{5.30}$$

причем

$$0<c_\alpha\leqslant\sum_{j=1}^{\mathrm{q}}\alpha_{ij}(\varepsilon)^2\leqslant C_\alpha. \tag{5.31}$$

По определению скалярного произведения в $\mathcal{H}_\varepsilon$ из (5.30) вытекает, что

$$\varepsilon^{-1}|\ln\varepsilon|^{-\varkappa}\Big\|v_{i,0}^+|\ln\varepsilon|^{\varkappa/2}-\sum_{j=1}^{\mathrm{q}}\|U_i^\varepsilon\|_\varepsilon\alpha_{ij}(\varepsilon)u_{n^j}(\varepsilon,\cdot)\Big\|^2_{L_2(G_\varepsilon)}\leqslant c\,\varepsilon^2|\ln\varepsilon|^{2\varkappa}, \tag{5.32}$$

где

$$v_{i,0}^+(x_1,x_2)=\Big[8\rho_0^2\sqrt{\mu_1^{(k+i)}}\sin\sqrt{\mu_1^{(k+i)}}\,l\Big]^{-1}d_{k+i}(x_1)\cos\Big[\sqrt{\mu_1^{(k+i)}}(l-x_2)\Big], \tag{5.33}$$

а $\mu_1^{(k)}=\cdots=\mu_1^{(k+q-1)}\in(0,(2l)^{-2}\pi^2)$ — корень уравнения (3.32) с $\Lambda=\Lambda_k$. Используя формулы (5.11) и (5.12), а также предложение 5.1, перейдем в (5.32) к пределу по некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon\}$. В результате получаем противоречивое равенство

$$\int_0^l\cos[\frac{\pi}{2l}(l-x_2)]^2dx_2\int_{I_h}\Big\{d_{k+i}(x_1)-8\rho_0^2\frac{\pi}{l}\sum_{j=1}^{\mathrm{q}}\alpha_{ij}^0B_{n^j}(x_1)\Big\}^2dx_1=0;$$

в самом деле, линейно-независимые функции $d_k, \dots, d_{k+q-1}$ оказываются линейными комбинациями меньшего числа других функций. Таким образом, верна

Теорема 5.2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива асимптотическая формула* (5.28), *в которой Λ_m — элемент спектральной последовательности* (3.38) *с номером $m = n$.*

Попутно установлено еще одно утверждение.

Теорема 5.3. *Для любой последовательности $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ найдется такая подпоследовательность $\{\varepsilon''\} \subset \{\varepsilon'\}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\widehat{u}_n \to B_n(x_1)\cos\left[\frac{\pi}{2l}(l - x_2)\right] \quad \text{слабо в } H^1(D_0) \text{ вдоль } \{\varepsilon''\}.$$

Здесь B_n — собственная функция оператора $J_\perp$, отвечающая собственному значению Λ_n, а функция $\widehat{u}_n$ определена в (5.11). При этом собственные функции B_n удовлетворяют соотношению (5.23) и B_n зависит от выбора $\{\varepsilon'\}$ лишь тогда, когда Λ_n — кратное значение.

4. Уточнение оценок асимптотических остатков. Усилим теорему 5.2.

Теорема 5.4. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ при малом ε верно неравенство*

$$|\widetilde{\lambda}(\varepsilon) - \mu_1^{(n)}| \leqslant c_n \varepsilon\, |\ln \varepsilon\,|^{\varkappa}.$$

Доказательство. Пусть $\mu_1^{(n)} = \dots = \mu_1^{(n+q-1)} \in (0, (2l)^{-2}\pi^2)$ — корень уравнения (3.32), в левой части которого стоит q-кратное собственное значение $\Lambda_n = \dots = \Lambda_{n+q-1}$ оператора $J_\perp$. Согласно предложению 4.1, в $c\varepsilon\,|\ln\varepsilon\,|^{\varkappa}$ — окрестности точки $\mu_1^{(n)}$ содержится по крайней мере одно собственное значение задачи (2.2)–(2.6). В силу теоремы 5.2 в указанную окрестность могут попасть только собственные значения $\widetilde{\lambda}(\varepsilon), \dots, \widetilde{\lambda}_{n+q-1}(\varepsilon)$. Как и ранее, предположив, что хотя бы одно из них вышло из окрестности, приходим к противоречию. •

Аналогичное уточнение возможно и для теоремы 5.3.

Теорема 5.5. *Пусть* $\Lambda_n = \cdots = \Lambda_{n+q-1}$ *— собственное значение оператора* $J_\perp$ *с кратностью* q, *а* $d_n, \ldots, d_{n+q-1}$ *— соответствующие собственные функции, ортонормированные в* $L_2(I_h)$. *Тогда существуют такие постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $\{\alpha_{ij}\} \in \mathbb{R}$ *и* $c_n > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *выполняется неравенство*

$$\Big\| U^\varepsilon_{n+i} - \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{ij} u_{n+j}(\varepsilon, \cdot) \Big\|_\varepsilon \leqslant c_n \, \varepsilon \, |\ln \varepsilon|^\varkappa, \quad i = 0, \ldots, q-1, \tag{5.34}$$

где U^ε_{n+i} *определены формулами* (5.29) *и* (4.3), (4.4) *по* d_{n+i}.

Для простого собственного значения Λ_n имеем $q = 1$, т.е. в (5.34) остается один нормирующий множитель $\alpha_0 = \alpha_{00}$, подчиненный (5.31). Удаляя из приближенного решения U^ε_n часть слагаемых, упрощаем оценку (5.34) следующим образом:

$$\|v_0^- |\ln \varepsilon|^{-\varkappa/2} - \alpha_0 u_n; L_2(\Omega_0)\| \leqslant c\,\varepsilon\, |\ln \varepsilon|^{3\varkappa/2},$$
$$\|X_\varepsilon(v^+_{n,0} - \alpha_0 \widehat{u}_n); L_2(D_0)\| \leqslant c\,\varepsilon^{1/2}.$$

Здесь X_ε, $v^+_{n,0}$ и $\widehat{u}_n$ — функции, определенные в (5.14), (5.11) и (5.33) соответственно.

Список литературы

[1] Гольденвейзер А. Л., *Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости*, Прикл. мат. и мех. **26** (1962), №4, 668–686.

[2] Джавадов М. Г., *Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях*, Дифференц. уравнения **4** (1968), №10, 1901–1909.

[3] Ciarlet P. G., Kesavan S., *Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problem in plate theory*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **26** (1981), 145–172.

[4] Назаров С. А., *Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. мех. астроном. **1982**, вып. 2, 65–68.

[5] Caillerie D., *Thin elastic and periodic plates*, Math. Methods Appl. Sci. **6** (1984), 159–191.

[6] Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В., *Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. **26** (1986), №7, 1032–1048.

[7] Tutek Z., Aganovič I., *A justification of the one-dimensional linear model of elastic beam*, Math. Methods Appl. Sci. **8** (1986), 502–515.

[8] Panasenko G. P., *Asymptotic analysis of bar systems.* 1, Russian J. Math. Phys. **2** (1994), no. 3, 325–352; 2, ibid. **4** (1996), no. 1, 87–116.

[9] Назаров С. А., *Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких*, Алгебра и анализ **7** (1995), №5, 1–92.

[10] Назаров С. А., *Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки*, Пробл. мат. анал., №17, СПбГУ, СПб., 1997, сс. 101–152.

[11] Ciarlet P. G., *Plates and junctions in elastic multi-structures. An asymptotic analysis*, Rech. Math. Appl., vol. 14, Masson, Paris, 1990.

[12] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающихся областях.* I, Алгебра и анализ **2** (1990), №2, 85–111.

[13] Leguillon D., Sánchez-Palencia E., *Approximation of a two-dimensional problem of junctions*, Comput. Mech. **6** (1990), no. 5/6, 435–455.

[14] Le Dret H., *Problèmes variationnels dans les multi-domaines. Modélisation des jonctions et applications*, Rech. Math. Appl., vol. 19, Masson, Paris, 1991.

[15] Mampassi B., *Un type de jonction bidimensionelle d'une tige et d'un massif élastiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **315** (1992), 261–266.

[16] Argatov I. I., Nazarov S. A., *Junction problem of shashlik (skewer) type*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **316** (1993), 1329–1334.

[17] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B., *Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure*, Asymptotic Anal. **8** (1994), 105–143.

[18] Назаров С. А., *Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей.* I, Тр. Семин. им. И. Г. Петровского №18 (1995), 3–78.

[19] Nazarov S. A., *Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **320** (1995), 1419–1424.

[20] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B., *Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure*, Asymptotic Anal. **11** (1995), 343–415.

[21] Аргатов И. И., Назаров С. А., *Асимптотический анализ задач на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем*, Изв. РАН. Сер. мат. **60** (1996), №1, 3–36.

[22] Назаров С. А., *Асимптотика решений задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкими отростками*, Докл. РАН **352** (1997), №4, 458–461.

[23] Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я., *О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое*, Теория функций, функц. анал. и их прил., вып. 5, ХГУ, Харьков, 1967, сс. 140–156.

[24] Котляров В. П., Хруслов Е. Я., *О предельном граничном условии одной задачи Неймана*, Теория функций, функц. анал. и их прил., вып. 10, ХГУ, Харьков, 1970, сс. 83–96.

[25] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978.

[26] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, М., 1984.

[27] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[28] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, МГУ, М., 1990.

[29] Fleury F., Sánchez-Palencia E., *Asymptotics and spectral properties of the acoustic vibrations of a body perforated by narrow channels*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), 149–176.

[30] Levy T., *Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid*, Internat. J. Engrg. Sci. **17** (1979), 1005–1014.

[31] Sanchez-Hubert J., Sánchez-Palencia E., *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[32] Benkaddour A., Sanchez-Hubert J., *Spectral study of a coupled compact-noncompact problem*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **26** (1992), no. 6, 659–672.

[33] Mel'nyk T. A., *Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick function of type* 3:2:1, Preprint SFB 404 no. 98/20, Stuttgart Univ., 1998; Math. Methods Appl. Sci. (в печати).

[34] Мельник Т. А., Назаров С. А., *Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами*, Докл. РАН **333** (1993), №1, 13–15.

[35] Mel'nyk T. A., Nazarov S. A., *Asymptotic structure of the spectrum of the Neumann problem in a thin comb-like domain*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **319** (1994), 1343–1348.

[36] Мельник Т. А., Назаров С. А., *Асимптотика собственных значений задачи Неймана в области типа "густого гребешка"*, Докл. РАН **342** (1995), №1, 23–25.

[37] Мельник Т. А., Назаров С. А., *Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа "густого гребешка"*, Тр. Семин. им. И. Г. Петровского №19 (1996), 138–173.

[38] Кондратьев В. А., *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва **16** (1967), 209–292.

[39] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А., *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками*, Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.

[40] Кондратьев В. А., Олейник О. А., *Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях*, Успехи мат. наук **38** (1983), №2, 3–76.

[41] Nazarov S. A., Plamenevskiĭ B. A., *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., vol. 13, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[42] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J., *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys Monogr., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[43] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно-гладкой границей*, Тр. Ленингр. мат. об-ва **1** (1990), 174–211.

[44] Назаров С. А., *Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы*, Пробл. мат. анал., №16, СПбГУ, СПб., 1997, сс. 167–192.

[45] Назаров С. А., *Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность*, Зап. науч. семин. ПОМИ **249** (1997), 212–230.

[46] Мельник Т. А., *Спектральні властивості самоспряжених розривних оператор-функцій*, Докл. АН Украины. Мат., естествозн., техн. науки **1994**, №12, 33–36.

[47] Гринив Р. О., Мельник Т. А., *О сингулярном функционале Рэлея*, Мат. заметки **60** (1996), №1, 130–134.

[48] Федорюк М. В., *Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения*, Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики, Тр. Семин. С. Л. Соболева **1980**, №1, 113–131.

[49] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой*, Мат. сб. **116** (1981), №2, 187–217.

[50] Назаров С. А., *Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением*, Тр. Моск. мат. о-ва **53** (1990), 98–129.

[51] Назаров С. А., Пламеневский Б. А., *Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы*, Алгебра и анализ **6** (1994), №4, 157–186.

[52] Sánchez-Palencia E., *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*, Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics (Palaiseau, 1983), Lecture Notes in Phys., vol. 195, Springer, Berlin–New York, 1984, pp. 346–368.

[53] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., *Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **192** (1990), 42–60.

[54] Nazarov S. A., *Concentrated masses problems for a spatial elastic body*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. **316** (1993), no. 6, 627–632.

[55] Nazarov S. A., *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions*, RAIRO Modél. Anal. Numér. **27** (1993), no. 6, 777–799.

[56] Вишик М. И., Люстерник Л. А., *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Успехи мат. наук **12** (1957), №5, 3–122.

[57] Полиа Г., Сеге Г., *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962.

[58] Ландкоф Н. С., *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[59] Смирнов В. И., *Курс высшей математики.* Т. 2, изд. 20-е, стер., Наука, М., 1967.

[60] Хермандер Л., *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.

[61] Нагель Ю., *Об эквивалентных нормировках в функциональных пространствах H^{μ}*, Вестн. Ленингр. ун-та. Мат. мех. астроном. **1974**, вып. 2, 41–47.

Киевский университет
механико-математический факультет
252601, Украина, Киев, Владимирская ул., 64

Поступило 12 апреля 1999 г.

С.-Петербургский государственный университет
НИИ математики и механики
198904, Санкт-Петербруг, Петродворец
Библиотечная пл., 2