В. С. Рыко, Дискретное преобразование Меллина, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 8, 65–68

https://www.mathnet.ru/ivm5138

Полагая $K=1$, $y=\alpha$, $Y=b$, за уравнение (23) примем (19.1). Очевидно, что (18.1) при α — const является первым интегралом системы (24.1) с правыми частями $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$. Кроме того, $\partial T/\partial t = 0$, $\omega \dot{q} = \mathcal{L}\dot{\alpha}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $q^T = (q_1, q_2)$, $\omega_1 = \partial f/\partial q_1 = -a_1 \sin q_1$, $\omega_2 = \partial f/\partial q_2 = -a_2 \sin q_2$, $\mathcal{L} = 1$, так что все условия теоремы 2 выполняются.

Далее, принимая во внимание равенство $\omega A^{-1} \omega^T = 1$, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $a_{11} = a_1^2$, $a_{22} = a_2^2$, $a_{12} = a_{21} = a_1 a_2 \cos(q_2 - q_1)$ и значения K, Y, получим

$$\lambda = b(\dot{\alpha}, \alpha, \dot{q}, q). \tag{28.1}$$

Положим $U(q, \alpha) = U(q) - 0{,}5c\alpha^2$, $D = d$, c — const, $R_\tau = 0$. Тогда $b = -c\alpha - d\dot{\alpha}$ и

$$(d/dt)(T + 0{,}5\dot{\alpha}^2 - U(q, \alpha)) = -d\dot{\alpha}^2, \tag{32.1}$$

т. е. полная энергия системы убывает асимптотически. С учетом выражений α, $\dot{\alpha}$ через q, $\dot{q}$ получаем соответствующие значения управляющих моментов:

$$u_1 = 0{,}5a_1 \sin q_1 (c(a_1 \cos q_1 + a_2 \cos q_2 - x_c) + d(a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + a_2 \dot{q}_2 \sin q_2)),$$

$$u_2 = 0{,}5a_2 \sin q_2 (c(a_1 \cos q_1 + a_2 \cos q_2 - x_c) + d(a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + a_2 \dot{q}_2 \sin q_2)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беген Анри. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями.— М.: Наука, 1967.— 171 с.
2. Четаев Н. Г. О вынужденных движениях. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.—М.: Изд-во АН СССР, 1962.— С. 329—335.
3. Мухарлямов Р. Г. Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения.— 1983.— Т. 19.— № 12.— С. 2048—2056.
4. Румянцев В. В. О некоторых вариационных принципах механики // Сб. научно-метод. статей по теор. мех., вып. 6.— М.: Высшая школа, 1976.— С. 32—43.
5. Мухарлямов Р. Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения.— 1969.— Т. 5.— № 4.— С. 688—699.

г. Москва

Поступила
05.02.1990

В. С. Рыко

УДК 517.537

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Результаты данной заметки позволяют распространить метод коэффициентов из [1] на ряды Дирихле (см. [1], проблема 1.4, с. 220). Получение интегральных представлений для различных арифметических сумм по делителям натурального числа n достигается путем применения формулы обращения для обыкновенных рядов Дирихле в виде двойного интеграла. В обзорной статье [2] приводится следующая формула для обыкновенных рядов Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx} \right\} dx. \tag{1}$$

Если сумма ряда Дирихле в левой части (1) равна $f^*(s)$, то из (1) можно вывести формулу, дающую выражение для коэффициентов a_n через $f^*(s)$, т. е. формулу обращения. Это сделано в работе [3] (см. также [4]), где содержится таблица формул суммирования для арифметических функций по делителям натурального n. Формула (1) является частным случаем аналогичной формулы для общих рядов Дирихле, впервые полученной в 1908 г. в работе [5]. Впоследствии сама формула из [5] и рассматриваемый здесь частный случай (1) неоднократно цитировались в трудах Харди, Рисса, Е. К. Титчмарша, М. А. Евграфова и других авторов. Однако для получения указанной формулы из соотношения (1) необходимо использование формулы обращения для дискретного преобразования Лапласа (ДПЛ, см. [6]). ДПЛ было разработано лишь 30—40 лет назад, поэтому в работах почти столетней давности формула обращения для рядов Дирихле, выводимая из (1), по-видимому, не содержится. Формулы обращения для рядов Дирихле другого типа рассматриваются, напр., в [7] — [9].

Целью данной заметки является прямое доказательство указанной формулы обращения путем непосредственной проверки и разработка некоторых ее теоретико-числовых приложений; дальнейшие приложения этой формулы имеются в [10]. На основе формулы обращения можно определить дискретное преобразование Меллина (ДПМ) по аналогии с известными дискретными ортогональными преобразованиями, такими как ДПЛ и ДПФ (дискретное преобразование Фурье). Формула обращения для рядов Дирихле указанного типа получается из композиционной структуры ДПМ, определяемой формулой (1). Аналогичные соображения приносят пользу и в других вопросах (см., напр., [3], [4], [10], [11]). В рассматриваемом случае композиционная структура такова: ДПМ представляет собой композицию ДПЛ и интегрального преобразования Меллина, разделенного на $\Gamma(s)$.

Теорема. *Пусть $a < +\infty$ — абсцисса абсолютной сходимости обыкновенного ряда Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = f^{*}(s), \quad a \geqslant -1, \tag{2}$$

где $s = \sigma + it$, $f^{*}(s)$ — сумма этого ряда. Пусть, далее, сходится интеграл

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+1) f^{*}(s)\, x^{-s-1}\, ds, \tag{3}$$

где $c > a$, $\operatorname{Re} x > 0$. Тогда при любом положительном $\gamma > b$, где b — абсцисса сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| e^{-kx}$, имеет место формула обращения

$$a_n = \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} e^{nx} \psi(x)\, dx, \tag{4}$$

где $\psi(x)$ имеет вид (3).

Доказательство. Ряд (2) сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} s = \sigma > a$. Далее рассмотрим интеграл (3), где $c > a$, $\operatorname{Re} x > 0$. К этому сходящемуся интегралу применимы условия леммы Ватсона (см. [12], с. 94, или [13], с. 727). Поэтому в случае подстановки в (3) вместо $f^{*}(s)$ соответствующего выражения из (2) можно проинтегрировать ряд из (2) почленно. В результате будем иметь

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} x^{-s-1}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s+1) \times$$

$$\times k^{-s} x^{-s-1}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k e^{-kx}. \tag{5}$$

Заметим, что последний ряд в (5) сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} x > b$. Подставляя полученное выражение для функции $\psi(x)$ из (5) в (4) и производя допустимое в данном случае почленное интегрирование ряда, получим тождество, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{2\pi i n}\int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi}e^{x(n-k)}\,dx=a_n, \tag{6}$$

что доказывает теорему.

Применение формулы (4) позволяет упростить доказательства многих теоретико-числовых соотношений. Например, используя (4), можно дать единообразные и простые доказательства всех формул типа ДПМ на с. 196—197 из [14], равно как и соответствующих формул из первой главы монографии [15] (доказательства приводятся в [10]). В частности, упрощение достигается при доказательстве некоторых тождеств Рамануджана, впервые доказанных в [16] с помощью весьма нетривиальных рассуждений. В отличие от доказательств из [14], [15] в предлагаемых доказательствах не используется фундаментальное тождество Эйлера ([14], с. 196). В формуле (2), определяющей ДПМ, назовем коэффициенты a_n оригиналом, а соответствующую им сумму ряда $f^*(s)$ — изображением. В случае абсолютной сходимости рядов произведению изображений соответствует арифметическая свертка оригиналов, т. е., используя операционные символы, имеем

$$f_1^*(s)\div a_k,\quad f_2^*(s)\div b_m \mid\Rightarrow f_1^*(s)\cdot f_2^*(s)\div\sum_{d|n}a_d\cdot b_{n/d}, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{d|n}$ обозначает сумму, взятую по всем (положительным) делителям натурального n [14].

Определение. ДПМ $f_1^*(s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k k^{-s}$ и $f_2^*(s)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m m^{-s}$ называются взаимно обратными, если соответствующие ряды сходятся абсолютно и их произведение

$$f_1^*(s)\cdot f_2^*(s)=1. \tag{8}$$

С помощью (4) легко доказывается, что соотношение (8) с учетом (7) дает условие, которому должны удовлетворять оригиналы двух взаимно обратных ДПМ:

$$\sum_{k|n}a_k\cdot b_{n/k}=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1.\end{cases} \tag{9}$$

Пример 1. Найдем ДПМ, обратное к $f^*(s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(k)k^{-s}$, где $\mu(k)$ — функция Мёбиуса [14]. Тем самым будет дано новое доказательство известной формулы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^s}=\frac{1}{\zeta(s)},\quad \mathrm{Re}\,s>1, \tag{10}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана [14]. Формула (10) следует непосредственно из (8) при $a_k=\mu(k)$, $b_m\equiv 1$. Имеем из (10), что обратным ДПМ к $f^*(s)$ будет $\zeta(s)$. Основное свойство функции Мёбиуса [14]:

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1,\end{cases}$$

также следует из (9).

Пример 2. Докажем известное тождество Рамануджана [15], [16]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(n)k^{-s}=\sigma_{1-s}(n)/\zeta(s),\quad \mathrm{Re}\,s>1, \tag{11}$$

где $c_k(n)=\sum\limits_h e^{-2\pi i nh/k}$ — суммы Рамануджана, h пробегает все целые числа меньшие k и взаимно простые с ним, $\sigma_a(n)$ — сумма a-х степеней делителей числа n.

Используя формулу (4), сведем тождество (11) к очевидному. Из (11) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(n)}{k^s}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{d\backslash m}c_d(n)=\sigma_{1-s}(n). \tag{12}$$

По формуле (4) с учетом того, что $\sigma_{1-s}(n)=\sum_{d|n}d^{1-s}$,

$$\sum_{d|m}c_d(n)=\sum_{d|n}\frac{d^2}{2\pi im}\int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi}e^{x(m-d)}\,dx=\begin{cases}m, & m|n;\\ 0, & m\nmid n.\end{cases} \tag{13}$$

Мы получили известное соотношение (см. [15], с. 15), легко вытекающее из определения сумм $c_k(n)$, что и доказывает (11).

Пример 3. Рассмотрим формулу (1) на с. 12 из [15] при $a=-1$:

$$\zeta(s)\zeta(s+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{-1}(n)}{n^s},\quad \operatorname{Re}s>2. \tag{14}$$

Из (14) с учетом (10) имеем

$$\zeta(s+1)=\sum_{m|1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{d|m}\mu(d)\sigma_{-1}\left(\frac{m}{d}\right).$$

Отсюда по формуле обращения (4)

$$\sum_{d|m}\mu(d)\sigma_{-1}\left(\frac{m}{d}\right)=\frac{1}{2\pi im}\int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi}e^{mx}\,dx\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(\nu)\zeta(\nu)x^{-\nu}\,d\nu=\frac{1}{m}\quad(b=c+1) \tag{15}$$

в силу формулы (1) на с. 25 из [15] и формулы (1) на с. 183 из [6] соответственно. Формула (15) суммирования по делителям натурального n в литературе не встречается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.— Новосибирск, 1977.—286 с.
2. Евграфов М. А. Ряды и интегральные представления // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современ. пробл. матем.— 1986.— С. 5—92.
3. Рыко В. С. Композиционная структура рядов Фурье, дискретных преобразований Фурье и Меллина и вычисление их сумм.— Минск, 1987.— 54 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 22.04.87, № 2826—В 87.
4. Рыко В. С. Метод суммирования и улучшения сходимости функциональных рядов.— Вологда, 1988.—182 с.—Деп. в ВИНИТИ АН СССР 6.05.88, № 3542 — В-88.
5. Perron O. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen // Journal für Math.— 1908.— Bd. 134.— S. 95—143.
6. Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению: Учеб. пособие для студентов вузов.—3-е изд., перераб.— М.: Высшая школа, 1976.— 184 с.
7. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1983.— 175 с.
8. Мандельбройт С. Ряды Дирихле, принципы и методы.— М.: Мир, 1973.— 171 с.
9. Apostol T. M. Introduction to analytic number theory.— New York: Springer, 1976.— 338 p.
10. Рыко В. С. Обобщенное дискретное преобразование Меллина и некоторые его приложения.— Вологда, 1989.— 101 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 6.07.89, № 4498 — В-89.
11. Рыко В. С. Некоторые композиции интегральных преобразований.— Новосибирск, 1979.—7 с.—Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.01.79, № 199—79.
12. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. I.— Рига, 1974.—391 с.
13. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I.— М.: Ин. лит., 1949.— 799 с.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 3 — М.: Наука, 1967.— 299 с.
15. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана.— М.: Ин. лит., 1953.—407 с.
16. Ramanujan S. On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers // Trans. Cambr. Philos. Soc.— 1918.— V. 22.— P. 259—276.

г. Вологда

Поступили
первый вариант 24.01.1989
окончательный вариант 29.03.1990