Труды Московского математического общества *Том 72, вып. 2, 2011 г.*

О C^2-устойчивых проявлениях перемежаемости аттракторов в классах сохраняющих границу отображений

В. А. Клепцын, П. С. Салтыков

Мы строим открытые множества в пространствах сохраняющих границу отображений кольца и торического слоя, для каждого отображения из которых имеет место предсказанная И. Каном перемежаемость аттракторов.

А именно, бассейны притяжения каждой из компонент границы оказываются для таких отображений всюду плотны в фазовом пространстве. Более того, хаусдорфова размерность множества точек, не стремящихся ни к одной из компонент, оказывается меньшей размерности фазового пространства, что усиливает результат, получающийся из рассуждений Бонатти, Диаса и Виана.

Библиография: 28 названий. *УДК:* 517.987.5+517.938.5. *MSC2010:* 37C70, 37D25. *Ключевые слова и фразы:* динамическая система, аттрактор, устойчивость, частично гиперболическое косое произведение, гёльдеровское выпрямляющее отображение.

§ 1. Введение

Одним из важнейших вопросов теории динамических систем является исследование аттракторов. Стоит отметить, что существует много неэквивалентных определений того, что следует считать аттрактором динамической системы; различные определения могут быть найдены, к примеру, в работе [GI96] (см. также [G01]). Однако все известные на текущий момент примеры несовпадения аттракторов, задаваемых различными определениями, нетипичны.

Одна из существующих точек зрения состоит в том, что это — общая ситуация. А именно, что для (метрически) типичной динамической системы все определения аттракторов задают одно и то же множество, распадающееся на конечное число компонент, каждая из которых является максимальным аттрактором некоторой своей окрестности. В частности, гипотеза Палиса (см., к примеру, [Pa00], [Pa05, Sec. 2.7]) утверждает существование SRB-мер, конечность их числа, то, что объединение их бассейнов притяжения имеет полную меру, и стохастическую устойчивость компонент аттрактора-носителей SRB-мер для динамических систем из некоторого плотного множества.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 10-01-00739-а и РФФИ-CNRS 10-01-93115-НЦНИЛ_а.

© В. А. Клепцын, П. С. Салтыков, 2011

Имеется и противоположная по духу точка зрения, предполагающая существование типичных (в другом — топологическом — смысле) примеров обратного: систем с «хаотическим», с точки зрения аттракторов, поведением. В частности, в гипотезе Рюэля [Ru01] ставится вопрос о существовании типичных динамических систем, для которых для множества начальных условий положительной меры Лебега нет сходимости временны́х средних (тем самым, для таких систем не может выполняться часть заключений гипотезы Палиса; см. также [T08]).

Зачастую аттрактор разделяется на несколько компонент, каждая из которых притягивает точки из своего бассейна притяжения. В случае аттрактора Милнора (см. [I08]) такими компонентами оказываются его замкнутые инвариантные подмножества, дополнение аттрактора до которых также замкнуто.

При изучении аттракторов и бассейнов притяжения их и их отдельных компонент логично рассмотреть множество точек, не стремящихся к аттрактору. Назовем такое множество *исключительным*. По определению, исключительное множество «мало». В частности, для аттрактора Милнора «малость» исключительного множества означает равенство нулю его меры Лебега.

Естественно ожидать, что границы бассейнов притяжения отдельных компонент будут «хорошими» множествами. Однако в 1994 году И. Кан (см. [K94]) предъявил пример гладкого отображения кольца в себя, для которого аттрактор Милнора состоит из обеих компонент границы кольца, а бассейны притяжения каждой из граничных окружностей метрически всюду плотны в кольце (см. теорему 1 ниже). Этот эффект получил название *перемежаемости аттракторов*.

Пример Кана представляет собой частично гиперболическое косое произведение над утроением окружности. В той же работе он анонсировал устойчивость свойства перемежаемости аттракторов при малых возмущениях построенного примера в классе сохраняющих границу $C^{1+\alpha}$-гладких отображений кольца в себя, а также устойчивость аналогичного примера в классе диффеоморфизмов торического слоя. Для доказательства такой устойчивости предполагалось использовать частичную гиперболичность построенного примера: любое достаточно близкое отображение также обладает гладкими центральными слоями, и потому его динамика сопряжена некоторому («выпрямленному») косому произведению, близкому к исходному.

Однако доказательство этого утверждения не было им опубликовано, видимо, из-за возникающих на предложенном пути трудностей: хотя каждый индивидуальный слой центрального слоения при малом возмущении остаётся гладким, центральное слоение в целом может оказаться не абсолютно непрерывным. Поэтому, даже зная, как ведет себя типичная в смысле меры Лебега точка после сопряжения, из этого априори ничего нельзя заключить о поведении типичной по Лебегу точки под действием исходного

возмущённого отображения: сопряжение может переводить множество меры 0 в множество полной меры и обратно. Более того — множество, пересекающее каждый центральный слой по множеству меры нуль или даже по конечному числу точек, может оказаться множеством полной меры; это явление получило название «кошмар Фубини». Такие примеры были построены для произвольного слоения на гладкие слои в иллюстративной работе [Mi97] и для центрального слоения в работе [WS00]. В силу изложенного выше, даже установив наличие перемежаемости аттракторов для выпрямленного возмущенного отображения, напрямую сделать вывод о наличии перемежаемости в исходной системе нельзя.

Гипотеза Кана была доказана К. Бонатти, Л. Диасом и М. Виана в [BDV05]: хотя разобранный в § 11.1.1 их книги пример и является косым произведением, все рассуждения, использованные в доказательстве (теория Песина и искажения образов трансверсальной кривой), выдерживают C^2-малые возмущения. Также гладкие косые произведения с базой окружность и слоем отрезок исследовались в работе [BM07], где перемежаемость была установлена для широкого класса таких косых произведений. Наконец, необходимо упомянуть работу П. Блехера, М. Любича и Р. Роэдера [BLR], в которой описываются бассейны притяжения для конкретной, происходящей из иерархической модели Изинга, динамической системы на цилиндре.

Настоящая работа посвящена доказательству гипотезы Кана (как для случая кольца, так и для случая торического слоя) с помощью техники выпрямления и гёльдеровых оценок. Оказывается, применение этой техники позволяет усилить результат Бонатти, Диаса и Виана, показав дополнительно, что хаусдорфова размерность исключительного множества в обоих случаях строго меньше размерности фазового пространства. (Впрочем, нам кажется, что сама возможность такого доказательства — в связи с множеством ситуаций, в которых техника выпрямления в сочетании с гёльдеровыми оценками применяется, см., к примеру, [GI99, G06, Os10, GIKN05], — уже представляет интерес.)

А именно, как было обнаружено Городецким в [GI99] (см. также [G06]), при возмущении частично гиперболического косого произведения центральное слоение, а значит, и выпрямляющее отображение, оказываются *гёльдеровыми*. Более того, в работе Ильяшенко и Негута [IN10] доказано, что показатель Гёльдера в данном случае стремится к 1 при уменьшении возмущения. Это и позволяет нам доказать требуемое: вместо собственно перемежаемости мы устанавливаем более сильные утверждения (такие, как оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества), которые, однако же, «почти не ухудшаются» при гёльдеровом сопряжении.

1.1. Структура статьи. Мы сформулируем основные результаты — теоремы 1 и 2 — в § 2. Параграф 3 будет посвящён изложению идей доказатель-

ства; в пункте 3.2 мы сформулируем результаты для гёльдеровых косых произведений (теоремы 3 и 4), из которых теоремы 1 и 2 выводятся, и проведём этот вывод в пункте 3.3. В § 4 мы напомним необходимые вспомогательные сведения — вероятностную и динамическую теоремы о больших уклонениях и специальную эргодическую теорему. Параграфы 5 и 6 посвящены соответственно доказательству теорем 3 и 4.

1.2. Благодарности. Авторы благодарны Ю. С. Ильяшенко за постановку задачи и за полезные обсуждения, М. Л. Бланку за сообщение о результате Л.-С. Янг, К. Бонатти, Д. А. Рыжову и М. Ю. Любичу за ценные дискуссии и Дж. Милнору и А. Бонифант за интерес к работе.

§ 2. Формулировка основных результатов

Нашими основными результатами являются следующие два усиливающих заключение гипотезы Кана (и теоремы Бонатти—Диаса—Виана) утверждения. (Вторая часть теоремы 1 уже была доказана в [IKS08], однако мы приводим её здесь для полноты изложения.)

Теорема 1. *Существует открытое множество V в пространстве C^2-гладких отображений кольца $X^K = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ на себя, сохраняющих границу, каждое отображение f из которого обладает следующими свойствами:*

(i) *Для почти любой (по мере Лебега) начальной точки $p \in X^K$ ее орбита стремится к одной из двух компонент границы:*

$$f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_0^K := \mathbb{S}^1 \times \{0\} \tag{1}$$

или

$$f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_1^K := \mathbb{S}^1 \times \{1\}. \tag{2}$$

Более того, исключительное множество — множество точек, итерации которых не стремятся ни к A_0^K, ни к A_1^K, — имеет хаусдорфову размерность, меньшую и отделённую от 2 равномерно по множеству V.

(ii) *Бассейны притяжения $\mathcal{B}_j^K := \{p \in X^K \mid f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_j^K\}$, $j = 0, 1$, являются метрически всюду плотными, т. е. для любого открытого множества $U \subset X^K$ имеем: $\mu_{\mathrm{Leb}}(\mathcal{B}_0^K \cap U) > 0$, $\mu_{\mathrm{Leb}}(\mathcal{B}_1^K \cap U) > 0$.*

Теорема 2. *Существует открытое множество V в пространстве C^2-диффеоморфизмов «торического слоя» $X^T = \mathbb{T}^2 \times [0,1]$ на себя, каждый диффеоморфизм f из которого обладает следующими свойствами:*

(i) *Множество точек x, итерации которых не стремятся ни к одной из компонент границы $A_0^T = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$, $A_1^T = \mathbb{T}^2 \times \{1\}$, имеет нулевую меру Лебега. Более того, хаусдорфова размерность этого множества строго меньше и отделена от 3 равномерно по множеству V.*

(ii) *Бассейны притяжения* $\mathcal{B}_j^T := \{p \in \mathbb{T}^2 \times [0,1] \mid f^n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_j^T\}$, $j = 0, 1$, *являются метрически всюду плотными в* $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.

Отметим, что теорема 2 представляется более естественной по формулировке, чем теорема 1: для класса диффеоморфизмов торического слоя на себя условие сохранения границы выполняется автоматически (в отличие от отображений кольца, для которых его приходится оговаривать особо).

§ 3. Конструкция И. Кана и гёльдеровы косые произведения

3.1. Идея И. Кана. Первый шаг соответствует предложенной И. Каном в [K94] схеме. А именно, искомую область для теорем 1 и 2 мы будем искать в достаточно малой окрестности мягких косых произведений над удвоением окружности и над линейным диффеоморфизмом Аносова соответственно.

Рассуждения в этих двух случаях, по большей части, совершенно аналогичны друг другу, и мы начнём проводить их одновременно. Пусть B это либо окружность S^1, либо тор $\mathbb{T}^2$; обозначим через μ меру Лебега на B, и пусть $T\colon B \to B$ — соответственно, отображение удвоения окружности $T(y) = 2y \bmod 1$ либо линейный диффеоморфизм Аносова двумерного тора

$$T((y_1, y_2)) = M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad M \in SL(2,\mathbb{Z}), \quad |\operatorname{tr} M| > 2.$$

Наконец, обозначим $X := B \times [0,1]$, $A_0 = B \times \{0\}$, $A_1 = B \times \{1\}$.

Рассмотрим для начала одно косое произведение:

$$F\colon B \times [0,1] \to B \times [0,1], \quad F(y,x) = (T(y), f_y(x)), \tag{3}$$

где $f_y(x)$ — зависящее от параметра $y \in B$ семейство диффеоморфизмов отрезка $[0,1]$.

Допустим, что оно удовлетворяет следующим двум условиям.

(У1) Центральные (в направлении «вдоль слоя») показатели Ляпунова компонент границы $x = 0$ и $x = 1$ по отношению к (инвариантной) мере Лебега μ отрицательны:

$$\lambda_0 = \int_B \log(f_y)'(0)\, d\mu(y) < 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \int_B \log(f_y)'(1)\, d\mu(y) < 0. \tag{4}$$

(У2) Найдутся периодические точки $y_{(0)}, y_{(1)}$ базы B,

$$y_{(0)} = T^{k_0}(y_{(0)}), \quad y_{(1)} = T^{k_1}(y_{(1)}),$$

такие что композиции

$$f_{T^{k_0-1}(y_{(0)})} \circ f_{T^{k_0-2}(y_{(0)})} \circ \ldots \circ f_{y_{(0)}} \quad \text{и} \quad f_{T^{k_1-1}(y_{(1)})} \circ f_{T^{k_1-2}(y_{(1)})} \circ \ldots \circ f_{y_{(1)}}$$

за соответствующие периоды имеют каждая ровно 2 неподвижных точки,

$x=0$ и $x=1$, причем все эти точки гиперболические, и для первой композиции $x=0$ притягивает, а $x=1$ отталкивает, а для второй наоборот.

Тогда, с одной стороны, в силу условий на показатели Ляпунова, поведение типичной точки из малой окрестности компоненты границы $x=0$ (или $x=1$), будет описываться соответствующей «линейной» динамикой. Поэтому все бóльшая (при уменьшении окрестности границы $x=0$) доля точек будет стремится к $x=0$. С другой стороны, поскольку в любой малой области есть точки, y-координата которых оказывается равной или очень близкой к одному из прообразов $y_{(0)}$ (или $y_{(1)}$) — эти прообразы всюду плотны, — то в любой области есть точки, притягивающиеся как к A_0, так и к A_1. (Несколько более сложные рассуждения позволяют обосновать и то, что либо к A_0, либо к A_1 в данном косом произведении стремятся итерации почти любой начальной точки.)

Отметим, что, поскольку нас интересует малая окрестность F, о ее элементах мы можем думать как о возмущениях F. Далее, предположим, что отображения f_y достаточно близки к тождественному. Тогда соответствующее им косое произведение оказывается *частично гиперболическим* (в случае косого произведения над удвоением окружности — в том смысле, в котором это можно утверждать про необратимые отображения, см. ниже). Стандартные рассуждения (см. [HPS77], [GI99]) показывают, что любое малое возмущение $\widetilde{F}$ отображения F обладает гладкими центральными слоями, близкими к центральным слоям исходного произведения. Более того, динамика на множестве центральных слоёв оказывается сопряжённой исходному отображению T базы.

Тем самым отображение $\widetilde{F}$ оказывается сопряжённым (с помощью сохраняющего x-координату сопряжения $\Psi\colon (y,x)\mapsto(\psi(y,x),x)$, где ψ — постоянное на центральных слоях отображение, сопрягающее динамику на них с исходной динамикой в базе) некоторому косому произведению вида

$$G\colon (y,x)\mapsto (T(y),\tilde{f}_y(x)), \tag{5}$$

с гладкими и близкими к исходным отображениями по слою $\tilde{f}_y$ и с тем же отображением в базе.

После этого хотелось бы (и в этом состоял план И. Кана) завершить доказательство, сказав, что условия на семейство отображений f_y открыты, и поэтому малое возмущение $\tilde{f}_y$ исходного семейства им также удовлетворяет. К сожалению, это рассуждение не проходит по уже упоминавшейся выше причине: хотя индивидуальные центральные слои и оказываются гладкими, центральное слоение может быть даже не абсолютно непрерывным. А тем самым не абсолютно непрерывным может быть и выпрямляющее отображение Ψ.

Поэтому нам потребуется более аккуратный анализ как доказываемых свойств, так и поведения сопрягающего отображения.

3.2. Оценки хаусдорфовой размерности. Для проведения такого анализа сначала заметим, что у отображения $\widetilde{F}$, как было показано в [GI99, теорема 3] (см. также [G06]), центральное слоение оказывается гёльдеровым. Более того, в работе [IN10] доказано, что при возмущении косых произведений над удвоением окружности или над линейным диффеоморфизмом тора, при уменьшении окрестности отображения F показатели Гёльдера центрального слоения равномерно по окрестности стремятся к 1. Наконец, для любого фиксированного показателя соответствующая константа остается равномерно ограниченной по достаточно малой окрестности F.

Для полноты изложения приведём здесь основную идею доказательства этих утверждений в [IN10]. Как центрально-устойчивое, так и центрально-неустойчивое слоения инвариантны относительно динамики; при этом условие Гёльдера автоматически выполняется для «далёких» точек. С другой стороны, при достаточной малости возмущения косого произведения, α-гёльдеровость не будет ухудшаться при взятии соответствующего образа или прообраза — что и позволяет распространить условие с «далёких» на все пары точек. Наконец, центральное слоение получается пересечением центрально-устойчивого и центрально-неустойчивого слоения, и потому также оказывается α-гёльдеровым.

Благодаря упомянутым выше результатам, мы можем доказывать теоремы 1 и 2, получая для косого произведения (5) более сильные, но сохраняющиеся (или, точнее, не сильно ухудшающиеся) при гёльдеровом сопряжении утверждения. Такими утверждениями оказываются оценки хаусдорфовой размерности исключительного множества — и связанные с этой размерностью оценки; мы сформулируем соответствующие утверждения ниже, см. теоремы 3 и 4.

Кроме того, зависимость $\tilde{f}_y$ от y оказывается гёльдеровой — в силу той же гёльдеровости сопряжения. Поэтому мы будем работать в классе гёльдеровых косых произведений.

Рассмотрим пространство косых произведений со слоем отрезок. Снабдим пространство диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^2([0,1])$ метрикой

$$d(f,g) = \max(\mathrm{dist}_{C^2}(f,g), \mathrm{dist}_{C^2}(f^{-1},g^{-1}))$$

и будем рассматривать косые произведения как непрерывные отображения из базы B в $\mathrm{Diff}^2([0,1])$ с соответствующей метрикой пространства непрерывных отображений $d_{\mathcal{H}}(F,\tilde{F}) = \max_{y\in B} d(f_y, \tilde{f}_y)$.

Определение 1. Для любых C и α скажем, что косое произведение — *гёльдерово класса* (C,α), если как отображение из B в $\mathrm{Diff}^2([0,1])$ оно гёльдерово с показателем α и константой C. Мы обозначим множество всех гёльдеровых косых произведений класса (C,α) через $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$.

Легко видеть, что пространство $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$ является замкнутым подмножеством множества всех косых произведений.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся ещё два технических условия:

(У3) После замены координат $\Phi\colon (0,1)\to\mathbb{R}$, $z=\Phi(x)=\ln(x/(1-x))$, производные отображений $\tilde f_y$ оказываются строго больше единицы (но, вообще говоря, не отделены от неё):

$$\forall y\in B,\ \forall z\in\mathbb{R}\quad (\Phi\circ\tilde f_y\circ\Phi^{-1})'(z)>1; \tag{6}$$

(У3′)

$$\forall y\in B\quad \frac{(\tilde f_y)''(0)}{2(\tilde f_y)'(0)}-1+(\tilde f_y)'(0)>0,\quad -\frac{(\tilde f_y)''(1)}{2(\tilde f_y)'(1)}-1+(\tilde f_y)'(1)>0. \tag{7}$$

Примеры косых произведений, удовлетворяющих всем условиям У1—У3′, приведены в конце пункт.

Первый из искомых результатов для косых произведений — следующая

Теорема 3 (оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества)**.** *Пусть заданы произвольные $C>0$, $\alpha\in(0,1)$ и $G(y,x)=(T(y),\tilde f_y(x))$ — гёльдерово косое произведение класса (C,α), удовлетворяющее условиям У1 и У3. Тогда хаусдорфова размерность множества точек (x,y), не стремящихся ни к A_0, ни к A_1, строго меньше полной размерности фазового пространства (2 и 3 для произведений над окружностью и над тором соответственно).*

Более того, если система удовлетворяет дополнительно ещё и условию У3′, то эта размерность отделена от размерности пространства равномерно по достаточно малой окрестности исходного косого произведения в пространстве $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$ гёльдеровых косых произведений.

Замечание 1. Условие У3′ в теореме 3 требуется для того, чтобы при малых возмущениях сохранялось условие У3 — растяжение в новых координатах в окрестности границы $A_0\cup A_1$ (см. предложение 2 ниже).

Замечание 2. Для C^3-гладких систем достаточным условием для выполнения условия У3 является (использованная в [BM07]) отрицательность производной Шварца диффеоморфизмов $\tilde f_y$. Это связано с тем, что отображения с отрицательной производной Шварца увеличивают двойное отношение четырёх точек, а расстояние в новых координатах оказывается логарифмом двойного отношения в старых:

$$\Phi(x_1)-\Phi(x_2)=\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)-\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)=$$
$$=\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}:\frac{x_2}{1-x_2}\right)=\ln[0:1:x_1:x_2].$$

Остаётся сформулировать утверждение, из которого будет следовать метрическая плотность бассейнов притяжения. Мы уже не можем напрямую воспользоваться оценкой хаусдорфовой размерности. Действительно, мы хотим доказать, что в любой окрестности есть положительная мера точек, стремящихся как к A_0, так и к A_1. Тем самым мера *не* стремящихся к A_0 точек

должна быть положительна — а потому дополнение к бассейну притяжения A_0 должно иметь полную хаусдорфову размерность. (Разумеется, те же рассуждения справедливы и в отношении бассейна притяжения A_1.)

Однако, как оказывается, мы можем покрыть множество «выбывающих из стремления» к той или иной границе точек окрестности шарами так, что оценка их совокупной меры будет иметь вид убывающей геометрической прогрессии. А поскольку гёльдерово сопряжение с близким к 1 показателем может лишь мало изменить знаменатель такой прогрессии — оценка на её сумму почти не изменится, в частности, эта сумма будет меньше полной меры окрестности. Утверждение о таком покрытии сформулировано в следующей теореме. Следствие 1 и замечание 3 ниже выводят из её заключения требуемую метрическую плотность бассейнов притяжения.

Обозначим через $U_r(p)$ шар в базе B с радиусом r и центром в точке p. Ниже в этом параграфе под шарами понимаются шары в базе. Кроме того, обозначим через λ_u показатель Ляпунова растяжения системы в базе: положим λ_u равным 2 для случая удвоения окружности и модулю большего 1 по абсолютной величине собственного значения матрицы M для случая линейного диффеоморфизма Аносова $M\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$.

Определение 2. Будем говорить, что для косого произведения $G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x))$ в точке $P = (p,x)$, принадлежащей бассейну притяжения $\mathcal{B}_0 := \{Q \mid G^n(Q) \xrightarrow[n\to\infty]{} A_0\}$ границы A_0 имеет место (c_1, c_2)-*горизонтальная плотность бассейна* $\mathcal{B}_0$, если выполнено следующее:

- $c_1 > 0$, $0 < c_2 < \dim B$;
- для всех достаточно больших n множество тех точек «горизонтальной окрестности» точки P,

$$U_n := U_{\lambda_u^{-n}}(p) \times \{x\},$$

образы которых не стремятся к A_0, может быть покрыто объединением по $m \geqslant (1+c_1)n$ объединений не более чем $\lambda_u^{c_2(m-n)}$ шаров радиуса λ_u^{-m}.

Теорема 4 (усиленная метрическая плотность)**.** *Пусть заданы произвольные $C > 0$, $\alpha \in (0,1)$ и $G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x))$ — гёльдерово косое произведение класса (C,α), удовлетворяющее условиям* У1 *и* У2. *Тогда найдутся константы $c_1 > 0$, $c_2 < \dim B$, такие что для любой точки $P = (p,x)$ из устойчивого многообразия точки $(y_{(0)}, 0)$ (где $y_{(0)}$ — точка из условия* У2) *имеет место (c_1, c_2)-горизонтальная плотность бассейна $\mathcal{B}_0$.*

Более того, константы c_1 и c_2 могут быть выбраны равномерно по малой окрестности исходной системы в пространстве $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 4 в любой окрестности любой точки устойчивого многообразия $W^s(y_{(0)}, 0)$ (соответственно $W^s(y_{(1)}, 1)$) множество $\mathcal{B}_0$ (соответственно $\mathcal{B}_1$) тех точек, чьи итерации стремятся к A_0 (соответственно к A_1), имеет положительную меру Лебега.*

Доказательство следствия 1. Отметим, что достаточно вывести положительность меры «горизонтального» сечения такого множества — положительность меры пересечения $\{q \in B \mid G^n(q,x) \to A_0\}$ со сколь угодно малой окрестностью точки p. Действительно, все точки $(p,\bar{x})$ с $\bar{x} < x$ также принадлежат $W^s(y_{(0)},0)$, и потому проходящие через них горизонтальные сечения множества $\mathcal{B}_0$ также должны будут иметь положительную меру. После этого применение теоремы Фубини к горизонтальным сечениям завершает доказательство.

Пусть n достаточно велико; оценим снизу меру стремящихся к A_0 точек вида (q,x) для $q \in U_{\lambda_u^{-n}}(p)$. А именно, мера шара радиуса λ_u^{-m} отличается от меры шара λ_u^{-n} в $\lambda_u^{-(m-n)\cdot\dim B}$ раз, и, воспользовавшись заключением теоремы, имеем

$$\frac{\mu\{q \in U_{\lambda_u^{-n}}(p) \mid G^n(q,x) \to A_0\}}{\mu(U_{\lambda_u^{-n}}(p))} \geqslant 1 - \sum_{m=(1+c_1)n}^{\infty} \lambda_u^{-(m-n)\cdot\dim B} \cdot \lambda_u^{c_2(m-n)} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{m=(1+c_1)n}^{\infty} \lambda_u^{-(m-n)\cdot(\dim B - c_2)} = 1 - \frac{\lambda_u^{-c_1 n(\dim B - c_2)}}{1-\lambda_u^{-(\dim B - c_2)}}. \quad (8)$$

В частности, при всех достаточно больших n мы получаем оценку снизу искомой меры положительным числом — что и завершает доказательство. □

Замечание 3. Заключение теоремы 4 (и тем самым выполнение следствия 1) сохраняется при гёльдеровых «горизонтальных» сопряжениях вида $\Psi(y,x) = (\psi(y,x),x)$ с достаточно близким к 1 показателем Гёльдера.

Доказательство. При таком сопряжении с показателем Гёльдера α образ шара радиуса λ_u^{-n} содержит шар радиуса $c\lambda_u^{-n/\alpha}$, а образы шаров радиуса λ_u^{-m} покрываются шарами радиуса $C\lambda_u^{-\alpha m}$. Отсюда сразу следует сохранение (при α, достаточно близком к 1) заключения теоремы 4 (в оценке (8) всё ещё будет сходящаяся геометрическая прогрессия, причём с мало изменившимся знаменателем).

С другой стороны, поскольку такое сопряжение сохраняет горизонтальное слоение (и применимость к нему теоремы Фубини), сохраняется и выполнение заключения следствия 1. □

3.3. Вывод основных результатов из теорем для косых произведений. Проведём строго рассуждения, намеченные в конце § 3.1, выведя из теорем 3 и 4 основные результаты для гладких отображений — теоремы 1 и 2.

Предложение 1. (i) *Пусть отображение* $F\colon (y,x) \mapsto (2y \bmod 1, f_y(x))$ — *сохраняющее границу* C^2*-гладкое отображение кольца* $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ *на себя, являющееся косым произведением над удвоением окружности и удовлетворяющее условиям У1, У2, У3 и У3′, для которого отображения* f_y *достаточно близки к тождественному. Тогда в некоторой его окрестности в пространстве*

сохраняющих границу C^2-гладких отображений кольца на себя, выполнены заключения теоремы 1.

(ii) *Пусть отображение $F\colon (y,x)\mapsto (T(y), f_y(x))$ — C^2-гладкий частично гиперболический диффеоморфизм «торического слоя» $\mathbb{T}^2\times[0,1]$ на себя, являющийся косым произведением над линейным диффеоморфизмом Аносова и удовлетворяющий условиям У1, У2, У3 и У3′. Тогда в некоторой его окрестности в пространстве C^2-диффеоморфизмов торического слоя на себя, выполнены заключения теоремы 2.*

Доказательство. В обоих случаях отображения f_y достаточно близки к тождественному, поэтому отображение F является *частично гиперболическим* — в случае (i) в том понимании этих слов, которое может быть применимо к необратимым отображениям.

А именно, в случае (i) поднятие F на универсальную накрывающую $\mathbb{R}\times[0,1]$ над кольцом допускает *доминирующее разложение* (*dominated splitting*, см. [HPS77]), причём в доминирующем направлении динамика равномерно растягивает. Проецируя соответствующие слоения, сильно неустойчивое и центральное, обратно на $\mathbb{S}^1\times[0,1]$, мы видим, что вертикальные отрезки являются центральными слоями, а центральное слоение может быть найдено путем итерирования операции взятия полного F-прообраза слоения, начиная со слоения, близкого к вертикальному (с точки зрения условия конусов). Отметим, в целях полноты изложения, что сильно неустойчивое многообразие точки $p\in\mathbb{S}^1\times[0,1]$ нельзя определить однозначно — оно зависит от выбора последовательности прообразов; сильно устойчивое многообразие дискретно и состоит из прообразов образов данной точки, т. е. точек, динамика которых «склеивается» с динамикой данной точки.

Соответствующее доминирующему разложению условие конусов сохраняется при малых возмущениях — поэтому любое достаточно C^2-близкое к F отображение $\widetilde{F}$ также обладает центральным слоением.

В силу уже упомянутого ранее результата Городецкого [G06, GI99] для любого малого возмущения $\widetilde{F}$ его центральные слои гёльдеровы, а динамика на их множестве сопряжена исходной динамике в базе: существует *гёльдерово* отображение $\psi\colon \mathbb{S}^1\times[0,1]\to\mathbb{S}^1$, полусопрягающее $\widetilde{F}$ и отображение удвоения окружности, причем $\psi(y,x)=\psi(\bar{y},\bar{x})$ тогда и только тогда, когда (y,x) и $(\bar{y},\bar{x})$ лежат на одном и том же центральном слое $\widetilde{F}$.

Аналогично, в случае (ii) отображение F частично гиперболично, его центральные слои компактны — поэтому любой близкий диффеоморфизм $\widetilde{F}$ также имеет компактные центральные слои. Как и в случае (i) (см. [GI99]), эти слои гёльдерово зависят от точки, а динамика на их множестве оказывается сопряженной исходному отображению в базе $T\colon\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$: найдется гёльдерово отображение $\psi\colon\mathbb{T}^2\times[0,1]\to\mathbb{T}^2$, полусопрягающее $\widetilde{F}$ с T, для которого $\psi(y,x)=\psi(\bar{y},\bar{x})$ тогда и только тогда, когда точки (y,x) и $(\bar{y},\bar{x})$ лежат на одном и том же центральном слое.

Наконец, как утверждает результат Ильяшенко и Негута (см. [IN10]), при стремлении возмущенного отображения $\tilde{F}$ к исходному как в случае (i), так и в случае (ii) показатель Гёльдера зависимости центральных слоёв от точки (или, что то же самое, показатель Гёльдера отображения ψ) стремится к 1. Более того, имеет место равномерная гёльдеровость: для любого фиксированного $\alpha < 1$ для отображений $\tilde{F}$ из достаточно малой окрестности исходного отображения F, соответствующая показателю α константа Гёльдера отображения ψ равномерно ограничена.

Тем самым в обоих случаях (i) и (ii) отображение $\Psi(y,x) = (\psi(y,x), x)$ гёльдерово сопрягает отображение $\widetilde{F}$ из достаточно малой окрестности отображения F с некоторым косым произведением $G(y,x) \to (Ty, \tilde{f}_y(x))$. Более того, как следует из равномерной гёльдеровости слоёв, выбрав достаточно малую окрестность F, мы можем взять показатель α и константу C Гёльдера одними и теми же — «выпрямленное» косое произведение G будет лежать в малой окрестности F в пространстве $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$.

Для нового косого произведения в достаточно малой (в смысле метрики $d_{\mathcal{H}}$) окрестности исходного, в силу теоремы 3, хаусдорфова размерность множества точек

$$E := \{(y,x) \mid G^n(y,x) \not\to A_0 \cup A_1\}$$

строго меньше размерности фазового пространства и, более того, отделена от этой размерности некоторой константой $d_0 < \dim X$.

С другой стороны, лемма Фальконера утверждает, что при гёльдеровом сопряжении с показателем α хаусдорфова размерность изменяется не более чем в $1/\alpha$ раз. Положим

$$d' := \frac{d_0 + \dim X}{2}, \quad \alpha' = \frac{d_0}{d'}.$$

Тогда $\alpha' < 1$, поэтому в некоторой окрестности отображения F сопряжение Ψ гёльдерово с показателем не менее чем $\alpha' < 1$. Тем самым хаусдорфова размерность множества не стремящихся к границе точек для любого отображения $\widetilde{F}$ из этой окрестности оценивается как

$$\dim_H \{(y,x) \mid \widetilde{F}^n(y,x) \not\to A_0 \cup A_1\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha'} \cdot \dim_H \{(y,x) \mid G^n(y,x) \not\to A_0 \cup A_1\} \leqslant d_0 \cdot \frac{d'}{d_0} = d', \quad (9)$$

и поэтому строго меньше размерности фазового пространства. Тем самым заключения (i) теорем 1 и 2 доказаны.

Далее, для любой точки из $W^s(y_{(0)}, 0)$ (соответственно $W^s(y_{(1)}, 1)$) в силу следствия 1 и замечания 3 мера точек, стремящихся к A_0 или к A_1, положительна.

С другой стороны, в силу условия У2, оба этих устойчивых многообразия плотны в $B \times [0,1]$ (поскольку они всюду плотны для сопряженного $\widetilde{F}$ косого произведения G). Тем самым каждый из бассейнов притяжения $B(A_0)$ и

$B(A_1)$ метрически всюду плотен в $B \times [0,1]$, и мы получаем заключение (ii) теорем 1 и 2. □

Предложение 2. *Одновременное выполнение условий УЗ и УЗ′ сохраняется при $d_{\mathcal{H}}$-малых возмущениях косого произведения.*

Доказательство. Легко видеть, что условие УЗ′ открыто, так же как и выполнение условия растяжения (6) в условии УЗ в любой компактной (отделённой от 0 и от 1 в координате x) области.

Рассмотрим теперь окрестность A_0 (случай окрестности A_1 полностью аналогичен). Лемма Адамара позволяет представить $\tilde{f}_y(x) = xh_y(x)$, где h_y — C^1-гладкое отображение; более того, в силу явной интегральной формулы для h_y:

$$h_y(x) = \int_0^1 (\tilde{f}_y)'(tx)\,dt,$$

при C^2-малых возмущениях $\tilde{f}_y$ отображения h_y меняются C^1-мало.

Выпишем теперь производную в координатах $z = \Phi(x)$: поскольку $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$, имеем

$$(g_y)'(z) = \frac{(\tilde{f}_y)'(x)\Phi'(\tilde{f}_y(x))}{\Phi'(x)} = \frac{(xh_y'(x) + h_y(x)) \cdot x(1-x)}{xh_y(x) \cdot (1 - xh_y(x))} =$$
$$= \frac{1-x}{1-xh_y(x)} \cdot \left(1 + x \cdot \frac{h_y'(x)}{h_y(x)}\right) = 1 + \left(\frac{h_y'(x)}{h_y(x)} + h_y(x) - 1\right)x + O(x^2).$$

Соответственно, если коэффициент перед x больше нуля, то при достаточно малых x производная g_y' в точке $z = \Phi(x)$ больше единицы. Более того, как несложно видеть, интервал, на котором такая оценка имеет место, имеет отделённую от нуля длину (при C^1-малых возмущениях h_y, которые соответствуют C^2-малым возмущениям $\tilde{f}_y$). Наконец, из соображений равномерной непрерывности для существования таких интервалов достаточно потребовать строгого неравенства при $x = 0$:

$$\forall y \in B \quad \frac{h_y'(0)}{h_y(0)} + h_y(0) - 1 > 0. \tag{10}$$

Но условие (10) в точности эквивалентно части неравенства (7) условия УЗ′ для производных в нуле: $h_y(0) = (\tilde{f}_y)'(0)$, $h_y'(0) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_y)''(0)$, поэтому

$$\frac{h_y'(0)}{h_y(0)} + h_y(0) - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(\tilde{f}_y)''(0)}{2(\tilde{f}_y)'(0)} - 1 + (\tilde{f}_y)'(0) > 0.$$

Аналогично рассматривается окрестность $x = 1$. Итак, при выполнении условия УЗ′ условие УЗ сохраняется при малых возмущениях. □

3.4. Примеры. Остаётся привести примеры гладких косых произведений над удвоением окружности и над линейным диффеоморфизмом Аносова тора, удовлетворяющих упомянутым условиям. Для этого обозначим через $f_{a,t}(x)$ отображение последования за время t векторного поля $v_a(x) = x(1-x)(x-a)\frac{\partial}{\partial x}$, зависящего от вещественного параметра a (см. рис. 1).

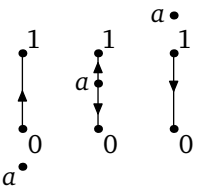

Рис. 1. Векторное поле v_a при $a<0$, $a\in(0,1)$, $a>1$.

Предложение 3. *Пусть выбраны периодические точки базы*

$$y_{(0)} = T^{k_0}(y_{(0)}), \quad y_{(1)} = T^{k_1}(y_{(1)})$$

и гладкая функция $a\colon B\to\mathbb{R}$, *такая что*

- $a(T^j(y_{(0)}))>1$, $j=1,2,\dots,k_0$;
- $a(T^j(y_{(1)}))<0$, $j=1,2,\dots,k_1$;
- $0<\int_B a(y)\,d\mu(y)<1$.

Тогда при любом фиксированном $t>0$ *гладкое косое произведение*

$$F(y,x) = (T(y), f_y(x)), \quad f_y(x) = f_{a(y),t}(x) \tag{11}$$

удовлетворяет условиям У1, У2, У3 и У3′.

Более того, выбирая достаточно малое t, *диффеоморфизмы* f_y *можно сделать сколь угодно близкими к тождественному.*

Доказательство предложения 3. Переписав векторное поле v_a в координате $z=\Phi(x)$, мы видим, что оно принимает вид $u_a(z) = (\Phi^{-1}(z)-a)\frac{\partial}{\partial z}$. В частности, поскольку функция $\Phi^{-1}(z)-a$ монотонно возрастает, производная отображения последования $g_{a,t}$ поля $u(z)$ за любое фиксированное время $t>0$ всюду больше единицы, откуда следует условие У3.

Более того, несложно проверить, что для отображения последования $f_{a,t}$ поля v_a (для которого $g_{a,t} = \Phi\circ f_{a,t}\circ\Phi^{-1}$) выполнено условие У3′. Действительно, обозначим через $z(\theta)$ и $x(\theta)$ решения $\dot x = v_a(x)$ и $\dot z = u_a(z)$ с начальными условиями $x(0)=x_0$ и $z(0)=z_0$ соответственно. Тогда

$$g'_{a,t}(z_0) = \int_0^t (u_a)'(z(\theta))\,d\theta = \int_0^t \left.\frac{\partial(\Phi^{-1}(z)-a)}{\partial z}\right|_{z(\theta)} d\theta =$$
$$= \int_0^t x(\theta)(1-x(\theta))\,d\theta = t\cdot x_0 + O(x_0^2).$$

С другой стороны, в левых частях неравенств (7) из условия У3′ стоят коэффициенты перед x в разложении производной в точках $x=0$ и $x=1$. Для отображений $f_{a,t}$ в точке $x=0$, как следует из предыдущей выкладки, такой коэффициент равен t, и неравенство (7) выполнено. Аналогично разбирается случай $x=1$.

Далее, $f'_{a,t}(0)=e^{-at}$, $f'_{a,t}(1)=e^{-t(1-a)}$, откуда центральные показатели Ляпунова для окружностей $x=0$ и $x=1$ равны

$$\lambda_0 = -t\cdot\int_B a(y)\,dy, \quad \lambda_1 = -t\cdot\int_B (1-a(y))\,dy$$

соответственно. Поэтому выполнение условия У1 следует из ограничения

$$0 < \int_B a(y)\,dy < 1.$$

Кроме того, при $a<0$ векторное поле v_a направлено везде вверх на интервале $(0,1)$, а при $a>1$ — везде вниз (см. рис. 1). Поэтому и из условий на $a(T^j(y_{(0)}))$ и $a(T^j(y_{(1)}))$ следует выполнение условия У2.

Тем самым для косого произведения $F(y,x)=(T(y), f_{a(y),t}(x))$ выполняются все условия У1, У2, У3, У3′.

Наконец, устремляя t к нулю, мы можем получить косое произведение, отображения вдоль слоя которого сколь угодно близки к тождественному. □

Поскольку при достаточно близких к тождественному отображениях f_y соответствующее косое произведение оказывается частично гиперболическим, этот пример вместе с предложением 1 завершает вывод теорем 1 и 2 из теорем 3 и 4.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 3 и 4.

§ 4. Инструментарий: большие уклонения и специальная эргодическая теорема

Основными инструментами в доказательстве теорем 3 и 4 будут так называемая *специальная эргодическая теорема* и вероятностная и динамическая версии *теоремы о больших уклонениях*.

А именно, пусть задана гладкая динамическая система $f\colon X\to X$ с мерой Синая—Рюэля—Боуэна m: для почти любой по мере Лебега точки $x\in X$ и для любой непрерывной функции ϕ, выполнено

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(f^j(x)) \to \int_X \phi\,dm =: \bar{\phi}.$$

Скажем, что для такой системы выполняется *специальная эргодическая теорема*, если множество точек, в которых временны́е средние «сильно от-

клоняются» от пространственных, не просто имеет нулевую меру Лебега, но и его хаусдорфова размерность меньше размерности фазового пространства:

$$\forall \phi \in C(X) \ \ \forall \varepsilon > 0$$
$$\dim_H \left\{ x \in X \mid \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) - \bar{\phi} \right| \geqslant \varepsilon \right\} < \dim X.$$

Идея специальной эргодической теоремы принадлежит, насколько нам известно, Ю. С. Ильяшенко (также в схожей ситуации хаусдорфову размерность множества точек с сильным уклонением временны́х средних исследовали Б. М. Гуревич и А. А. Темпельман [GT02]). В частности, специальная эргодическая теорема выполняется для отображения удвоения окружности [IKS08] и для линейного диффеоморфизма Аносова двумерного тора [S10].

Более того, можно доказать, что специальная эргодическая теорема имеет место для любой динамической системы, для которой выполняется (динамическая) теорема о больших уклонениях. Это доказательство выходит за рамки настоящей статьи (и является предметом [KR]). Напомним, что в теории вероятностей теорема о больших уклонениях позволяет оценить вероятность того, что среднее арифметическое независимых одинаково распределённых случайных величин сильно отклоняется от их математического ожидания (см., к примеру, обзор Варадана [Var08]):

Теорема (о больших уклонениях). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с* $E\xi = 0$ *и конечным экспоненциальным моментом:* $Ee^{a|\xi|} < \infty$ *для некоторого малого* $a > 0$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *существуют* $C, \delta > 0$: *для любого* $n > 0$

$$P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} > \alpha\right) < Ce^{-\delta n}. \tag{12}$$

Иными словами, вероятность «выхода» среднего арифметического за любой фиксированный уровень $\alpha > 0$ *убывает экспоненциально по* n.

Такая постановка задачи естественным образом переносится на динамические системы: для гладкой динамической системы $f\colon X \to X$ с SRB-мерой m выполняется (динамическая) теорема о больших уклонениях, если

$$\forall \phi \in C(X) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists C, \beta > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\mathrm{Leb}\left\{ x\colon \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) - \int_X \phi \, dm \right| \geqslant \varepsilon \right\} < Ce^{-\beta n}. \tag{13}$$

Вопросом выполнения теоремы о больших уклонениях для различных динамических систем занималась Л.-С. Янг; она доказала (см. [Y90, Theorem 2.(2) и п. (ii) последующей дискуссии] и [Y03, раздел 3.3]), в частности, что оценка (4) имеет место для гиперболических динамических систем:

Теорема (L.-S. Young, [Y90]). *Для гиперболических динамических систем выполняется принцип больших уклонений* (4).

Тем самым (см. [KR]) для таких систем имеет место и специальная эргодическая теорема.

Мы закончим этот параграф замечанием, что оценка хаусдорфовой размерности множества точек с заданным большим уклонением оказывается равномерной по малым возмущениям усредняемой функции ϕ.

§ 5. Оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 3.

5.1. Два типа исключительных точек. Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_0^\varepsilon(y) := \max_{0\leqslant x\leqslant\varepsilon} \frac{\tilde{f}_y(x)}{x}, \quad \varphi_1^\varepsilon(y) := \max_{1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1} \frac{1-\tilde{f}_y(x)}{1-x}. \tag{14}$$

Мы можем тогда оценивать изменение за одну итерацию G расстояния до компоненты границы A_0 (или A_1) от достаточно близкой к ней точки (y, x): для любых $x \in [0, \varepsilon]$, $y \in B$ имеем

$$\tilde{f}_y(x) \leqslant \varphi_0^\varepsilon(y) \cdot x.$$

Используя равномерную по y версию леммы Адамара, легко увидеть, что при $\varepsilon \to 0$ выполнено

$$\varphi_0^\varepsilon \rightrightarrows (\tilde{f}_y)'(0), \quad \varphi_1^\varepsilon \rightrightarrows (\tilde{f}_y)'(1). \tag{15}$$

Поэтому для любого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ имеем

$$\tilde{\lambda}_0 = \int_B \log \varphi_0^{\varepsilon_0}(y)\, dy < 0, \quad \tilde{\lambda}_1 = \int_B \log \varphi_1^{\varepsilon_0}(y)\, dy < 0. \tag{16}$$

Выберем и зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ таким, чтобы, вдобавок к условию (16), никакая точка не могла «перепрыгнуть» через полосу $\Pi := B \times [\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]$ за одну итерацию:

$$\forall y \in B \quad \tilde{f}_y(\varepsilon_0) < 1-\varepsilon_0, \quad \tilde{f}_y(1-\varepsilon_0) > \varepsilon_0.$$

Заметим, что не стремящиеся ни к A_0, ни к A_1 точки делятся на два типа: точка может либо, начиная с некоторого момента, находиться в одной из полос $\Pi_0 = B \times [0, \varepsilon_0]$ и $\Pi_1 = B \times [1-\varepsilon_0, 1]$, не стремясь тем не менее к A_0 или A_1 соответственно, либо бесконечно много раз посещать полосу Π. Назовём их соответственно исключительными точками первого и второго

типов (подразбив точки первого типа в соответствии с посещаемой полосой) и обозначим соответствующие множества через

$$E_1^0 = \{(y,x) \mid G^n(y,x) \not\to A_0,\ \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\ G^n(y,x) \in \Pi_0\},$$
$$E_1^1 = \{(y,x) \mid G^n(y,x) \not\to A_1,\ \exists n_0\colon \forall n \geqslant n_0\ G^n(y,x) \in \Pi_1\},$$
$$E_2 = \{(y,x) \mid \forall n_0\ \exists n > n_0\colon G^n(y,x) \in \Pi\}.$$

5.2. Оценка хаусдорфовой размерности множества исключительных точек первого типа.

Предложение 4. *В условиях теоремы* 3 *хаусдорфова размерность множества исключительных точек первого типа* (*то есть множества* $E_1 = E_1^0 \cup E_1^1$) *строго меньше размерности фазового пространства и, более того, отделена от нее равномерно по достаточно малой окрестности косого произведения* (5) *в пространстве гёльдеровых косых произведений* $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$.

Доказательство. Докажем утверждение для точек из E_1^0 (утверждение для E_1^1 доказывается аналогично).

Обозначим через Y проекцию E_1^0 на базу B; поскольку $E_1^0 \subset Y \times [0,1]$, для доказательства предложения 4 достаточно показать, что хаусдорфова размерность $\dim_H(Y)$ меньше размерности базы B (и предъявить соответствующие равномерные оценки по малой окрестности исходного косого произведения).

Легко видеть, что

$$\begin{gathered} Y = \bigcup_{n_0=0}^{\infty} T^{-n_0}(Y_0), \\ Y_0 = \bigl\{y \mid \exists x\colon (\forall n \geqslant 0\ G^n(y,x) \in \Pi_0)\ \&\ (G^n(y,x) \not\to A_0 \text{ при } n \to \infty)\bigr\}. \end{gathered} \tag{17}$$

С другой стороны, отображение $T\colon B \to B$ — гладкое, и взятие соответствующих прообразов не изменяет хаусдорфову размерность. Также не изменяет хаусдорфову размерность счетное объединение множеств. Поэтому $\dim_H Y = \dim_H Y_0$.

Для оценки $\dim_H Y_0$ воспользуемся специальной эргодической теоремой. Заметим, что если итерации (y_i, x_i) некоторой начальной точки (y,x) остаются в полосе Π_0, то по определению функции $\varphi_0^{\varepsilon_0}$ имеем

$$x_{j+1} \leqslant x_j \cdot \varphi_0^{\varepsilon_0}(y_j). \tag{18}$$

Отсюда получаем, что

$$\log x_n \leqslant \log x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \log \varphi_0^{\varepsilon_0}(y_j). \tag{19}$$

Применяя специальную эргодическую теорему для отображения удвоения окружности или линейного диффеоморфизма Аносова к функции $\psi :=$

$:=\log \varphi_0^{\varepsilon_0}$, получаем, что хаусдорфова размерность множества

$$\widetilde{Y} := \left\{ y \mid \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \psi(y)}{n} \geqslant -\frac{|\tilde{\lambda}_0|}{2} \right\} \tag{20}$$

меньше $\dim B$. С другой стороны, для $y \notin \widetilde{Y}$ имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \psi(y_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

что исключает наличие последовательности x_n, удовлетворяющей (19) и не стремящейся к 0. Поэтому $Y_0 \subset \widetilde{Y}$. Отсюда $\dim_H(Y_0) < \dim B$, и $\dim_H(M_1) < < \dim X$.

Осталось обосновать существование оценки, равномерной по малой окрестности исходной системы. Заметим, что единственный инструмент, который мы применили в предыдущих рассуждениях — специальная эргодическая теорема. Малому в пространстве гёльдеровых косых произведений $\mathcal{H}^2_{(C,\alpha)}$ изменению системы соответствует малое (в $C^0(B)$) изменение функции ψ. Поэтому равномерность оценки хаусдорфовой размерности следует из равномерности оценки в специальной эргодической теореме (см. [IKS08], [S10]).

Доказательство предложения 4 завершено. □

5.3. Оценка хаусдорфовой размерности множества исключительных точек второго типа. Для оценки хаусдорфовой размерности множества исключительных точек второго типа мы рассмотрим последовательность прообразов

$$G^{-n}(\Pi) = \{(y,x) \mid G^n(y,x) \in B \times [\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]\}. \tag{21}$$

Покроем каждый такой прообраз окрестностями, размер и количество которых будем контролировать. Более конкретно, мы докажем следующую лемму:

Лемма 1 (основная лемма). *Существуют такие константы $d_2 < \dim X$, $C > 0$, что при любом n полный прообраз $G^{-n}(\Pi)$ можно покрыть не более чем $C \cdot \lambda_u^{d_2 n}$ окрестностями радиуса λ_u^{-n}.*

Из этой леммы немедленно будет следовать

Предложение 5. $\dim_H(E_2) \leqslant d_2$.

Вывод предложения 5 из леммы 1. По определению E_2 получаем, что

$$E_2 = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} G^{-n}(\Pi). \tag{22}$$

Для любого N объединение по $n \geqslant N$ покрытий множеств $G^{-n}(\Pi)$ окрестностями радиуса λ_u^{-n} из основной леммы является покрытием E_2. С другой

стороны, для любого $d > d_2$ d-мерный объем такого покрытия оценивается как

$$\sum_{n=N}^{\infty} C \cdot \lambda_u^{d_2 n} \cdot (\lambda_u^{-n})^d = \sum_{n=N}^{\infty} C \cdot \lambda_u^{-(d-d_2)n} = \lambda_u^{-(d-d_2)N} \cdot \frac{C}{1-\lambda_u^{-(d-d_2)}}. \tag{23}$$

В частности, эта величина стремится к 0 при $N \to \infty$. Тем самым мы показали, что при всех $d > d_2$ множество E_2 имеет нулевой d-мерный объём. Следовательно,

$$\dim_H(E_2) \leqslant d_2 < \dim X. \qquad \square$$

Поскольку объединение заключений предложений 4 и 5 даёт заключение теоремы 3, для завершения её доказательства остаётся доказать лемму 1.

Мы продолжим доказательство в случае косых произведений над отображением удвоения окружности; случай косого произведения над диффеоморфизмом Аносова ему аналогичен. Для доказательства нам потребуется следующее утверждение, принадлежащее А. С. Городецкому:

Лемма (о предсказуемости траекторий). *Пусть $G\colon Y \times X \to Y \times X$, $G(y,x) = (S(y), f_y(x))$ — гёльдерово косое произведение над растягивающим отображением $S\colon Y \to Y$ с константой растяжения $\lambda > 1$. То есть при $\rho(y_1, y_2) < \rho_0$*

$$\rho(S(y_1), S(y_2)) \geqslant \lambda \rho(y_1, y_2), \tag{24}$$

$$d_{C^0}(f_{y_1}, f_{y_2}) \leqslant C_1 \cdot \rho(y_1, y_2)^h. \tag{25}$$

Пусть также отображения вдоль слоя равномерно липшицевы:

$$\forall y \ \ \mathrm{Lip}(f_y) \leqslant L,$$

и имеет место неравенство (аналог условий частичной гиперболичности и доминирующего разложения для гёльдеровых косых произведений)

$$\lambda^h > L.$$

Тогда найдется такая константа $\tilde{C}$, что для любых двух участков траекторий длины n с начальными условиями (y_1, x) и (y_2, x), такими что

$$\rho(S^k(y_1), S^k(y_2)) \leqslant \rho_0 \qquad \forall k = 0, 1, \ldots, n, \tag{26}$$

имеет место оценка расстояния по слою между образами $(\tilde{y}_1, \tilde{x}_1) = G^n(y_1, x)$ и $(\tilde{y}_2, \tilde{x}_2) = G^n(y_2, x)$ как

$$\mathrm{dist}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant \tilde{C} \cdot \rho(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)^h. \tag{27}$$

Иными словами, при определённых условиях на систему для итераций точки, начальная координата в базе которой известна приблизительно, итоговая ошибка определения координаты по слою сравнима с ошибкой, внесенной на последнем этапе итераций.

В слегка отличающейся формулировке эта лемма может быть найдена в [GI00, лемма 3.1] и в [G01], однако для полноты изложения мы напомним здесь её доказательство.

Доказательство. Обозначим $y_j^{(1)} = S^j(y_1)$, $y_j^{(2)} = S^j(y_2)$. Оценим расстояние между

$$\tilde{x}_1 = (f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_1^{(1)}} \circ f_{y_0^{(1)}})(x)$$

и

$$\tilde{x}_2 = (f_{y_{n-1}^{(2)}} \circ \ldots \circ f_{y_1^{(2)}} \circ f_{y_0^{(2)}})(x).$$

Для этого соединим их последовательностью точек $t_0 = \tilde{x}_1$, $t_n = \tilde{x}_2$,

$$t_j = (f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_j^{(1)}} \circ f_{y_{j-1}^{(2)}} \circ \ldots \circ f_{y_0^{(2)}})(x).$$

Заметим, что точки t_j и t_{j+1} отличаются ровно на одно применённое отображение, $f_{y_j^{(2)}}$ вместо $f_{y_j^{(1)}}$, в середине «цепочки». Поэтому

$$\operatorname{dist}(t_j, t_{j+1}) = \operatorname{dist}((f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_{j+1}^{(1)}})(f_{y_j^{(1)}}(p_j)), (f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_{j+1}^{(1)}})(f_{y_j^{(2)}}(p_j))),$$

где

$$p_j = (f_{y_{j-1}^{(2)}} \circ \ldots \circ f_{y_0^{(2)}})(x).$$

В силу условий Липшица по слою и Гёльдера по базе,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}((f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_{j+1}^{(1)}})(f_{y_j^{(1)}}(p_j)), (f_{y_{n-1}^{(1)}} \circ \ldots \circ f_{y_{j+1}^{(1)}})(f_{y_j^{(2)}}(p_j))) \leqslant \\ \leqslant L^{n-j-1} \cdot \operatorname{dist}(f_{y_j^{(1)}}(p_j), f_{y_j^{(2)}}(p_j)) \leqslant L^{n-j-1} \cdot C_1 \rho(y_j^{(1)}, y_j^{(2)})^h.\end{aligned}$$

Наконец, в силу условия на растяжение, $\rho(y_j^{(1)}, y_j^{(2)}) \leqslant \rho(y_n^{(1)}, y_n^{(2)})/\lambda^{n-j}$.

Суммируя полученные оценки, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_1, x_2) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \rho(t_j, t_{j+1}) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} C_1 \frac{L^{n-j-1} \cdot \rho(y_n^{(1)}, y_n^{(2)})^h}{(\lambda^{n-j})^h} \leqslant \\ \leqslant \frac{C_1}{L} \cdot \rho(y_n^{(1)}, y_n^{(2)})^h \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{L}{\lambda^h}\right)^i = \tilde{C} \rho(y_n^{(1)}, y_n^{(2)})^h. \quad \square\end{aligned}$$

Мы применим эту лемму к нашему косому произведению и выберем некоторое расстояние δ_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{C} \cdot \delta_0^h \leqslant \varepsilon_0/2$, где константа $\tilde{C}$ та же, что и в (27). Разделим затем окружность $\mathbb{S}^1$ на интервалы $I_1, \ldots, I_{[1/\delta_0]+1}$ длины, не большей δ_0. Заметим, что имеет место следующее предложение:

Предложение 6. *Пусть интервал $\tilde{I} \subset \mathbb{S}^1$ — одна из связных компонент прообраза $T^{-n}(I)$, где I — один из интервалов I_j, а интервал $J \subset [0,1]$ — вертикальная компонента $G^{-n}\left(I \times \left[\frac{\varepsilon_0}{2}, 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right]\right)$ над некоторой точкой $y \in \tilde{I}$:*

$$G^{-n}\left(I \times \left[\frac{\varepsilon_0}{2}, 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right]\right) \cap (\{y\} \times [0,1]) = \{y\} \times J. \tag{28}$$

Тогда прямоугольник $\tilde{I} \times J$ накрывает связную компоненту рассматриваемого прообраза $G^{-n}(I \times [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0])$:

$$G^{-n}(I \times [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0]) \cap (\tilde{I} \times [0,1]) \subset \tilde{I} \times J. \tag{29}$$

Доказательство. Это предложение мгновенно следует из леммы о предсказуемости, примененной к верхней и к нижней границам $\tilde{I} \times J$. Действительно, пусть $J = [x_{\min}, x_{\max}]$, тогда для любой точки $y \in \tilde{I}$ координата по оси x образа $G^n(y, x_{\min})$ не превосходит суммы x-координаты $G^n(y, x_{\min})$ и величины $\tilde{C}\delta_0^h$. Но x-координата $G^n(y, x_{\min})$ равна $\varepsilon_0/2$, а $\tilde{C}\delta_0^h \leqslant \varepsilon_0/2$, поэтому точка $G^n(y, x_{\min})$ лежит ниже уровня ε_0 по оси x. Аналогично образ отрезка $G^n(\tilde{I} \times \{x_{\max}\})$ лежит целиком выше уровня $1 - \varepsilon_0$ по оси x, что и доказывает требуемое включение. □

Итак, мы разделили окружность на интервалы $I_1, \ldots, I_{[1/\delta_0]+1}$ длины, не превосходящей δ_0. Выберем и зафиксируем также в каждом из них по точке $y_l \in I_l$. Тогда множество $G^{-n}(\mathbb{S}^1 \times [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_0])$ будет покрыто объединением прямоугольников $\tilde{I}_{k,l} \times J_{k,l}$, где $T^{-n}(I_l) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \tilde{I}_{k,l}$, а $J_{k,l}$ — прообраз отрезка $[\varepsilon_0/2, 1 - \varepsilon_0/2]$, находящийся над соответствующей точкой $\tilde{y}_{k,l}$ — прообразом y_l, принадлежащей $\tilde{I}_{k,l}$.

Заметим, что длина любого из прямоугольников $\tilde{I}_{k,l} \times J_{k,l}$ по оси y не больше 2^{-n}. Для того чтобы завершить доказательство основной леммы, мы разделим эти прямоугольники на два класса.

Прямоугольники первого будут соответствовать тем точкам $\tilde{y}_{k,l}$, для которых соответствующий интервал пересекает в течение n итераций полосу $\Pi' := \mathbb{S}^1 \times [\varepsilon_0/2, 1 - \varepsilon_0/2]$ менее, чем Cn раз, где C — некоторая константа (которую мы выберем позднее). Окажется (см. предложение А ниже), что, поскольку при переходе к взятию прообразов окружности A_0 и A_1 становятся отталкивающими, при достаточно малом C доля таких прямоугольников будет экспоненциально мала: их будет меньше, чем $2^{\beta n}$, где $\beta < 1$.

Интервалы, соответствующие прямоугольникам второго класса, на протяжении итераций взятия прообраза пересекают полосу Π' не меньше Cn раз.

Вспомним, что в силу предположения У3 производные отображений $\tilde{f}_y$ в координате $z = \Phi(x)$ больше 1. Поэтому при взятии прообраза они в этой же координате (нестрого) сжимают. Более того, в любой области, отделённой от A_0 и от A_1, скорость сжатия отделена от 1. Поэтому (см. предложение В ниже) прямоугольники второго класса имеют вертикальный размер, не превосходящий $2^{-\gamma n}$, для некоторого $\gamma > 0$.

Прямоугольники первого класса можно заменить на $2^n \cdot 2^{\beta n} = 2^{(1+\beta)n}$ квадратов размера $2^{-n} \times 2^{-n}$ (по слою мы оценим их высоту просто полным отрезком $[0, 1]$). Прямоугольники второго класса можно покрыть $2^{(1-\gamma)n} \cdot \cdot 2^n = 2^{(2-\gamma)n}$ такими же квадратами. Поскольку $\gamma > 0, \beta < 1$, мы можем положить:

$$d_2 := \max(1 + \beta, 2 - \gamma) < 2.$$

Эти рассуждения и докажут основную лемму, как только будут доказаны следующие предложения.

Пусть точка $(y_0, x_0) \in \Pi'$ зафиксирована. Рассмотрим марковский процесс $(y_j, x_j)_{j=0}^{\infty}$ взятия G-прообразов, $(y_{j+1}, x_{j+1}) \in G^{-1}(y_j, x_j)$, в котором на каждом шаге один из двух прообразов выбирается равновероятно.

Предложение A. *Существуют такие константы $0 < C < 1$, $\beta > 0$, $C_2 > 0$, что для любой точки $(y_0, x_0) \in \Pi'$ в последовательности прообразов (y_j, x_j), $j = 1, \ldots, n$, за n итераций с вероятностью, не меньшей $1 - C_2 2^{-\beta n}$, по меньшей мере Cn прообразов попадут в ту же полосу.*

Предложение B. *Пусть точка (y_0, x_0) лежит в полосе Π' и в последовательности прообразов $(y_j, x_j)_{j=0}^{n-1}$ по меньшей мере m точек принадлежат той же полосе Π'. Тогда длина интервала J, являющегося соответствующим n-м прообразом $[\varepsilon_0/2, 1 - \varepsilon_0/2]$ над точкой y_0,*

$$J = \tilde{f}_{y_n}^{-1} \circ \ldots \circ \tilde{f}_{y_1}^{-1}([\varepsilon_0/2, 1 - \varepsilon_0/2]),$$

оценивается как $|J| \leqslant C_4 2^{-\gamma m}$, где $C_4, \gamma > 0$ — некоторые константы.

Доказательство предложения B. Перейдём к координате $z = \Phi(x)$. В силу условия УЗ отображения $\tilde{f}_y$ в этой координате (нестрого) растягивают:

$$\forall y \in \mathcal{S}^1, z \in \mathbb{R} \quad (g_y)'(z) > 1,$$

где $g_y(z) = \Phi \circ \tilde{f}_y \circ \Phi^{-1}(z)$. Поэтому при взятии прообразов длина интервала в z-координате, исходно равная $l_0 := \Phi(1 - \varepsilon_0/2) - \Phi(\varepsilon_0/2)$, не увеличивается. Поэтому всякий раз, когда прообраз интервала $[\varepsilon_0/2, 1 - \varepsilon_0/2]$ пересекает область Π', сам этот интервал находится внутри полосы

$$\Pi'' := \{(y, x) \mid x \in \Phi^{-1}(U_{l_0}([\Phi(\varepsilon_0/2), \Phi(1 - \varepsilon_0/2)]))\}.$$

С другой стороны, поскольку эта полоса — компакт, на котором производные обратных отображений в z-координате строго меньше единицы, соответствующие итерации сжимают с отделённой от единицы константой $\lambda_z < 1$. Поэтому длина образа $\Phi(J)$ в z-координате не превосходит

$$|\Phi(J)| \leqslant l_0 \cdot \lambda_z^m = l_0 \cdot 2^{-\gamma m},$$

где $\gamma := |\log_2 \lambda_z| > 0$. Наконец, заметив, что $\forall z\ (\Phi^{-1})'(z) \leqslant 1$, получаем требуемую оценку длины образа интервала J и в x-координате. □

Доказательство предложения A, которое мы приведём в следующем параграфе, завершит доказательство основной леммы.

5.4. Попадание прообразов в среднюю полосу (доказательство предложения A). Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение:

Предложение C. *Для некоторых констант $C_3 > 0$, $\beta_1 > 0$ вероятность того, что вся последовательность прообразов $(y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n)$ лежит вне полосы Π', не превосходит $C_3 2^{-\beta_1 n}$. Эта оценка равномерна по выбору начальной точки $(y_0, x_0) \in \Pi'$.*

Доказательство. Это предложение — фактически следствие вспомогательной оценки, получающейся в специальной эргодической теореме. Действительно, пусть $x_1, \ldots, x_n < \varepsilon_0/2$. (Случай выхода за полосу «вверх» рассматривается аналогично.) Тогда, как мы уже видели раньше (см. доказательство предложения 4),

$$\log x_n \geqslant \log x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} -\psi(y_i). \tag{30}$$

С другой стороны, $\log x_1 = \log f^{-1}_{y_{(1)}}(x_0) \geqslant \log \varepsilon_0/2 - \log L$, где L — константа Липшица. Поэтому если $x_n \leqslant \varepsilon_0/2$, то

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-\psi(y_i)) \leqslant \log L. \tag{31}$$

Заметим теперь, что функция ψ гёльдерова, $|\psi(y') - \psi(y'')| \leqslant c|y' - y''|^\alpha$. Поэтому рассуждения, аналогичные доказательству леммы о предсказуемости, показывают, что для каждого прообраза y_n начальной точки y, для которого имеет место (31), сумма $\sum_{j=0}^{n-1}(-\psi(T^j(q))$ не превосходит некоторой не зависящей от n константы C_ψ для всех точек $q \in [y_n - 2^{-n}, y_n + 2^{-n}]$. Действительно,

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} (-\psi(T^j(q)) - \sum_{j=0}^{n-1} (-\psi(T^j(y_n))\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |\psi(T^j(q)) - \psi(T^j(y_n))| \leqslant \sum_{j=0}^{n} c(2^{-(n-j)})^\alpha \leqslant \frac{c}{1-2^{-\alpha}}.$$

Но возможные прообразы точки y за n итераций разбивают окружность на 2^n рассмотренных выше интервалов, поэтому вероятность того, что для последовательности прообразов сумма (31) не превысит $\log L$, не превышает меры Лебега тех точек q, для которых сумма $\sum_{j=0}^{n-1} \psi(T^j(q))$ не превышает C_ψ.

С другой стороны, $\int \psi(y)\, dy > 0$, поэтому, в силу экспоненциального убывания мер больших уклонений (см. [Y90], [IKS08]), такая мера экспоненциально мала, а значит, экспоненциально мала и искомая вероятность. □

Доказательство предложения A. Определим для рассматриваемого марковского процесса (быть может, бесконечные) марковские моменты τ_1, $\tau_2, \ldots$ следующим образом. Момент τ_j — это момент j-го попадания прообраза (y_m, x_m) в полосу Π', если он конечен, и ∞ иначе. Тогда из предложения C следует, что каждый из моментов τ_j конечен почти наверное и, более того, условная вероятность

$$P(\tau_j - \tau_{j-1} \geqslant k \mid \tau_{j-1} = s, (\omega_1, \ldots, \omega_s) = (\omega_1^0, \ldots, \omega_s^0)) \leqslant C_3 \cdot 2^{-\beta_1 k} \tag{32}$$

при любом s и любых вариантах выбора прообразов $\omega_1^0, \ldots, \omega_s^0$ таких, что $\tau_{j-1}(\omega_1^0, \ldots, \omega_s^0) = s$ (напомним, что $\omega_i^0 = G^{-i}(y_0, x_0)$).

Рассмотрим распределение ξ, принимающее натуральные значения и определенное соотношением $P(\xi \geqslant k) = \min\{1, C_3 2^{-\beta_1 k}\}$. Тогда (расширив вероятностное пространство $\Omega_0 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ умножением на $[0,1]^{\mathbb{N}}$ для отсутствия атомов) можно найти независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$, по распределению совпадающие с ξ, такие что $\xi_j \geqslant \tau_j - \tau_{j-1}$. (См. например, доказательство леммы 2.3 в работе [DK07].) Отметим, что все ξ_i определены на том же вероятностном пространстве, что и марковский процесс, и что распределение ξ не зависит от исходной точки $(y, x) \in \Pi'$.

Для доказательства предложения мы должны оценить вероятность того, что за n итераций взятия прообраза произошло менее чем Cn попаданий в полосу Π'. В терминах нашего процесса это $P(\tau_{[Cn]} \geqslant n)$. Но

$$\tau_{[Cn]} = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \ldots + (\tau_{[Cn]} - \tau_{[Cn]-1}) \leqslant \xi_1 + \ldots + \xi_{[Cn]}.$$

Поэтому

$$P(\tau_{[Cn]} \geqslant n) \leqslant P(\xi_1 + \ldots + \xi_{[Cn]} \geqslant n). \tag{33}$$

Последнюю вероятность можно оценить с помощью теоремы о больших уклонениях. Выберем $C := \dfrac{1}{E\xi + 1}$. Тогда

$$P(\xi_1 + \ldots + \xi_{[Cn]} \geqslant n) \leqslant P(\xi_1 + \ldots + \xi_{[Cn]} \geqslant [Cn] \cdot (E\xi + 1)) \leqslant C_2 \cdot \exp(-\beta n) \tag{34}$$

для некоторых $C_2, \beta > 0$. Тем самым $P(\tau_{[Cn]} \geqslant n) \leqslant C_2 \cdot \exp(-\beta n)$, и требуемое экспоненциальное убывание доказано. □

Доказательство этого предложения завершает доказательство основной леммы и, тем самым, теоремы 3 для случая косого произведения над удвоением окружности.

Приведённые выше рассуждения с небольшими изменениями переносятся и на случай динамики над линейным диффеоморфизмом двумерного тора. Эти изменения состоят, в основном, в переходе к марковскому кодированию; в частности, вместо случайного процесса выбора прообраза, который использовался в рассуждениях про удвоение, будет использоваться марковский процесс уточнения прошлого.

А именно, для линейного диффеоморфизма Аносова $M\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ существует марковское разбиение $Q = \{Q_j\}_{j=1}^k$ на параллелограммы, стороны которых параллельны устойчивому и неустойчивому направлениям соответственно. Итерируя и подразбивая его, можно добиться, чтобы его диаметр был сколь угодно малым. В частности, чтобы интеграл по мере Лебега ступенчатой функции $\tilde{\psi}$, равной $\sup_{Q_j} \psi = \sup_{Q_j} \log \varphi_0^{\varepsilon_0}$ везде на элементе Q_j, был бы отрицательным (и чтобы такое же условие выполнялось и для оценки на отталкивание от уровня $x = 1$) и чтобы ошибка, даваемая аналогом леммы о предсказуемости для этого случая (см. ниже), не превосходила бы $\varepsilon_0/2$. Мы выберем и зафиксируем такое разбиение. Пусть $\pi\colon \mathbb{T}^2 \to \Sigma_k := \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{Z}}$ — соответствующее отображение кодирования, сопоставляющее точке $y \in \mathbb{T}^2$

её судьбу $\omega = (\omega_n) \in \Sigma_k$, определяемую по правилу

$$\forall y \in \mathbb{T}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ T^n(y) \in Q_{\omega_n}.$$

Рассмотрим разбиение $\mathbb{T}^2$, соответствующее итерациям с $(-n)$-й по n-ю: $Q^{(n)} = \bigwedge_{j=-n}^{n} T^j(Q)$. Элементы такого разбиения — параллелограммы со сторонами порядка λ_u^{-n}; под действием π они переходят в цилиндры

$$C_{w_{-n}\dots w_n} = \{\omega \mid \omega_i = w_i\ \forall i = -n, \dots, n\}.$$

Лемма о предсказуемости для случая гиперболических отображений применима и к таким цилиндрам (см. [GI00, лемма 3.1]) и даёт то же заключение: если известно, что точка y принадлежит данному цилиндру $C_{w_{-n}\dots w_n}$, то погрешность при вычислении образа по слою $G^n(y, x)$ сравнима с вносимой на последней итерации. Тем самым оценка на эту погрешность может быть сделана сколь угодно малой (и, в частности, меньшей $\varepsilon_0/2$) выбором достаточно мелкого разбиения Q.

Тогда, аналогично предложению A в случае динамики над удвоением окружности, мы собираемся доказать, что для всех точек $\mathbb{T}^2$, кроме экспоненциально малой по n доли, соответствующие им вертикальные интервалы прообраза $G^{-n}(\Pi')$ за время вычисления n итераций взятия прообраза пересекают Π по крайней мере Cn раз, и потому (ввиду дословно обобщаемого предложения B) экспоненциально малы.

Применение (также переносящегося на этот случай без каких-либо изменений) предложения 6 тогда позволит заключить, что прообраз $G^{-n}(\Pi)$ накрывается требуемым семейством окрестностей. Действительно, элементы R измельчения $Q^{(n)}$ можно разделить на два класса: те, для которых найдётся $y \in R$, для которых интервал слоя $G^{-n}(\Pi') \cap (\{y\} \times [0, 1])$ экспоненциально мал, и те, для которых такого интервала не найдётся. Прообраз над элементами второго типа покрывается просто соответствующим параллелепипедом $R \times [0, 1]$, подразбитым на $\mathrm{const} \cdot \lambda_u^n$ кубов с ребром λ_u^{-n}; прообразы же над элементами первого типа оцениваются с помощью (дословно переносящегося на этот случай) предложения 6.

Итак, остаётся показать, что для всех точек $y \in \mathbb{T}^2$, кроме экспоненциально малой по n доли, интервал слоя $G^{-n}(\Pi')$ над точкой y за время вычисления n итераций прообраза пересекал полосу Π по меньшей мере Cn раз, где C — некоторая константа. Поскольку мера Лебега T-инвариантна, можно вместо этого оценивать долю соответствующих таким точкам y их образов $y' = T^n(y)$ (интервал Π' над которыми является стартовым в последовательности n взятий прообразов).

Воспользуемся теперь марковским кодированием: отображение кодирования π переводит меру Лебега μ в марковскую меру $\nu = \pi_* \mu$ на Σ_k со стационарным распределением $p_j = \mu(Q_j)$ и некоторой матрицей переходных вероятностей (p_{ij}). Выбор случайной точки по такой мере может быть раз-

бит в последовательный выбор «будущего» $\{\omega_j\}_{j=0}^{\infty}$ (с начальным распределением p_j и матрицей переходных вероятностей (p_{ij})) и достраивание последовательности $\omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$ как цепи Маркова с матрицей переходов для обращённого времени $(q_{ij}) = (p_j p_{ji}/p_i)$.

Тем самым достаточно доказать, что при любой фиксированной последовательности будущего $\{\omega_j\}_{j=0}^{\infty}$ условная вероятность того, что слой полосы Π' над точкой y' с данным будущим пересечёт полосу Π за первые n итераций меньше, чем Cn раз, экспоненциально мала.

Теперь мы можем применить рассуждения, аналогичные предложению C. А именно, при «дописывании прошлого» — переходе по цепи Маркова ω_{-1}, $\omega_{-2}, \dots$ соответствующие прообразы отталкиваются от границ $x=0$ и $x=1$, причём эффект от применения соответствующих итераций в логарифмической шкале оценивается снизу суммами ступенчатых функций $(-\tilde{\psi})$ и аналогичной функции для границы $x=1$, имеющими положительные средние значения. Применяя теорему о больших уклонениях для цепей Маркова, мы получаем аналогичную предложению C оценку об экспоненциальном убывании вероятности большого промежутка между двумя пересечениями. Наконец, рассуждение, аналогичное оценке (34), уже проведённой для предложения A в случае динамики над окружностью, завершает доказательство и для случая косых произведений над линейным диффеоморфизмом Аносова $\mathbb{T}^2$.

Предложение A и, тем самым, теорема 3 полностью доказаны.

§ 6. Доказательство теоремы об усиленной метрической плотности

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 4. Во всем параграфе под окрестностями будем понимать «горизонтальные окрестности» вида $U \times \{x\}$, где U — некоторая окрестность в базе B, а под шарами $U_r(p)$ — шары в базе B с радиусом r и центром в точке p.

Пусть косое произведение $G(y,x) = (T(y), \tilde{f}_y(x))$ удовлетворяет условиям У1 и У2. Для доказательства теоремы 4 нам требуется показать, что множество не принадлежащих $\mathcal{B}_0$ точек окрестности $U_n := U_{\lambda_u^{-n}}(p) \times \{x\}$ может быть покрыто объединением по $m \geqslant (1+c_1)n$ объединений не более чем $\lambda_u^{c_2(m-n)}$ шаров радиуса λ_u^{-m}.

Обозначим преобразование слоя над точкой y за n итераций через $\tilde{f}_{n,y}$,

$$\tilde{f}_{n,y} := \tilde{f}_{T^{n-1}(y)} \circ \dots \circ \tilde{f}_{T(y)} \circ \tilde{f}_y,$$

в частности, $\tilde{f}_{1,y} = \tilde{f}_y$.

Зафиксируем точку (p,x), $p \in W^s(y_{(0)})$. По предположению, $\tilde{f}'_{k_0,y_{(0)}}(0) < 1$, поэтому найдутся достаточно малые $\varepsilon, \delta > 0$ и $r < 1$, для которых при всех $\bar{p} \in U_\delta(y_{(0)})$, $\bar{x} \leqslant \varepsilon$ выполнено неравенство $\tilde{f}_{k_0,\bar{p}}(\bar{x}) \leqslant r\bar{x}$.

Для удобства мы заменим наше семейство горизонтальных окрестностей: в случае косого произведения над линейным диффеоморфизмом Аносова

вместо шара $U_{\lambda_u^{-n}}(p)$ мы возьмём окрестность-параллелограмм, являющуюся произведением окрестностей радиуса λ_u^{-n} вдоль устойчивого и неустойчивого направления; в случае же удвоения окружности мы возьмём окрестность-интервал радиуса $\lambda_u^{-n}/2$. Обозначим новое семейство окрестностей через P_n. Поскольку окрестности нового семейства содержат, с точностью до сдвига нумерации на константу, окрестности старого — нам достаточно доказать заключение теоремы для нового семейства окрестностей.

Пусть $y \in P_n$; рассмотрим образ точки (y, x) за n итераций. Поскольку $p \in W^s(y_{(0)})$, почти вся эта последовательность итераций, кроме нескольких в начале и в конце (количество которых равномерно ограничено не зависящей от n константой) разбивается на участки, соответствующие применению $\tilde{f}_{k_0,q}$ с $q \in U_\delta(y_{(0)})$ и $\bar{x} \leqslant \varepsilon$. Тем самым x-координата образа экспоненциально мала:

$$\forall y \in P_n \quad \tilde{f}_{y,n}(x) \leqslant C \cdot r^{n/k_0}. \tag{35}$$

Для любого $N > n$ рассмотрим множество $\overline{M}_N$, состоящее из точек базы $y \in P_n$, для которых N-й образ точки (y, x) «недостаточно близко» подходит к A_0:

$$\overline{M}_N := \{y \in P_n \mid \tilde{f}_{y,N}(x) \geqslant e^{I(N-n)/2}\}, \tag{36}$$

где $I := \int_B \psi \, d\mu < 0$, а функция $\psi = \log \varphi_0^{\varepsilon_0}$ определена в доказательстве теоремы 3.

Отметим, что в силу (35) для некоторого $c_1 > 0$ при $N \leqslant n(1 + c_1)$ множества $\overline{M}_N$ пусты. Действительно, пусть $L := \max_{(y,x)} \tilde{f}'_y(x)$, тогда для любой точки $y \in P_n$ мы имеем оценку $\tilde{f}_{y,N}(x) \leqslant Cr^{n/k_0} \cdot L^{N-n}$. Тогда для невыполнения неравенства (36) (и, соответственно, пустоты $\overline{M}_N$) достаточно выполнения неравенства

$$Cr^{n/k_0} \cdot L^{N-n} < e^{I(N-n)/2}.$$

В свою очередь, это неравенство равносильно

$$(N-n)\left(\log L - \frac{I}{2}\right) < \frac{|\log r|}{k_0} n - \log C, \tag{37}$$

откуда и получаем искомую оценку.

Далее, рассмотрим множества $M_N := \overline{M}_N \setminus \bigcup_{j=n}^{N-1} \overline{M}_j$. Заметим, что объединение множеств M_N покрывает искомое множество не стремящихся к A_0 точек вида (y, x) с $y \in P_n$. С другой стороны, при достаточно больших n (таких, что $e^{Ic_1 n/2} < \varepsilon_0$) для любой точки $y \in M_N$ последние $N - n$ итераций до «выхода за экспоненциальную границу» на N-й итерации могут быть оценены аналогично (18)—(19). А именно, обозначив $x_j = \tilde{f}_{y,j}(x)$, имеем

$$\log \tilde{f}_{y,N}(x) = \log \tilde{f}_{y,n}(x) + \sum_{j=n}^{N-1} \log\left(\frac{\tilde{f}_{T^j(y)}(x_j)}{x_j}\right) \leqslant \sum_{j=n}^{N-1} \psi(T^j(y));$$

тем самым, если $(y, x) \in M_N$, то имеет место, в частности, оценка

$$\sum_{j=n}^{N-1} \psi(T^j(y)) \geqslant \frac{I}{2}(N-n). \tag{38}$$

Доля точек базы B, в которых выполняется (38), экспоненциально мала в силу упомянутой в § 4 теоремы Янг (см. [Y90]). Однако мы работаем не со всем множеством B, а с его частью P_n — причём сама эта часть имеет экспоненциально малую по n меру. Поэтому нам потребуется чуть более аккуратное рассуждение, которое мы проведём отдельно в случае базы-окружности и базы-тора.

Для отображения удвоения окружности отображение T^n линейно растягивает отрезок P_n на окружность, склеивая его граничные точки. Далее, разделим исходный отрезок P_n на 2^{N-n} отрезков $\{R_j\}_{j=1}^{2^{N-n}}$ длины 2^{-N}; тогда образы этих отрезков за n итераций, $\{T^n(R_j)\}$, образуют разбиение окружности.

Заметим теперь, что если две точки y и y' принадлежат одному и тому же отрезку R_j, то суммы в левых частях (38) отличаются не больше, чем на некоторую константу C_2 (что следует из оценки, аналогичной лемме о предсказуемости). Тем самым, если в точке y имеет место (38), то для любой точки y' из того же отрезка выполнено:

$$\sum_{j=n}^{N-1} \psi(T^j(y')) \geqslant \frac{I}{2}(N-n) + C_2, \tag{39}$$

а, соответственно, для образа $y'' = T^n(y')$

$$\frac{1}{N-n} \sum_{j=0}^{(N-n)-1} \psi(T^j(y'')) \geqslant \frac{I}{2} + \frac{C_2}{N-n} \geqslant \frac{2I}{3}. \tag{40}$$

Покроем множество M_N объединением тех из отрезков R_i, которые содержат хотя бы одну точку этого множества. Тогда количество выбранных отрезков оценивается с помощью теоремы Янг. А именно, образ за n итераций их объединения — множество экспоненциально малой (по $N-n$) меры, поскольку в любой его точке имеет место «большое уклонение» (40). Тем самым доля выбранных интервалов экспоненциально мала, иными словами, их количество оценивается сверху как $2^{c_2(N-n)}$, где $c_2 < 1$. Мы получили требуемое покрытие множества M_N не более чем $2^{c_2(N-n)}$ интервалами длины 2^{-m}; объединение по N таких покрытий и даёт искомое покрытие множества не стремящихся к A_0 точек.

Равномерность оценки константы c_1 следует из оценки на N в формуле (37). Равномерность же оценки константы c_2 следует из равномерности в теореме Янг (малое изменение косого произведения приводит к малому изменению соответствующей функции ψ). Теорема 4 для случая косых произведений над отображением удвоения окружности доказана.

Аналогично проводится и доказательство для базы $B = \mathbb{T}^2$. А именно, образ $T^n(P_n)$ является параллелограммом с размерами $\lambda_u^{-2n} \times 1$ по устойчивому и неустойчивому направлению соответственно.

Разрежем P_n на параллелограммы размера $\lambda_u^{-n} \times \lambda_u^{-N}$ по устойчивому и неустойчивому направлению соответственно. Образ такого разбиения за n итераций — разбиение $T^n(P_n)$ на параллелограммы $\{R_i\}$ размера $\lambda_u^{-2n} \times \times \lambda_u^{-(N-n)}$. Рассмотрим для каждого такого параллелограмма R_i (размера $\lambda_u^{-2n} \times \lambda_u^{-(N-n)}$) содержащий его параллелограмм $\tilde{R}_i$ размера $C_1 \times \lambda_u^{-(N-n)}$, где C_1 — константа. Тогда, если константа C_1 выбрана достаточно малой, такие параллелограммы $\tilde{R}_i$ попарно дизъюнктны (см. рис. 2). С другой стороны, объединение параллелограммов размера $\tilde{R}_j$ имеет меру, равную C_1.

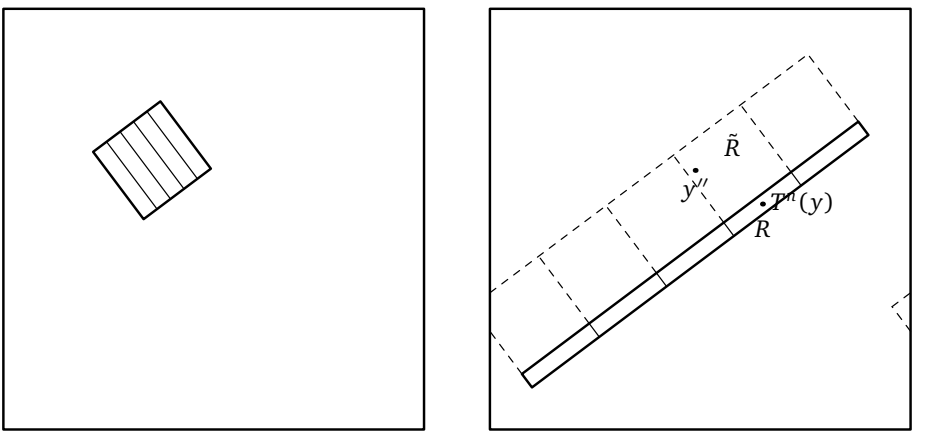

Рис. 2. Исходное разбиение, его образ R и разбиение $\tilde{R}$

Аналогично случаю отображения удвоения окружности, если точки $T^n(y)$ и y'' тора содержатся в одном параллелограмме $\tilde{R}$, то сумма в левой части (38) для y и в левой части (40) для y'' отличаются не больше, чем на некоторую константу C_2:

$$\left| \sum_{j=n}^{N-1} \psi(T^j(y)) - \sum_{j=0}^{(N-n)-1} \psi(T^j(y'')) \right| \leqslant C_2.$$

Рассмотрим объединение параллелограммов $\{R_{i_k}\}$ исходного разбиения, содержащих хотя бы одну точку множества $T^n(M_N)$. Для каждого такого параллелограмма для всех точек y'' соответствующего ему параллелограмма $\tilde{R}_{i_k}$ выполнено неравенство (40) «большого уклонения». Применение теоремы Янг тогда позволяет заключить, что мера объединения таких параллелограммов $\tilde{R}_{i_k}$ экспоненциально мала. Но поскольку мера объединения всех параллелограммов $\tilde{R}_i$ равна C_1 (и не зависит ни от n, ни от N),

это означает, что из множества всех параллелограммов $\{\tilde{R}_i\}$ мы выбрали экспоненциально малую долю — а значит, экспоненциально мала и доля параллелограммов исходного разбиения, пересекающих множество M_N.

Итак, множество M_N оказывается покрыто $\lambda_u^{c(N-n)}$, где $c<1$, параллелограммами размера $\lambda_u^{-n}\times\lambda_u^{-N}$. Подразбив это покрытие в устойчивом направлении, мы получаем покрытие $\lambda_u^{c_2(N-n)}$, где $c_2=c+1<2$, параллелограммами размера $\lambda_u^{-N}\times\lambda_u^{-N}$. Равномерность оценки констант c_1 и c_2 доказывается точно так же, как и для случая косых произведений над окружностью.

Теорема 4 доказана полностью.

Список литературы

[BLR] *Bleher P., Lyubich M., Roeder R.* Lee–Yang zeros for DHL and 2D rational dynamics, I. Foliation of the physical cylinder. Preprint arXiv:1009.4691 [math.DS].

[BDV05] *Bonatti C., Diaz L. J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. Springer, 2005.

[BM07] *Bonifant A., Milnor J.* Schwarzian derivatives and cylinder maps. Preprint, 2007.

[DK07] *Deroin B., Kleptsyn V.* Random Conformal Dynamical Systems // Geometry and Functional Analysis. 2007. Vol. 17, № 4. P. 1043—1105.

[GI96] *Gorodetski A., Yu. Ilyashenko* Minimal and strange attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6, № 6. P. 1177—1183.

[GI99] *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33, № 2. С. 16—30.

[GI00] *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 231. С. 1—23.

[G01] *Городецкий А. С.* Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем: Дисс. ... канд. ф.-м. н., мех.-мат. ф-т МГУ, 2001.

[G06] *Городецкий А. С.* Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70, вып. 6. С. 19—44.

[GIKN05] *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., Клепцын В. А., Нальский М. Б.* Неустранимость нулевых показателей Ляпунова // Функц. анализ и его прилож. 2005. Т. 39, № 1. С. 27—38.

[GT02] *Гуревич Б. М., Темпельман А. А.* Хаусдорфова размерность множества типичных точек для гиббсовских мер // Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36, № 3. С. 68—71.

[I08] *Ильяшенко Ю. С.* Диффеоморфизмы с перемежающимися бассейнами притяжения // Функц. анализ и его прилож. 2008.

[IKS08] *Yu. Ilyashenko, Kleptsyn V., Saltykov P.* Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2008. Vol. 3, № 2. P. 449—463.

[HPS77] *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Vol. 583. ii+149.

[IN10] *Ilyashenko Yu., Negut A.* Holder properties of perturbed skew products and Fubini regained, ArXiv preprint: 1005.0173.

[K94] *Kan I.* Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with everywhere dense basin // Bull. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 31. P. 68—74.

[KR] *Kleptsyn V., Ryzhov D.* Special ergodic theorem, a note in preparation.

[Mi97] *Milnor J.* Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory // Math. Intelligencer. 1997. Vol. 19, № 2. P. 30—32.

[Os10] *Осипов А. В.* Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1-топологии // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 2. С. 127—163.

[Pa00] *Palis J.* A global view of dynamics and a conjecture on the dynamics of finitude of attractors // Géometrie complexe et systèmes dynamiques, Orsay 1995. 2000. (Astérisque; Vol. 261). P. xiii—xiv; 335—347.

[Pa05] *Palis J.* A global perspective for non-conservative dynamics // Annales de l'Institut Henri Poincare. 2005. Vol. 22. P. 485—507.

[Ru01] *Ruelle D.* Historical behaviour in smooth dynamical systems // Global analysis of dynamical systems. Bristol: Inst. Phys., 2001. P. 63—66.

[S10] *Салтыков П. С.* Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе // Функц. анализ и его прилож. 2011. Т. 45, № 1. С. 69—78.

[T08] *Takens F.* Orbits with histroric behaviour, or non-existence of averages // Nonlinearity. 2008. Vol. 21. T33—T36.

[Var08] *Varadhan S. R. S.* Large deviations // Annals of Probability. 2008. Vol. 36. № 2. P. 397—419.

[WS00] *Wilkinson A., Shub M.* Pathological foliations and removable zero exponents // Inventiones mathematicae. 2000. Vol. 139. P. 495—508.

[Y90] *Young L.-S.* Some large deviation results for dynamical systems // Trans. AMS. 1990. Vol. 318, № 2. P. 525—543.

[Y03] *Young L.-S.* Entropy in dynamical systems // Entropy / Eds. A. Greven, G. Keller and G. Warnecke. Princeton Univ. Press, 2003. P. 313—328.

Виктор Алексеевич Клепцын
CNRS, Institut de Recherche Mathématique de Rennes
(UMR 6625)
E-mail: victor.kleptsyn@univ-rennes1.fr

Представлено в редакцию 22.03.2011

Петр Сергеевич Салтыков
Москва, МГУ,
механико-математический факультет
E-mail: p_saltykov@pochta.ru