ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 118, № 2
февраль, 1999

 В.В. Жаринов*

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Исследуются дифференцирования алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$ и связанные с ними вопросы. Используются идеи и язык формальной дифференциальной геометрии. Доказано, что все дифференцирования алгебры $\mathcal{H}$ внутренние. Выделены основные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ всех дифференцирований $\mathcal{H}$ и изучены их свойства. Показано, что сама алгебра $\mathcal{H}$, рассматриваемая как алгебра Ли (с коммутатором в качестве скобки Ли), образует одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра Гейзенберга (т.е. алгебра многочленов с образующими, удовлетворяющими квантовым перестановочным соотношениям, см., например, [1, 2]) – один из фундаментальных объектов квантовой теории, в той или иной форме она присутствует во многих физических и математических моделях и теориях. В последнее время этой алгеброй и ее обобщениями (*деформациями*) активно интересуются как физики-теоретики, так и математики, рассматривая ее и как фундаментальный объект, и как удобную модель для проверки разнообразных физических и математических идей и конструкций (см., например, [3–8]).

В предлагаемой работе изучаются алгебра Ли всех дифференцирований алгебры Гейзенберга, ее основные подалгебры и возникающие попутно структуры. Желание сделать работу замкнутой привело к тому, что она приобрела отчасти обзорный и методический характер. Так, ради полноты изложения приводятся основы формальной дифференциальной геометрии. С учетом существующих различных подходов к последней (см., например, [9–15]) это представляется разумным (особенно, что касается понятия *мультипликатора* и его роли в построении теории, см., например, [16]). Многогранность и обыденность использования алгебры Гейзенберга привели к тому, что ее основные свойства известны часто на уровне фольклора, что затрудняет указание точных ссылок на оригинальные работы. Это мотивировало написание раздела с формальным определением алгебры Гейзенберга и перечислением ее элементарных свойств. Отметим, что такое подробное введение позволило сделать дальнейшее изложение ясным и компактным, а также дать представление о месте полученных результатов в контексте общей теории.

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: victor@zharinov.mian.su; zharinov@genesis.mi.ras.ru

0. ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

0.1. Обозначения. Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное поле нулевой характеристики. Пусть $\mathcal{A}$ – топологическая алгебра над $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-алгебра). Обозначим:

$\operatorname{cen}\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}: fg = gf,\ \forall g \in \mathcal{A}\}$ – *центр* $\mathcal{A}$,
$\operatorname{ann}\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{A}: fg = gf = 0,\ \forall g \in \mathcal{A}\}$ – *аннулятор* $\mathcal{A}$,
$\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ – линейное пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$.

Композиция $F, G \mapsto F \circ g$ определяет в $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ структуру унитальной (т.е. содержащей единицу) ассоциативной алгебры $\mathfrak{L}_0(\mathcal{A})$, а коммутатор $F, G \mapsto [F, G] = F \circ G - G \circ F$ определяет структуру алгебры Ли $\mathfrak{L}_{[\,,\,]}(\mathcal{A})$.

Действие (точнее, левое действие) $\alpha: \mathcal{A} \to \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ определяется правилом $f \mapsto \alpha(f)$, $\alpha(f)(g) = fg,\ \forall f, g \in \mathcal{A}$.

0.2. Мультипликаторы. Отображение $M \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ называется *мультипликатором* (см., например, [16]), если $M(fg) = M(f)g = fM(g),\ \forall f, g \in \mathcal{A}$.

Множество $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ всех мультипликаторов алгебры $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – *унитальная подалгебра алгебры* $\mathfrak{L}_0(\mathcal{A})$;
(2) *ядро* $\ker M = \{f \in \mathcal{A}: M(f) = 0\}$ *и образ* $\operatorname{im} M = M(\mathcal{A})$ *суть двусторонние идеалы алгебры* $\mathcal{A},\ \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
(3) $M: \operatorname{ann}\mathcal{A} \to \operatorname{ann}\mathcal{A}$ *и* $M: \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \operatorname{cen}\mathcal{A},\ \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
(4) $[M, N](f) \in \operatorname{ann}\mathcal{A},\ \forall M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *и* $\forall f \in \mathcal{A}$; *в частности, алгебра* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *коммутативная, если* $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная, то дополнительно:

(5) $\alpha: \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *т.е. действие* $\alpha(f) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ \forall f \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$;
(6) *пересечение* $\ker\alpha \cap \operatorname{cen}\mathcal{A} = \{f \in \operatorname{cen}\mathcal{A}: \alpha(f) = 0\} = \operatorname{ann}\mathcal{A}$; *в частности, отображение* $\alpha: \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *инъективное, если* $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$;
(7) *если существует аппроксимация единицы* $\{\delta_n\} \subset \mathcal{A}$ *(так что* $\delta_n f \to f$ *и* $f\delta_n \to f$, $n \to \infty,\ \forall f \in \mathcal{A}$*), то* $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$ *и образ* $\alpha(\operatorname{cen}\mathcal{A})$ *плотен в* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Наконец, если $\mathcal{A}$ – унитальная ассоциативная алгебра, то

(8) $\alpha: \operatorname{cen}\mathcal{A} \simeq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *обратное отображение* α^{-1} *действует по правилу* $M \mapsto \alpha^{-1}(M) = M(e),\ \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *где* e – *единица алгебры* $\mathcal{A}$; *в частности, можно отождествить алгебры* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *и* $\operatorname{cen}\mathcal{A}$.

0.3. Дифференцирования. Отображение $D \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ называется *дифференцированием*, если выполняется правило Лейбница: $D(fg) = D(f)g + fD(g),\ \forall f, g \in \mathcal{A}$.

Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *есть левый* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$*-модуль,* $MD = M \circ D,\ \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *и* $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$*;*
(2) $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *есть подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{L}_{[\,,\,]}(\mathcal{A})$*;*
(3) $D\colon \operatorname{ann}\mathcal{A} \to \operatorname{ann}\mathcal{A}$ *и* $D\colon \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \operatorname{cen}\mathcal{A},\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$*;*
(4) *коммутатор* $[D, M] \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}),\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *и* $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

В частности, для каждого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ правило $\widehat{D}(M) = [D, M],\ \ M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, задает отображение $\widehat{D}\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Более того, в силу тождества Якоби

(5) $\widehat{D}(M \circ N) = \widehat{D}(M) \circ N + M \circ \widehat{D}(N),\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *и* $\forall M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Таким образом, правило $D \mapsto \beta(D) = \widehat{D},\ D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, определяет действие $\beta\colon \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

(6) *Действие* $\beta\colon \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ *есть морфизм алгебр Ли.*
(7) *Справедливо расширенное правило Лейбница:* $D(M(f)) = \widehat{D}(M)(f) + M(D(f))$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\ \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *и* $\forall f \in \mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная, то

(8) *действия* α *на* $\operatorname{cen}\mathcal{A}$ *и* β *на* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *совместны, т.е.* $\widehat{D}(\alpha(f)) = \alpha(D(f)),\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *и* $\forall f \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$*;*
(9) *для каждого* $f \in \mathcal{A}$ *действие* $\alpha_-(f)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ \alpha_-(f)(g) = [f, g],\ g \in \mathcal{A}$*, является дифференцированием алгебры* $\mathcal{A}$ *(т.е.* $\alpha_-(f) \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$*).*

Дифференцирование вида $\alpha_-(f)$ называется *внутренним*, очевидно, оно нетривиальное, если $f \notin \operatorname{cen}\mathcal{A}$.

0.4. Константы. Элемент $f \in \mathcal{A}$ называется *константой*, если $D(f) = 0,\ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Обозначим $\operatorname{con}\mathcal{A}$ множество всех констант алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, что $\operatorname{con}\mathcal{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, причем если алгебра $\mathcal{A}$ унитальна, то ее единица $e \in \operatorname{con}\mathcal{A}$.

Подмножество $\mathcal{S} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ называется *тотальным*, если условие $D(f) = 0,\ \forall D \in \mathcal{S}$, влечет $f \in \operatorname{con}\mathcal{A}$.

0.5. Дифференциальные алгебры. *Дифференциальная алгебра* есть пара $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$, где $\mathcal{A}$ – алгебра, а $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ (см., например, [17, 18]). Дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$ называется *стандартной*, если $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ есть свободный конечномерный подмодуль левого $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуля $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ с попарно коммутирующим базисом $D_1, \dots, D_m \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ ($[D_\mu, D_\nu] = 0,\ \ \mu, \nu \in \overline{1, m}$), так что

$$\mathfrak{C}(\mathcal{A}) \equiv [D] = \left\{ D = \sum_{\mu=1}^{m} M_\mu D_\mu : M_\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mu \in \overline{1, m} \right\}$$

(здесь и всюду ниже $\overline{k, l} \equiv \{k, k+1, \dots, l\}$). Дифференциальные алгебры возникают в алгебро-геометрическом подходе к дифференциальным уравнениям. Учитывая это, мы будем использовать принятую там терминологию (см., например, [19, 20]). Так, дифференцирования из подалгебры $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ называются *картановыми*.

Дифференцирование $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ называется дифференцированием *Ли–Беклунда*, если $[X, D] \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$, $\forall D \in \mathfrak{C}(\mathcal{A})$. Множество всех таких дифференцирований образует подалгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, причем по построению $\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ есть идеал в $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Фактор-алгебра $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{C}(\mathcal{A})} \mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{A})/\mathfrak{C}(\mathcal{A})$ называется алгеброй Ли *симметрий* дифференциальной алгебры $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$.

0.6. Дифференциальные формы. Будем считать, что изучаемая алгебра $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию:

(i) алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ коммутативная (например, $\operatorname{ann} \mathcal{A} = 0$).

В этом случае $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль, и определена его *внешняя алгебра*

$$\wedge^* \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \prod_{r=0}^{\infty} \wedge^r \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \wedge^0 \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A}), \quad \wedge^1 \mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}), \quad \dots .$$

В частности, для любых $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *внешнее произведение*

$$D_1 \wedge \dots \wedge D_r = \frac{1}{r!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sign} \pi D_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes D_{\pi(r)} \in \wedge^r \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

где $\mathfrak{S}_r$ – группа всех перестановок чисел $1, \dots, r$.

Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная $\mathbb{F}$-алгебра такая, что:

(ii) определен морфизм ассоциативных алгебр $\varphi\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{K})$,
(iii) определен морфизм алгебр Ли $\psi\colon \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{K})$,
(iv) выполнены *условия согласования*

$$\psi(MD) = \varphi(M)\psi(D) \quad \text{и} \quad \varphi([M, D]) = [\varphi(M), \psi(D)], \quad \forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}).$$

(Напомним, что $MD \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $[M, D] \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.) В частности, алгебра $\mathcal{K}$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль.

Замечание. Условиям (ii)–(iv) удовлетворяют, например, следующие алгебры (считаем, что условие (i) выполнено):

(1) сама алгебра $\mathcal{A}$, в этом случае $\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$ и $\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}(\mathcal{A})}$;
(2) алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, в этом случае $\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$ (поясним, что в силу (i) $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \cong \mathfrak{M}(\mathcal{A})$), а морфизм $\psi\colon \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ определяется правилом $\psi(D)(M) = [D, M]$, $\forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;
(3) алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ при условии $[\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A})] = 0$, здесь морфизм $\varphi\colon \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ дается правилом $\varphi(M)(X) = MX$, а морфизм $\psi\colon \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ – правилом $\psi(D)(X) = [D, X]$, $\forall M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $D, X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Отметим, что условие $[\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A})] = 0$ выполняется, если $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{F} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$, очевидно, что в этом случае условие (i) также выполнено.

Положим

$$\Omega^*(\mathcal{A};\mathcal{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}(\wedge^*\mathfrak{D}(\mathcal{A});\mathcal{K}) = \sum_{r=0}^{\infty} \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}).$$

Подробнее,

$$\Omega^0(\mathcal{A};\mathcal{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}(\mathfrak{M}(\mathcal{A});\mathcal{K}) \cong \mathcal{K}$$

(изоморфизм задается правилом $\Omega^0(\mathcal{A};\mathcal{K}) \ni \omega \mapsto k = \omega(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{K}$), а при $r > 0$

$$\omega(D_1, \dots, D_r) \equiv \omega(D_1 \wedge \dots \wedge D_r), \quad \omega \in \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}),$$

есть кососимметрическая функция, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-линейная по каждому из аргументов $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Элементы из $\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$ называются *дифференциальными r-формами.*

0.7. Операции над дифференциальными формами. Перечислим основные структуры, определенные на $\Omega^*(\mathcal{A};\mathcal{K})$, и их свойства. Прежде всего отметим, что *$\Omega^*(\mathcal{A};\mathcal{K})$ есть $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль, причем по определению*

$$(M\omega)(D_1, \dots, D_r) = \varphi(M)(\omega(D_1, \dots, D_r))$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$ и $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Линейные операции (считаем $\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K} = 0)$ при $r < 0$ и $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$):

свертка	$\iota_D\colon \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}) \to \Omega^{r-1}(\mathcal{A};\mathcal{K})$,
производная Ли	$L_D\colon \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}) \to \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$,
дифференциал	$d\colon \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}) \to \Omega^{r+1}(\mathcal{A};\mathcal{K})$,

зададим соответственно формулами (считаем $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$)

$$(\iota_D\omega)(D_1, \dots, D_{r-1}) = \omega(D, D_1, \dots, D_{r-1}), \quad D_1, \dots, D_{r-1} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

(в частности, $\iota_D\omega = 0$ при $r = 0$);

$$(L_D\omega)(D_1, \dots, D_r) = \psi(D)\bigl(\omega(D_1, \dots, D_r)\bigr) - \sum_{i=1}^{r} \omega\bigl(D_1, \dots, [D, D_i], \dots, D_r\bigr)$$

для $D_1, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и, наконец,

$$\begin{aligned}(d\omega)(D_0, \dots, D_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \psi(D_i)\bigl(\omega(D_0, \dots, \check{D}_i, \dots, D_r)\bigr) &+ \\ + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant r} (-1)^{i+j} \omega\bigl([D_i, D_j], D_0, \dots, \check{D}_i, \dots, \check{D}_j, \dots, D_r\bigr)&\end{aligned}$$

для $D_0, \dots, D_r \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, значок ˇ над какой-либо переменной означает, что эта переменная опущена.

Введенные операции обладают стандартными свойствами:

(1) $\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(2) $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(3) $d \circ d = 0$;
(4) $L_D = d \circ \iota_D + \iota_D \circ d, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(5) $L_D \circ d = d \circ L_D, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Корректность приведенных определений и справедливость соотношений (1)–(5) проверяется с помощью условий (i)–(iv) раздела 0.6.

0.8. Алгебра дифференциальных форм. Определим в $\Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ *умножение* правилом

$$\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \qquad \theta \in \Omega^s(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \mapsto \omega \cdot \theta \in \Omega^{r+s}(\mathcal{A}; \mathcal{K}),$$

где

$$(\omega \cdot \theta)(D_1, \dots, D_{r+s}) = \\ = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{r+s}} \operatorname{sign} \pi \, \omega(D_{\pi(1)}, \dots, D_{\pi(r)}) \theta(D_{\pi(r+1)}, \dots, D_{\pi(r+s)})$$

для всех $D_1, \dots, D_{r+s} \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Это умножение обладает следующими свойствами (считаем $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \quad \theta \in \Omega^s(\mathcal{A}; \mathcal{K})$):

(1) $\iota_D(\omega \cdot \theta) = (\iota_D \omega) \cdot \theta + (-1)^r \omega \cdot (\iota_D \theta), \ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(2) $L_D(\omega \cdot \theta) = (L_D \omega) \cdot \theta + \omega \cdot (L_D \theta), \ \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(3) $d(\omega \cdot \theta) = (d\omega) \cdot \theta + (-1)^r \omega \cdot (d\theta)$;
(4) *если алгебра $\mathcal{K}$ коммутативная, то $\omega \cdot \theta = (-1)^{rs} \theta \cdot \omega$.*

Корректность определения операции умножения и справедливость формул (1)–(4) проверяется с помощью условий (i)–(iv) раздела 0.6.

0.9. Когомологии де Рама. В силу пункта (3) раздела 0.7 определен комплекс линейных пространств

$$0 \to \Omega^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \xrightarrow{d} \cdots,$$

его когомологии $H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K})$, $r = 0, 1, \dots$, называются *когомологиями де Рама алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в алгебре $\mathcal{K}$*. Например,

$$H^0(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \{\omega \in \mathcal{K} \colon \psi(D)(\omega) = 0, \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})\}.$$

Положим

$$H^*(\mathcal{A}; \mathcal{K}) = \sum_{r=0}^{\infty} H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}).$$

Правило

$$[\omega] \in H^r(\mathcal{A}; \mathcal{K}), \qquad [\theta] \in H^s(\mathcal{A}; \mathcal{K}) \mapsto [\omega] \cdot [\theta] = [\omega \cdot \theta] \in H^{r+s}(\mathcal{A}; \mathcal{K})$$

определяет в линейном пространстве $H^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ *умножение* и превращает его в $\mathbb{F}$-алгебру.

0.10. Картановы формы. Пусть $(\mathcal{A}, \mathfrak{C}(\mathcal{A}))$ – дифференциальная алгебра (см. раздел 0.5), $\mathcal{K}$ – некоторая $\mathbb{F}$-алгебра, и по-прежнему выполнены условия (i)–(iv) раздела 0.6.

Дифференциальная r-форма $\omega \in \Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$ называется *s-картановой*, если $\omega(D_1,\dots,D_r)=0$ всякий раз, когда среди дифференцирований $D_1,\dots,D_r$ имеются хотя бы $r-s+1$ картановых. $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$-модуль всех s-картановых r-форм обозначим через $C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$.

Приведем основные свойства операций над картановыми формами (по определению $C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})=\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$ при $s<0$ и $C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})=0$ при $s>r$ или $r<0$):

(1) $\omega\cdot\theta \in C^{s+q}\Omega^{r+p}(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \forall\omega\in C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \theta\in C^q\Omega^p(\mathcal{A};\mathcal{K})$;
(2) $\iota_D\colon C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})\to C^{s-1}\Omega^{r-1}(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \ \forall D\in\mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(3) $\iota_D\colon C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})\to C^{s}\Omega^{r-1}(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \forall D\in\mathfrak{C}(\mathcal{A})$;
(4) $L_D\colon C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})\to C^{s-1}\Omega^{r}(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \forall D\in\mathfrak{D}(\mathcal{A})$;
(5) $L_D\colon C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})\to C^{s}\Omega^{r}(\mathcal{A};\mathcal{K}),\ \forall D\in\mathfrak{B}(\mathcal{A})$;
(6) $d\colon C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})\to C^{s}\Omega^{r+1}(\mathcal{A};\mathcal{K})$.

0.11. Спектральная последовательность. Сохраняем обозначения раздела 0.10 и добавляем сокращение $C^s\Omega^r\equiv C^s\Omega^r(\mathcal{A};\mathcal{K})$. По построению имеется фильтрация

$$\Omega^r = C^0\Omega^r \supset C^1\Omega^r \supset C^2\Omega^r \supset\dots\supset C^r\Omega^r\supset 0,$$

совместимая с градуировкой

$$\Omega^* = \sum_{r=0}^{\infty}\Omega^r$$

и дифференциалом $d\colon \Omega^r\to\Omega^{r+1},\ \ r=0,1,\dots$. Согласно общей теории (см., например, [21]) определена спектральная последовательность $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}; p,q,r=0,1,\dots\}$ с членами

$$E_r^{p,q}\equiv E_r^{p,q}(\mathcal{A},\mathfrak{C}(\mathcal{A});\mathcal{K}) = \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q}+Z_{r-1}^{p+1,q-1}},$$

где

$$Z_r^{p,q} = \{\omega\in C^p\Omega^{p+q} : d\omega\in C^{p+r}\Omega^{p+q+1}\},$$
$$B_r^{p,q} = \{\omega = d\theta\in C^p\Omega^{p+q} : \theta\in C^{p-r}\Omega^{p+q-1}\},$$

а линейные отображения

$$d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$$

индуцированы дифференциалом d (т.е. $d_r^{p,q}[\omega]=[d\omega],\ \ \forall[\omega]\in E_r^{p,q}$). Члены порядка $r=\infty$ определяются формулами

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}+Z_\infty^{p+1,q-1}},\quad p,q=0,1,\dots,$$

где

$$Z_\infty^{p,q} = \{\omega\in C^p\Omega^{p+q}\colon d\omega=0\},$$
$$B_\infty^{p,q} = \{\omega = d\theta\in C^p\Omega^{p+q} : \theta\in\Omega^{p+q-1}\}.$$

Перечислим основные свойства спектральной последовательности:

(1) $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0,\ E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r^{p,q} \big/ \operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1}$;

(2) $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q},\ r > \max\{p, q+1\}$.

Пусть симметрия $[D] \in \operatorname{Sym} \mathcal{A}$ (см. раздел 0.5),

(3) *линейное отображение* $\iota_{[D]} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q+r-1}$ *определено правилом* $\iota_{[D]}[\omega] = [\iota_D \omega],\ [\omega] \in E_r^{p,q}$;

(4) *линейное отображение* $L_{[D]} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p,q}$ *определено аналогичным правилом* $L_{[D]}[\omega] = [L_D \omega],\ [\omega] \in E_r^{p,q}$;

(5) $L_{[D]} \circ d_r^{p,q} = d_r^{p,q} \circ L_{[D]}$;

(6) $L_{[D]} = \iota_{[D]} \circ d_r^{p,q} + d_r^{p,q} \circ \iota_{[D]}$.

0.12. Связь с когомологиями де Рама. Сохраняем соглашения раздела 0.11 и добавим сокращение $H^k \equiv H^k(\mathcal{A}; \mathcal{K})$. Фильтрация дифференциальных форм картановыми формами (раздела 0.11) порождает фильтрацию когомологий де Рама

$$H^k = H^{0,k} \supset H^{1,k} \supset H^{2,k} \supset \dots \supset H^{k,k} \supset 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где линейные пространства

$$H^{p,k} = \frac{\{\omega \in C^p \Omega^k \colon d\omega = 0\}}{\{\omega = d\theta \in C^p \Omega^k \colon \theta \in \Omega^{k-1}\}}, \quad p, k = 0, 1, \dots .$$

(1) *Справедливы равенства* $E_\infty^{p,k-p} = H^{p,k} \big/ H^{p+1,k},\ p, k = 0, 1, \dots,$ другими словами, *имеется равенство градуированных линейных пространств* $E_\infty^k = G(H^k)$, $k = 0, 1, \dots$, *где по определению*

$$E_\infty^k = \sum_{p+q=k} E_\infty^{p,q},$$

а

$$G(H^k) = \sum_{p=0}^{k} H^{p,k} \big/ H^{p+1,k}$$

– градуированное пространство, ассоциированное с введенной выше фильтрацией.

1. АЛГЕБРА ГЕЙЗЕНБЕРГА

1.1. Обозначения. Будем использовать мультииндексные обозначения:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \supset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \supset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$;

$i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d,\ d \in \mathbb{N}$ фиксировано;

$|i| = i_1 + \dots + i_d,\ i \pm j = (i_1 \pm j_1, \dots, i_d \pm j_d),\ i, j \in \mathbb{Z}$;

$(\mu) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$, единица на μ-м месте, $\mu \in \overline{1,d} \equiv \{1, \dots, d\}$;

$i \leqslant j,\ i, j \in \mathbb{Z}^d$, если $i_\mu \leqslant j_\mu$ для всех $\mu \in \overline{1,d}$;

$i! = i_1! \dots i_d!,\ i \in \mathbb{Z}^d\ \ (\iota! = \infty$ при $\iota \in \{-1, -2, \dots\})$;

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}, \quad i \in \mathbb{Z}_+^d, \quad j \in \mathbb{Z}^d;$$
$$\binom{i,j}{k} = k!\binom{i}{k}\binom{j}{k}, \quad i,j,k \in \mathbb{Z}_+^d;$$
$$\binom{i,j;k,l}{m} = \binom{j,k}{m} - \binom{l,i}{m}, \quad i,j,k,l,m \in \mathbb{Z}_+^d.$$

1.2. Определение. Будем считать, что фиксированы поле $\mathbb{F}$ нулевой характеристики ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$), размерность $d \in \mathbb{N}$ и константа $\varkappa \in \mathbb{F},\ \varkappa \neq 0$.

Пусть $\mathbb{F}\langle r \rangle$ – *алгебра некоммутативных многочленов* от образующих $r = (q,p)$, $q = (q_1, \dots, q_d),\ p = (p_1, \dots, p_d)$ с элементами $f(r) = \sum_A c_A r^A$, где

$$\begin{aligned}
&r_\alpha = q_\alpha \text{ при } \alpha \in \overline{1,d}, \qquad r_\alpha = p_{\alpha-d} \text{ при } \alpha \in \overline{d+1,2d};\\
&A = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_\nu \in \overline{1,2d}, \quad \nu \in \overline{1,N}, \quad N = |A|;\\
&c_A = c_{\alpha_1 \dots \alpha_N} \in \mathbb{F}, \quad \text{лишь конечное число } c_A \neq 0;\\
&r^A = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_N}.
\end{aligned}$$

Определяющие соотношения (квантовые перестановочные соотношения):

$$q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu = 0, \quad p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu = 0, \quad p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa \delta_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu \in \overline{1,d},$$

порождают двусторонний идеал $\mathcal{J}$ алгебры $\mathbb{F}\langle r \rangle$. *Алгебра Гейзенберга* определяется как фактор-алгебра $\mathcal{H} = \mathbb{F}\langle r \rangle / \mathcal{J}$.

1.3. Нормальные многочлены. Многочлен $f \in \mathbb{F}\langle r \rangle$ называется *нормальным*, если

$$f = f(q,p) = \sum_{i,j} f_{ij} q^i p^j,$$

где лишь конечное число коэффициентов $f_{ij} \in \mathbb{F}$ ненулевые, $q^i = (q_1)^{i_1} \dots (q_d)^{i_d},\ p_j = (p_1)^{j_1} \dots (p_d)^{j_d},\ i,j \in \mathbb{Z}_+^d$.

1.4. Предложение. *Справедливы равенства*

$$p^j q^i = \sum_k \varkappa^{|k|} \tbinom{j,i}{k} q^{i-k} p^{j-k} \pmod{\mathcal{J}}, \quad j, i \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Доказательство. Пусть сначала $d = 1$, так что $i,j,k \in \mathbb{Z}_+$. Вычисления проводим по $\operatorname{mod} \mathcal{J}$, т.е. пренебрегая слагаемыми, лежащими в идеале $\mathcal{J}$. Равенства тривиально справедливы при $i = j = 0$, при $i = 0,\ j > 0$ и при $i > 0,\ j = 0$. Легко также проверить, что

$$pq^i = q^i p + i\varkappa q^{i-1} \ \text{ и } \ p^j q = qp^j + j\varkappa p^{j-1}, \quad i,j \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что равенства справедливы при некоторых $i, j > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} p^{j+1}q^i &= p(p^j q^i) = p\sum_k \varkappa^k \tbinom{j,i}{k} q^{i-k}p^{j-k} = \sum_k \varkappa^k \tbinom{j,i}{k}(pq^{i-k})p^{j-k} = \\ &= \sum_k \varkappa^k \tbinom{j,i}{k}\left(q^{i-k}p + (i-k)\varkappa q^{i-k-1}\right)p^{j-k} = \\ &= \sum_k \varkappa^k \tbinom{j,i}{k} q^{i-k}p^{j+1-k} + \sum_k \varkappa^{k+1}\tbinom{j,i}{k}(i-k)q^{i-k-1}p^{j-k} = \\ &= \sum_k \varkappa \left[\tbinom{j,i}{k} + (i+1-k)\tbinom{j,i}{k-1}\right] q^{i-k}p^{j+1-k} = \sum_k \varkappa^k \tbinom{j+1,i}{k} q^{i-k}p^{j+1-k}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\binom{j,i}{k} + (i+1-k)\binom{j,i}{k-1} = \binom{j+1,i}{k}.$$

Аналогично проверяется переход $j, i \mapsto j, i+1$. Итак, в случае $d = 1$ равенства верны.

Случай $d > 1$ сводится к одномерному с помощью коммутационных соотношений $p_\mu q_\nu = q_\nu p_\mu$ при $\mu \neq \nu$.

1.5. Следствие. *Каждый многочлен $f \in \mathbb{F}\langle r\rangle$ имеет представление $f(r) = g(q,p) + h(r)$, где $g(q,p)$ – нормальный многочлен, а $h(r) \in \mathcal{J}$.*

1.6. Операторное представление. Пусть $\mathbb{F}[x]$ – алгебра коммутативных многочленов от $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{F}^d$, $\mathfrak{L}(\mathbb{F}[x])$ – алгебра непрерывных линейных отображений $\mathbb{F}[x]$ в себя. Правило $q_\mu, p_\mu \mapsto \widetilde{q_\mu}, \widetilde{p_\mu}$, $\mu \in \overline{1,d}$, где

$$(\widetilde{q_\mu}\varphi)(x) = x_\mu\varphi(x), \qquad (\widetilde{p_\mu}\varphi)(x) = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \quad \varphi \in \mathbb{F}[x],$$

задает представление $\Pi\colon \mathbb{F}\langle r\rangle \to \mathfrak{L}(\mathbb{F}[x])$, $f(r) \mapsto f(\widetilde{r})$, алгебры некоммутативных многочленов $\mathbb{F}\langle r\rangle$ в $\mathbb{F}[x]$.

1.7. Предложение. *Пусть $f(q,p)$ – нормальный многочлен и $f(\widetilde{q},\widetilde{p})$ – соответствующий оператор; $f(\widetilde{q},\widetilde{p}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(q,p) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что $\widetilde{p}^j(x^k) = \varkappa^{|j|}j!\binom{k}{j}x^{k-j}$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}^d_+$. Далее, пусть $f(\widetilde{q},\widetilde{p}) = 0$, где

$$f(q,p) = \sum_{i,j} c_{ij}q^ip^j = \sum_j \chi_j(q)p^j, \qquad \chi_j(q) = \sum_i c_{ij}q^i.$$

Тогда, в частности,

$$f(\widetilde{q},\widetilde{p})(x^k) = \sum_{j\leqslant k}\chi_j(x)\varkappa^{|j|}j!\tbinom{k}{j}x^{k-j} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d_+.$$

Полагая последовательно $|k| = 0, 1, 2, \dots$, убедимся, что многочлены $\chi_j(q) = 0$ при $|j| = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда $f(q,p) = 0$, что и требовалось доказать.

1.8. Следствие. *Справедливо равенство* $\ker \Pi = \mathcal{J}$, *где* $\ker \Pi$ – *ядро морфизма* Π.

Доказательство вытекает из предложения 1.7 с учетом следствия 1.5 и очевидного включения $\mathcal{J} \subset \ker \Pi$.

1.9. Теорема. *Алгебра Гейзенберга* $\mathcal{H}$ *канонически изоморфна алгебре всех нормальных многочленов из* $\mathbb{F}\langle r \rangle$ *с обычными линейными операциями и умножением, задаваемым правилом*

$$q^i p^j \cdot q^k p^l = \sum_{m,n} A_{mn}^{ij,kl} q^m p^n, \qquad A_{mn}^{ij,kl} = \sum_r \varkappa^{|r|} \tbinom{j,k}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r},$$

где $i, j, k, l, m, n, r \in \mathbb{Z}_+^d$.

Доказательство следует из предложений 1.4, 1.7 и следствий 1.5, 1.8.

Ниже мы отождествляем $\mathcal{H}$ с этой алгеброй нормальных многочленов.

1.10. Действия над нормальными многочленами. Из правила умножения теоремы 1.9 следует, что *коммутатор* имеет вид

$$\begin{gathered}[q^i p^j, q^k p^l] = \varkappa \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} q^m p^n, \\ C_{mn}^{ij,kl} = \frac{1}{\varkappa}\big(A_{mn}^{ij,kl} - A_{mn}^{kl,ij}\big) = \sum_r \varkappa^{|r|-1} \tbinom{i,j;k,l}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r},\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $i, j, k, l, m, n, r \in \mathbb{Z}_+^d$. В частности, *если* $f(q,p) = \sum_{i,j} f_{ij} q^i p^j$ *– нормальный многочлен, то*

$$\begin{gathered}[p_\mu, f(q,p)] = \varkappa \frac{\partial f(q,p)}{\partial q_\mu}, \\ [q_\mu, f(q,p)] = -\varkappa \frac{\partial f(q,p)}{\partial p_\mu}, \quad \mu \in \overline{1,d},\end{gathered} \tag{1.2}$$

где частные производные вычисляются по обычным формулам

$$\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_\mu} = \sum_{i,j} f_{ij} i_\mu q^{i-(\mu)} p^j,$$
$$\frac{\partial f(q,p)}{\partial p_\mu} = \sum_{i,j} f_{ij} j_\mu q^i p^{j-(\mu)}.$$

Формулы (1.2) имеют обобщения

$$[p^j, f] = \sum_{|m| \geqslant 1} \varkappa^{|m|} \tbinom{j}{m} \frac{\partial^{|m|} f}{\partial q^m} p^{j-m}, \qquad [q^i, f] = -\sum_{|m| \geqslant 1} \varkappa^{|m|} \tbinom{i}{m} q^{i-m} \frac{\partial^{|m|} f}{\partial p^m}, \tag{1.3}$$

где $f = f(q,p)$ – нормальный многочлен, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$.

Частные производные нормальных многочленов обладают многими обычными свойствами, например, смешанные производные, взятые в различных порядках, совпадают:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial q_\mu}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\nu \partial p_\mu}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial p_\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_\nu \partial q_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}.$$

Далее, система

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial q_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial q_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \tag{1.4}$$

имеет в классе нормальных многочленов общее решение

$$f_\mu(q,p) = \frac{g(q,p)}{\partial q_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d}, \qquad g(q,p) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^d q_\nu f_\nu(tq, p) dt + h(p), \tag{1.5}$$

$h(p)$ – произвольный нормальный многочлен, не зависящий от q.

Аналогично система

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial p_\mu}, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \tag{1.6}$$

имеет общее решение

$$f_\mu(q,p) = \frac{g(q,p)}{\partial p_\mu}, \quad \mu \in \overline{1, d}, \qquad g(q,p) = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^d f_\nu(q, tp) p_\nu dt + h(q). \tag{1.7}$$

Наконец, система

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial p_\nu} = 0, \quad \mu, \nu \in \overline{1, d}, \tag{1.8}$$

имеет общее решение

$$f(q,p) = g(q) + h(p) \tag{1.9}$$

с произвольными $g(q)$ и $h(p)$.

1.11. Свойства алгебры Гейзенберга. Перечислим основные свойства алгебры $\mathcal{H}$ с короткими пояснениями.

(1) *Нормальные мономы* $\rho^{ij} \equiv q^i p^j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+^d$, *образуют базис линейного пространства* $\mathcal{H}$, *моном* $1 = \rho^{00}$ *является единицей алгебры* $\mathcal{H}$.

(2) *Алгебра* $\mathcal{H}$ *ассоциативная.*

Заметим, что из ассоциативности умножения следует, что коэффициенты $A_{mn}^{ij,kl}$ (см. теорему 1.9) удовлетворяют некоторым тождествам, которые можно проверить и непосредственно.

(3) *Алгебра* $\mathcal{H}$ *некоммутативная, ее центр* $\operatorname{cen} \mathcal{H} = \mathbb{F}$.

Действительно, пусть нормальный многочлен $f(q,p) \in \operatorname{cen}\mathcal{H}$. В частности, $[p_\mu, f(q,p)] = 0$. Полагая $f(q,p) = \sum_j \chi_j(q)p^j$, из (1.2) выводим

$$\frac{\partial \chi_j(q)}{\partial q_\mu} = 0$$

при всех $\mu \in \overline{1,d}$ и $j \in \mathbb{Z}_+^d$, откуда $f = f(p)$. Далее, $[q_\mu, f(p)] = 0$, т.е. в силу (1.2)

$$\frac{\partial f(p)}{\partial q_\mu} = 0$$

для всех $\mu \in \overline{1,d}$, так что $f = c \cdot 1,\ c \in \mathbb{F}$, что и требовалось доказать.

(4) *Алгебра $\mathcal{H}$ простая, т.е. не имеет нетривиальных двусторонних идеалов.*

Действительно, пусть $\mathcal{I}$ – ненулевой двусторонний идеал алгебры $\mathcal{H}$ и $f \in \mathcal{I}$, $f(q,p) = \sum_j \chi_j(q)p^j \neq 0$. Из определения двустороннего идеала, в частности, следует, что $p_\mu f, f p_\mu \in \mathcal{I}$ для всех $\mu \in \overline{1,d}$, откуда

$$\sum_j \frac{\partial \chi_j(q)}{\partial q_\mu} p^j = \frac{1}{\varkappa}[p_\mu, f] \in \mathcal{I}.$$

По индукции

$$\sum_j \frac{\partial^k \chi_j(q)}{\partial q^k} p^j \in \mathcal{I}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Выбирая k подходящим образом, построим ненулевой многочлен $g(p) = \sum_j c_j p^j \in \mathcal{I},\ c_j \in \mathbb{F}$. Далее, $q_\mu g, g q_\mu \in \mathcal{I}$ для всех $\mu \in \overline{1,d}$, откуда

$$\frac{\partial^l g(p)}{\partial p^l} \in \mathcal{I}$$

при всех $l \in \mathbb{Z}_+^d$. Выбирая l подходящим образом, получим ненулевую постоянную $c = c \cdot 1 \in \mathcal{I},\ 0 \neq c \in \mathbb{F}$. Итак, $1 \in \mathcal{I}$ и, значит, $\mathcal{I} = \mathcal{H}$, что и требовалось доказать.

(5) *Алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$.*

Утверждение (5) следует из равенства $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \operatorname{cen}\mathcal{H}$ (см. пункт (8) раздела 0.2) и свойства (3).

(6) *Алгебра $\mathcal{H}$ имеет $\mathbb{Z}^d$-градуировку.*

Действительно, каждой паре мультииндексов $i, j \in \mathbb{Z}^d$ поставим в соответствие *градуировку* $\gamma(i,j) = i - j$, а для каждого мультииндекса $k \in \mathbb{Z}^d$ рассмотрим

$$\mathcal{H}_k = \left\{ f(q,p) = \sum_{i-j=k} f_{ij}\rho^{ij} \in \mathcal{H} \right\}$$

– линейное пространство γ-однородных нормальных многочленов порядка k. Тогда

$$\mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k, \qquad \mathcal{H}_k \cdot \mathcal{H}_l \subset \mathcal{H}_{k+l},$$

т.е. $fg \in \mathcal{H}_{k+l}$, если $f \in \mathcal{H}_k,\ g \in \mathcal{H}_l$ (см. правило умножения теоремы 1.9).

(7) *В алгебре $\mathcal{H}$ определены две операции транспонирования.*

Первая операция транспонирования определяется как линейное отображение ${}^t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, однозначно задаваемое правилом $(q^ip^j)^t = q^jp^i$, $i,j \in \mathbb{Z}_+^d$. Действительно, это правило согласовано с определяющими соотношениями алгебры Гейзенберга (см. раздел 1.2), например, $(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa\delta_{\mu\nu})^t = p_\nu q_\mu - q_\mu p_\nu - \varkappa\delta_{\nu\mu}$, $\mu,\nu \in \overline{1,d}$, и, кроме того, $(f^t)^t = f$, $(fg)^t = g^tf^t$, $f,g \in \mathcal{H}$. Обратим внимание на то, что ${}^t\colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, т.е. *транспонирование* ^{t} *меняет градуировку на противоположную, оставляя неподвижным нейтральное пространство* $\mathcal{H}_0$.

Аналогичным образом линейное отображение ${}^\tau\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, задаваемое правилом

$$(q^ip^j)^\tau = (-p)^jq^i = (-1)^{|j|}\sum_k \varkappa^{|k|}\binom{i,j}{k}q^{i-k}p^{j-k}, \quad i,j \in \mathbb{Z}_+^d,$$

определяет альтернативную операцию транспонирования в $\mathcal{H}$. В этом случае ${}^\tau\colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$, т.е. *транспонирование* ${}^\tau$ *сохраняет градуировку.*

Правило

$$(Af)(q,p) = f\left(\frac{p+q}{2}, p-q\right), \quad f(q,p) \in \mathcal{H},$$

определяет линейное отображение $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Оно обратимо,

$$(A^{-1}g)(q,p) = g\left(q - \frac{1}{2}p, q + \frac{1}{2}p\right), \quad g \in \mathcal{H},$$

согласовано с определяющими соотношениями раздела 1.2, например

$$A(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa\delta_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Big\{(p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) + (p_\nu q_\mu - q_\mu p_\nu - \varkappa\delta_{\nu\mu}) + \\ + (p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa\delta_{\mu\nu}) + (q_\nu q_\mu - q_\mu q_\nu)\Big\}, \quad \mu,\nu \in \overline{1,d},$$

и, следовательно, *является автоморфизмом алгебры* $\mathcal{H}$.

Легко проверяется, что *автоморфизм* A *переводит операции транспонирования* ${}^\tau$ *и* ^{t} *друг в друга, т.е.* $(A(f))^t = A(f^\tau)$, $f \in \mathcal{H}$.

Транспонирования в $\mathcal{H}$, в свою очередь, порождают транспонирования в алгебре $\mathfrak{L}_0(\mathcal{H})$ правилами

$$F^t(f) = \big(F(f^t)\big)^t, \quad F^\tau(f) = \big(F(f^\tau)\big)^\tau, \quad F \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \quad f \in \mathcal{H}.$$

(8) *В алгебре* $\mathcal{H}$ *определено понятие четности.*

Действительно, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{ev}} + \mathcal{H}_{\mathrm{od}}$, где

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ev}} = \{f \in \mathcal{H}\colon f(-q,-p) = f(q,p)\}, \quad \mathcal{H}_{\mathrm{od}} = \{f \in \mathcal{H}\colon f(-q,-p) = -f(q,p)\},$$

причем

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ev}}\cdot\mathcal{H}_{\mathrm{ev}}, \mathcal{H}_{\mathrm{od}}\cdot\mathcal{H}_{\mathrm{od}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ev}}, \quad \mathcal{H}_{\mathrm{ev}}\cdot\mathcal{H}_{\mathrm{od}}, \mathcal{H}_{\mathrm{od}}\cdot\mathcal{H}_{\mathrm{ev}} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{od}}.$$

(9) *В алгебре* $\mathcal{H}$ *определена скобка Пуассона*

Действительно, билинейная операция

$$\mathcal{H} \ni f, g \mapsto \{f, g\} = \frac{1}{\varkappa}[f, g] \in \mathcal{H}$$

обладает всеми необходимыми свойствами. В частности,

$$\{\rho^{ij}, \rho^{kl}\} = \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn}, \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}_+^d,$$

структурные константы $C_{mn}^{ij,kl}$ определены в разделе 1.10.

Таким образом, в множестве нормальных многочленов $\mathcal{H}$ определены следующие структуры: *линейное пространство* – множество $\mathcal{H}$ плюс обычные $\mathbb{F}$-линейные операции, *(ассоциативная) алгебра* – линейное пространство $\mathcal{H}$ плюс ассоциативное некоммутативное умножение, *алгебра Пуассона* – алгебра $\mathcal{H}$ плюс скобка Пуассона, *алгебра Ли* – линейное пространство $\mathcal{H}$ плюс скобка Пуассона, рассматриваемая как скобка Ли.

2. АЛГЕБРА ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

2.1. Внутренние дифференцирования. Согласно пункту (9) раздела 0.3 в алгебре $\mathcal{H}$ есть внутренние дифференцирования $\alpha_-(f)$, задаваемые правилом

$$\alpha_-(f)(g) = \frac{1}{\varkappa}[f, g] = \{f, g\}, \quad f, g \in \mathcal{H}$$

(множитель $1/\varkappa$ добавлен для удобства, ср. с (1.2)); очевидно, что дифференцирование $\alpha_-(f)$ нетривиальное, если нормальный многочлен $f(q, p) \neq \mathbb{F} \cdot 1$. Итак,

(1) *правило* $f \mapsto \alpha_-(f)$ *задает линейное отображение* $\alpha_-\colon \mathcal{H} \to \mathfrak{D}(\mathcal{H})$, *его ядро* $\ker \alpha_- = \operatorname{cen} \mathcal{H} = \mathbb{F}$.

2.2. Предложение. *Все дифференцирования алгебры $\mathcal{H}$ внутренние, т.е. отображение α_- сюръективное.*

Доказательство. Пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Очевидно, что D полностью определяется своим действием на образующие q_μ, p_μ, т.е. нормальными многочленами

$$f_\mu(q, p) = D(q_\mu), \quad g_\mu(q, p) = D(p_\mu), \quad \mu \in \overline{1, d}.$$

В свою очередь, нормальные многочлены $f_\mu, g_\mu \in \mathcal{H}$, $\mu \in \overline{1, d}$, будут задавать дифференцирование $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$, если они согласуются с коммутационными соотношениями раздела 1.2, т.е.

$$\begin{aligned} D(q_\mu q_\nu - q_\nu q_\mu) &= (f_\mu q_\nu + q_\mu f_\nu) - (f_\nu q_\mu + q_\nu f_\mu) = [f_\mu, q_\nu] - [f_\nu, q_\mu] = \\ &= \varkappa\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial p_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial p_\mu}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} D(p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu) &= (g_\mu p_\nu + p_\mu g_\nu) - (g_\nu p_\mu + p_\nu g_\mu) = [g_\mu, p_\nu] - [g_\nu, p_\mu] = \\ &= \varkappa\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial g_\mu}{\partial q_\nu}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} D(p_\mu q_\nu - q_\nu p_\mu - \varkappa\delta_{\mu\nu}) &= (g_\mu q_\nu + p_\mu f_\nu) - (f_\nu p_\mu + q_\nu g_\mu) - 0 = [g_\mu, q_\nu] + [p_\mu, f_\nu] = \\ &= \varkappa\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial p_\nu} + \frac{\partial f_\nu}{\partial q_\mu}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

для всех $\mu,\nu\in\overline{1,d}$, причем мы воспользовались равенствами (1.2). Согласно формулам (1.6)–(1.7) и (1.4)–(1.6) система (2.1) дает

$$f_\mu=\frac{\partial f}{\partial p_\mu},$$

а система (2.2) –

$$g_\mu=\frac{\partial g}{\partial q_\mu},\quad \mu\in\overline{1,d},$$

причем в силу (2.3) нормальные многочлены $f(q,p)$ и $g(q,p)$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial^2(f+g)}{\partial q_\mu\partial p_\nu}=0,\quad \mu,\nu\in\overline{1,d}.$$

В соответствии с формулами (1.8), (1.9) $f(q,p)+g(q,p)=\varphi(q)+\psi(p)$, откуда $f(q,p)-\varphi(q)=-g(q,p)+\psi(p)=h(q,p)$, $h\in\mathcal{H}$, или $f(q,p)=h(q,p)+\varphi(q)$, $g(q,p)=-h(q,p)+\psi(p)$. Итак,

$$D(q_\mu)=f_\mu=\frac{\partial f}{\partial p_\mu}=\frac{\partial h}{\partial p_\mu}=\frac{1}{\varkappa}[h,q_\mu],\qquad D(p_\mu)=g_\mu=\frac{\partial g}{\partial q_\mu}=-\frac{\partial h}{\partial q_\mu}=\frac{1}{\varkappa}[h,p_\mu]$$

для всех $\mu\in\overline{1,d}$, так что $D=\{h,\cdot\}$, что и требовалось доказать.

2.3. Алгебра Ли $\mathcal{H}_\star$. Разложим линейное пространство нормальных многочленов $\mathcal{H}$ в прямую сумму:

$$\mathcal{H}=\mathbb{F}\cdot 1+\mathcal{H}_\star,\qquad \mathcal{H}_\star=\bigl\{f(q,p)\in\mathcal{H}\colon f(0,0)=0\bigr\},$$

и пусть $\mathrm{pr}_1\colon\mathcal{H}\to\mathbb{F}\cdot 1$, $\mathrm{pr}_\star\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}_\star$ – соответствующие проекторы,

$$\mathrm{pr}_1(f)=f(0,0),\qquad \mathrm{pr}_\star(f)(q,p)=f(q,p)-f(0,0),\quad f(q,p)\in\mathcal{H}.$$

Определим на $\mathcal{H}_\star$ *скобку* $[\cdot,\cdot]_\star\colon\mathcal{H}_\star\times\mathcal{H}_\star\to\mathcal{H}_\star$ правилом

$$[f,g]_\star=\mathrm{pr}_\star(\{f,g\}),\quad f,g\in\mathcal{H}_\star.$$

С помощью (1.1) легко проверяется, что

(1) *скобка $[\cdot,\cdot]_\star$ обладает всеми свойствами скобки Ли и, следовательно, определяет на $\mathcal{H}_\star$ структуру алгебры Ли;*
(2) *мономы $\rho^{ij}\equiv q^ip^j$, $i,j\in\mathbb{Z}_+^d$, $|i+j|>0$, образуют базис в $\mathcal{H}_\star$;*
(3) *скобка $[\cdot,\cdot]_\star$ определяется равенствами*

$$[\rho^{ij},\rho^{kl}]_\star=\sum_{|m+n|>0}C_{mn}^{ij,kl}\rho^{mn},\quad i,j,k,l\in\mathbb{Z}_+^d,\quad |i+j|>0,\quad |k+l|>0,$$

структурные константы $C_{mn}^{ij,kl}$ определены в разделе 1.10.

2.4. Теорема. *Определен изоморфизм алгебр Ли*

$$\alpha_-\colon \mathcal{H}_\star \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{H}),$$

где $\alpha_-(f) = \{f,\cdot\} \equiv F,\ \ f \in \mathcal{H}_\star,$ *причем*

$$\alpha_-([f,g]_\star) = [\alpha_-(f), \alpha_-(g)], \quad f,g \in \mathcal{H}_\star;$$
$$\alpha_-(f)^t = -\alpha_-(f^t), \quad f \in \mathcal{H}_\star.$$

Доказательство. В силу предложения 2.2 и приведенных выше рассуждений доказательство сводится к простой проверке (транспонирование определено в пукте (7) раздела 1.11).

Итак, *алгебра Ли*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \Big\{F = \{f,\cdot\}\colon f = \sum_{|i+j|>0} f_{ij}\rho^{ij} \in \mathcal{H}\Big\}$$

имеет базис $R^{ij} = \{\rho^{ij},\cdot\},\ i,j \in \mathbb{Z}^d_+,\ |i+j|>0,$ *скобка и действие даются формулами*

$$[R^{ij}, R^{kl}] = \sum_{|m+n|>0} C^{ij,kl}_{mn} R^{mn}, \qquad R^{ij}(\rho^{kl}) = \sum_{|m+n|>0} C^{ij,kl}_{mn} \rho^{mn},$$

структурные константы определены в разделе 1.10.

В частности, $[R^{0(\mu)}, R^{i+(\mu),j}] = (i_\mu+1)R^{ij}$ для любых $\mu \in \overline{1,d},\ i,j \in \mathbb{Z}^d_+,\ |i+j|>0,$ откуда следует, что

(1) *коммутант* $[\mathfrak{D}(\mathcal{H}), \mathfrak{D}(\mathcal{H})] = \mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

2.5. Степень дифференцирования и градуировка. Обозначим через

$$\mathcal{H}^u = \Big\{f = \sum_{|i+j|=u} f_{ij}\rho^{ij} \in \mathcal{H}\Big\}, \quad u \in \mathbb{Z}_+,$$

линейное пространство всех однородных нормальных многочленов степени u. Тогда

$$\mathcal{H}_\star = \sum_{u=1}^{\infty} \mathcal{H}^u \quad \text{и} \quad [\mathcal{H}^v, \mathcal{H}^w]_\star \subset \sum_{u=1}^{v+w-2} \mathcal{H}^n, \qquad v,w \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathfrak{D}^u(\mathcal{H}) = \{F = \{f,\cdot\}\colon f \in \mathcal{H}^u\}$ – линейное пространство *однородных дифференцирований степени* $u \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 2.4 алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ разлагается в прямую сумму линейных пространств

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \sum_{u=1}^{\infty} \mathfrak{D}^u(\mathcal{H}) \quad \text{и} \quad [\mathfrak{D}^v(\mathcal{H}), \mathfrak{D}^w(\mathcal{H})] \subset \sum_{u=1}^{v+w-2} \mathfrak{D}^u(\mathcal{H}), \qquad v,w \in \mathbb{N}.$$

Аналогичным образом положим $\mathcal{H}_{\star k} = \mathcal{H}_\star \cap \mathcal{H}_k,\ k \in \mathbb{Z}^d$ (см. пункт (6) раздела 1.11, заметим, что $\mathcal{H}_{\star k} = \mathcal{H}_k$ при $k \neq 0$), и пусть $\mathfrak{D}_k(\mathcal{H}) = \{F = \{f,\cdot\}\colon f \in \mathcal{H}_{\star k}\}$ – линейные пространства *γ-однородных дифференцирований порядка* $k \in \mathbb{Z}^d$. Легко проверяется, что алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ обладает градуировкой:

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathfrak{D}_k(\mathcal{H}), \qquad [\mathfrak{D}_k(\mathcal{H}), \mathfrak{D}_l(\mathcal{H})] \subset \mathfrak{D}_{k+l}(\mathcal{H}), \quad k,l \in \mathbb{Z}^d.$$

2.6. Классический предел. Согласно разделу 2.4 алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ имеет базис $\zeta^{ij} = R^{ij},\ i,j \in \mathbb{Z}_+^d,\ |i+j| > 0$, и коммутатор

$$[\zeta^{ij}, \zeta^{kl}] = \sum_{m,n} C_{mn}^{ij,kl} \zeta^{mn},$$

где структурные константы

$$C_{mn}^{ij,kl} = C_{mn}^{ij,kl}(\varkappa) = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} \tbinom{i,j;k,l}{r} \delta_m^{i+k-r} \delta_n^{j+l-r} =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{d} (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \delta_m^{i+k-(\mu)} \delta_n^{j+l-(\mu)} + O(\varkappa).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $\varkappa \to 0$, получим алгебру Ли $\mathcal{Z}$ с базисом ζ^{ij}, $i,j \in \mathbb{Z}_+^d,\ |i+j| > 0$, и скобкой

$$[\zeta^{ij}, \zeta^{kl}] = \sum_{|m+n|>0}^{d} Z_{mn}^{ij,kl} \zeta^{mn},$$

где структурные константы

$$Z_{mn}^{ij,kl} = \sum_{\mu=1}^{d} (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \delta_m^{i+k-(\mu)} \delta_n^{j+l-(\mu)}.$$

Заметим, что алгебра $\mathcal{H}$ в пределе $\varkappa \to 0$ переходит в алгебру $\mathbb{F}[r]$ *коммутативных* многочленов с образующими $r = (q_1, \ldots, p_d)$ и обычными линейными операциями и умножением. Базисные скобки Пуассона (см. пункт (9) раздела 1.11) принимают в этом случае вид

$$\{\rho^{ij}, \rho^{kl}\} = \sum_{m,n} Z_{mn}^{ij,kl} \rho^{mn} = \sum_{\mu=1}^{d} (j_\mu k_\mu - l_\mu i_\mu) \rho^{i+k-(\mu), j+l-(\mu)} =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{d} \left(\frac{\partial \rho^{ij}}{\partial p_\mu} \frac{\partial \rho^{kl}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial \rho^{ij}}{\partial q_\mu} \frac{\partial \rho^{kl}}{\partial p_\mu} \right), \quad i,j,k,l \in \mathbb{Z}_+^d,$$

откуда

$$\{f, g\} = \sum_{\mu=1}^{d} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu} - \frac{\partial f}{\partial q_\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} \right), \quad f,g \in \mathbb{F}[r], \tag{2.4}$$

в полном согласии с классическими выражениями (см., например, [2]). Другими словами,

(1) *в пределе $\varkappa \to 0$ алгебра Пуассона $\mathcal{H}$ переходит в классическую алгебру Пуассона $\mathbb{F}[r]$ коммутативных многочленов со скобкой* (2.4).

С другой стороны, рассматривая $\mathbb{F}[r]$ как алгебру Ли со скобкой (2.4), приходим к утверждению:

(2) *определен изоморфизм алгебр Ли $\mathcal{Z} \simeq \mathbb{F}[r]/\{1\}$, где $\{1\}$ – центр алгебры Ли $\mathbb{F}[r]$.*

3. ОСНОВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

3.1. Дифференцирования первой степени. Дифференцирования $Q_\mu = \{q_\mu, \cdot\}$, $P_\mu = \{p_\mu, \cdot\}$, $\mu \in \overline{1,d}$, образуют базис линейного пространства $\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ дифференцирований первой степени. С помощью формул (1.1), (1.2) легко проверяются следующие утверждения:

(1) *дифференцирования* $Q_\mu,\ P_\mu$ *действуют на* $\mathcal{H}$ *по правилам*

$$Q_\mu(f) = -\frac{\partial f}{\partial p_\mu}, \qquad P_\mu(f) = \frac{\partial f}{\partial q_\mu}, \quad f \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \overline{1,d};$$

(2) *дифференцирования* $Q_\mu,\ P_\mu,\ \mu,\nu \in \overline{1,d}$, *попарно коммутируют, так что* $\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ *– коммутативная подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$;

(3) *семейство* $Q_1, \dots, P_d$ *тотальное, т.е. нормальный многочлен* $f \in \mathcal{H}$ *удовлетворяет системе* $Q_\mu(f) = P_\mu(f) = 0,\ \mu \in \overline{1,d}$, *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathcal{H}^0 = \mathbb{F}$;

(4) *определена стандартная дифференциальная алгебра* $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$ (см. раздел 0.5).

3.2. Экспоненты. Пусть $c = (a,b) = (a_1, \dots, b_d) \in \mathbb{F}^{2d}$. Будем называть *экспонентами* (точнее, c-экспонентами, см., например, [16]) решения f системы

$$Q_\mu(f) = a_\mu f, \qquad P_\mu(f) = b_\mu f, \quad \mu \in \overline{1,d}. \tag{3.1}$$

Поскольку операторы $Q_\mu,\ P_\mu$ суть дифференцирования, экспоненты обладают характеризующим свойством:

(1) *произведение* $f' \cdot f''$ *есть* $(c' + c'')$*-экспонента, если* f' *есть* c'*-экспонента, а* f'' *есть* c''*-экспонента.*

Простые вычисления показывают, что

(2) *всякое решение системы* (3.1) *в классе формальных степенных рядов имеет вид* (с точностью до нормировки)

$$f(q,p;c) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{b^i}{i!} q^i \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^d} (-1)^{|j|} \frac{a^j}{j!} p^j = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}_+^d} (-1)^{|j|} \frac{b^i a^j}{i!j!} q^i p^j.$$

В частности, экспоненты являются формальными (обобщенными) элементами, не принадлежащими алгебре $\mathcal{H}$. Тем не менее они могут оказаться полезными в приложениях.

3.3. Дифференцирования второй степени. Рассмотрим дифференцирования $Q_{\mu\nu} = \{q_\mu q_\nu, \cdot\} = Q_{\nu\mu},\ R_{\mu\nu} = \{q_\mu p_\nu, \cdot\},\ P_{\mu\nu} = \{p_\mu p_\nu, \cdot\} = P_{\nu\mu},\ \mu,\nu \in \overline{1,d}$. С помощью формул (1.1) легко проверить, что

(1) *введенные дифференцирования действуют по формулам*

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}(f) &= -\left(q_\mu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} + q_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\right) - \varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial p_\nu}, \\
R_{\mu\nu}(f) &= q_\mu \frac{\partial f}{\partial q_\nu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} p_\nu, \\
P_{\mu\nu}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q_\mu} p_\nu + \frac{\partial f}{\partial q_\nu} p_\mu\right) + \varkappa \frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu}
\end{aligned}$$

для всех $f \in \mathcal{H},\ \mu, \nu \in \overline{1,d}$ (обратим внимание на наличие вторых производных);

(2) $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$ – *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ *размерности* $d(2d+1)$ *с базисом* $Q_{\mu\nu}$, $\mu \leqslant \nu,\ R_{\mu\nu},\ \mu, \nu \in \overline{1,d},\ P_{\mu\nu},\ \mu \leqslant \nu$, *и коммутационными соотношениями*

$$\begin{aligned}
&[Q_{\lambda\mu}, Q_{\nu\pi}] = 0, \quad [P_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] = 0, \quad [R_{\lambda\mu}, Q_{\nu\pi}] = \delta_{\mu\nu} Q_{\lambda\pi} + \delta_{\mu\pi} Q_{\lambda\nu},\\
&[R_{\lambda\mu}, R_{\nu\pi}] = \delta_{\mu\nu} R_{\lambda\pi} - \delta_{\lambda\pi} R_{\nu\mu}, \quad [R_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] = -\delta_{\lambda\nu} P_{\mu\pi} - \delta_{\lambda\pi} P_{\mu\nu},\\
&[Q_{\lambda\mu}, P_{\nu\pi}] = -\delta_{\lambda\nu} R_{\mu\pi} - \delta_{\lambda\pi} R_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} R_{\lambda\pi} - \delta_{\mu\pi} R_{\lambda\nu}, \quad \lambda, \mu, \nu, \pi \in \overline{1,d}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F})$ (т.е. алгебру Ли формальной симплектической группы порядка $2d$) в следующей реализации: алгебра $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F})$ состоит из всех матриц $M, N, \ldots$ порядка $2d$ с элементами из $\mathbb{F}$, записанных в блочном виде

$$M = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b^t \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} y & x \\ z & -y^t \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

($a, b, c, x, y, z, \ldots$ – квадратные матрицы порядка $d \times d$ с элементами из $\mathbb{F}$, причем $a = a^t$, $c = c^t,\ x = x^t,\ z = z^t, \ldots$), и со скобкой Ли $[M, N] = MN - NM$ (см., например, [22]).

С помощью коммутационных соотношений пункта (2) раздела 3.3 можно проверить, что

(3) *правило*

$$M = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b^t \end{pmatrix} \mapsto D = -a\frac{Q}{2} + bR + c\frac{P}{2}$$

задает изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{sp}(2d; \mathbb{F}) \simeq \mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$.

Подробнее,

$$D = \sum_{\lambda,\mu=1}^{d} \left(-\frac{1}{2} a^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} + b^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} c^{\lambda\mu} P_{\lambda\mu} \right).$$

3.4. Симметрии дифференциальной алгебры $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$**.** По определению (см. раздел 0.5) дифференцирование $F \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ называется дифференцированием Ли–Беклунда дифференциальной алгебры $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$, если коммутаторы $[F, Q_\mu], [F, P_\mu] \in \mathfrak{D}^1(\mathcal{H})$ для всех $\mu \in \overline{1,d}$. С помощью утверждения (1) раздела 3.1 легко проверяется, что это имеет место тогда и только тогда, когда $F \in \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}) + \mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$. В силу утверждений (2) раздела 3.1 и (2) раздела 3.3 отсюда следует, что

(1) *алгебра Ли симметрий дифференциальной алгебры* $(\mathcal{H}, \mathfrak{D}^1(\mathcal{H}))$ *имеет вид*

$$\mathrm{Sym}_{\mathfrak{D}^1(\mathcal{H})} \mathcal{H} = \mathfrak{D}^2(\mathcal{H}).$$

3.5. Подалгебра $\mathfrak{R}$ алгебры Ли $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$. Из коммутационных соотношений (2) раздела 3.3 следует, что

(1) *линейное пространство*

$$\mathfrak{R} = \left\{ A = \sum_{\mu,\nu=1}^{d} a^{\mu\nu} R_{\mu\nu} : a^{\mu\nu} \in \mathbb{F} \right\}$$

является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{D}^2(\mathcal{H})$.

Более того, легко заметить, что

(2) *имеет место изоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{gl}(d;\mathbb{F}) \simeq \mathfrak{R}$, *задаваемый правилом* $a = \|a^{\mu\nu}\| \mapsto A = \sum a^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

В частности (см., например, [23]),

(3) *форма Киллинга на* $\mathfrak{R}$ *имеет вид*

$$\phi(A,B) = 2d\,\mathrm{tr}(ab) - 2\,\mathrm{tr}(a)\,\mathrm{tr}(b), \qquad A = \sum a^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \qquad B = \sum b^{\mu\nu} R_{\mu\nu};$$

(4) *а операторы Казимира –*

$$K_1 = \sum_{\mu_1=1}^{d} R_{\mu_1\mu_1}, \quad \ldots, \quad K_d = \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_d=1}^{d} R_{\mu_1\mu_2} \circ R_{\mu_2\mu_3} \circ \cdots \circ R_{\mu_d\mu_1}.$$

С помощью коммутационных соотношений (1.1) легко проверяется, что

$$R_{\mu\nu} \colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{k+(\mu)-(\nu)}, \quad \mu,\nu \in \overline{1,d}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Очевидно, что $|k + (\mu) - (\nu)| = |k|$. Это замечание приводит к следующему утверждению. Для каждого $u \in \mathbb{Z}$ положим $\mathcal{H}_u = \sum_{|k|=u} \mathcal{H}_k$. Тогда $A \colon \mathcal{H}_u \to \mathcal{H}_u$ для всех $A \in \mathfrak{R}$ и $u \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

(5) *определены точные представления* $\mathfrak{gl}(d;\mathbb{F}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_u)$ *алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(d;\mathbb{F})$ *в линейных пространствах* $\mathcal{H}_u$, $u \in \mathbb{Z}$.

3.6. Градуирующие дифференцирования. Положим $\Gamma_\mu = R_{\mu\mu}$ (без суммирования), $\mu \in \overline{1,d}$, и $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d)$. Легко проверяется, что для данных нормального многочлена $f \in \mathcal{H}$ и вектора $c = (c_1, \ldots, c_d) \in \mathbb{F}^d$ имеют место равенства $\Gamma_\mu(f) = c_\mu f$, $\mu \in \overline{1,d}$ (коротко, $\Gamma(f) = cf$), тогда и только тогда, когда $c = k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ и $f \in \mathcal{H}_k$. Другими словами,

(1) *векторный оператор* Γ *является градуирующим на* $\mathcal{H}$.

3.7. Дифференцирования с нулевой градуировкой. Обратимся к линейному пространству $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$. Согласно разделу 2.5 $[\mathfrak{D}_0(\mathcal{H}), \mathfrak{D}_k(\mathcal{H})] \subset \mathfrak{D}_k(\mathcal{H})$ для любого $k \in \mathbb{Z}^d$. Более того, с помощью формулы (1.1) легко устанавливается, что

(1) $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$ *– коммутативная подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$;

(2) *в каждом из линейных пространств* $\mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$, *определено представление* $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_k)$ *алгебры Ли* $\mathfrak{D}_0(\mathcal{H})$.

3.8. Случай $d=1$. Здесь индексы $i,j,k,\ldots\in\mathbb{Z},\mathbb{Z}_+,\mathbb{N}$ (индекс μ опускаем за ненадобностью). В этом случае алгебра Ли $\mathfrak{sp}(2;\mathbb{F})=\mathfrak{sl}(2;\mathbb{F})$ и изоморфизм пункта (3) раздела 3.3 принимает вид

$$\mathfrak{sl}(2;\mathbb{F})\ni M=\begin{pmatrix} b & a\\ c & -b\end{pmatrix}\mapsto D=-a\frac{Q}{2}+bR+c\frac{P}{2}\in\mathfrak{D}^2(\mathcal{H}),$$

где $a,b,c\in\mathbb{F}$. С точностью до нормировки функционал Киллинга равен

$$\phi(D,V)=az+2by+cx,\qquad D=-a\frac{Q}{2}+bR+c\frac{P}{2},\qquad V=-x\frac{Q}{2}+yR+z\frac{P}{2},$$

а оператор Казимира –

$$\Delta=R\circ R-\frac{1}{2}\{Q\circ P+P\circ Q\}.$$

Подставляя сюда формулы пункта (1) раздела 3.3, получим

$$\Delta(f)=3\left(q\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial p}p\right)+\left(q^2\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}+2q\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}p+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}p^2\right)+$$
$$+2\varkappa\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}+q\frac{\partial^3 f}{\partial q^2\partial p}+\frac{\partial^3 f}{\partial q\partial p^2}p\right)+\varkappa^2\frac{\partial^4 f}{\partial q^2\partial p^2},\quad f\in\mathcal{H}.$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение $\Delta(f)=0$ в классе формальных степенных рядов (ср. с разделом 3.2),

$$\Delta(f)=0,\qquad f=\sum_{i,j=0}^{\infty}c_{ij}q^ip^j,\quad c_{ij}\in\mathbb{F}.$$

Для коэффициентов c_{ij} получим систему уравнений

$$(i+j)(i+j+2)c_{ij}+2\varkappa(i+1)(j+1)(i+j+2)c_{i+1,j+1}+$$
$$+\varkappa^2(i+1)(j+1)(i+2)(j+2)c_{i+2,j+2}=0,\quad i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

Произведем замену индексов: $(i,j\in\mathbb{Z}_+)\leftrightarrow(k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}_+)$,

$$\begin{cases} i=n+k_+,\\ j=n+k_-,\end{cases}\qquad k_+=\begin{cases} k, & k\geqslant 0,\\ 0, & k<0,\end{cases}\qquad k_-=\begin{cases} 0, & k\geqslant 0,\\ -k, & k<0,\end{cases}$$

так что $k=k_+-k_-$, $|k|=k_++k_-$, $k=i-j$, $n=(i+j-|i-j|)/2$. Полагая $b_{k,n}=c_{i,j}$ и учитывая, что $i+j=2n+|k|$, $ij=n(n+|k|)$, для коэффициентов $b_{k,n}$ получаем рекуррентные соотношения

$$b_{k,n+2}=-\frac{(|k|+2n+2)}{\varkappa^2}\,\frac{2\varkappa(n+1)(|k|+n+1)b_{k,n+1}+(|k|+2n)b_{k,n}}{(n+1)(n+2)(|k|+n+1)(|k|+n+2)}.$$

Последние имеют две серии решений: g_{kn} и h_{kn}, где

$$g_{k0} = 1, \quad g_{k1} = 0, \quad g_{kn} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!\varkappa^n} \frac{|k|(|k|+2)\dots(|k|+2n-2)}{(|k|+1)(|k|+2)\dots(|k|+n)};$$
$$h_{k0} = 0, \quad h_{k1} = 1, \quad h_{kn} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\varkappa^{n-1}} \frac{(|k|+2)(|k|+4)\dots(|k|+2n-2)}{(|k|+2)(|k|+3)\dots(|k|+n)}.$$

Следовательно,

(1) *уравнение* $\Delta(f) = 0$ *в классе формальных степенных рядов имеет базис линейно независимых решений:*

$$g_k(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{kn} q^{n+k_+} p^{n+k_-}, \quad h_k(q,p) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{kn} q^{n+k_+} p^{n+k_-}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

коэффициенты g_{kn}, h_{kn} *определены выше.*

4. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$

4.1. Дифференциальные формы. Для алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$ алгебра мультипликаторов $\mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$ (см. пункт (5) раздела 1.11), так что условие (i) из раздела 0.6 выполнено, а для данной алгебры $\mathcal{K}$ условия (ii)–(iv) сводятся к единственному условию: определен морфизм алгебр Ли $\psi\colon \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{K})$. Согласно разделу 0.6 годятся алгебры $\mathcal{H}$, $\mathbb{F}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

Оставляя полное исследование дифференциальных форм на будущее, рассмотрим простейший случай $\mathcal{K} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F}$, когда

$$\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}\colon \mathfrak{M}(\mathcal{H}) = \mathbb{F} \to \mathfrak{M}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}, \quad \text{а} \quad \psi = 0\colon \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{D}(\mathbb{F}) = 0.$$

Здесь, $\Omega^*(\mathcal{H};\mathbb{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\big(\wedge^*\mathfrak{D}(\mathcal{H});\mathbb{F}\big) = \big(\wedge^*\mathfrak{D}(\mathcal{H})\big)'$. В частности, $\Omega^0(\mathcal{H};\mathbb{F}) = \mathbb{F}$, а линейное пространство $\Omega^1(\mathcal{H};\mathbb{F})$, дуальное к линейному пространству $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$, имеет базис $\{\theta_{ij}; |i+j| > 0\}$, дуальный к базису $\{R^{ij}; |i+j|>0\}$, $\theta_{ij}(R^{kl}) = \delta_{ij}^{kl}$.

Согласно разделу 0.7 дифференциал $d = d_u\colon \Omega^u(\mathcal{H};\mathbb{F}) \to \Omega^{u+1}(\mathcal{H};\mathbb{F})$, $u \in \mathbb{Z}_+$, действует по правилу

$$(d\omega)(D_0,\dots,D_u) = \sum_{0 \leqslant v < w \leqslant u} (-1)^{v+w} \omega\big([D_v,D_w], D_0,\dots,\check{D}_v,\dots,\check{D}_w,\dots,D_u\big)$$

для всех $\omega \in \Omega^u(\mathcal{H};\mathbb{F})$. В частности, $d\Omega^0(\mathcal{H};\mathbb{F}) = d\mathbb{F} = 0$, откуда $H^0(\mathcal{H};\mathbb{F}) = \ker d_0 = \mathbb{F}$. Легко также проверяется, что

$$d\theta_{ij} = -\sum_{k,l,m,n} C_{ij}^{kl,mn} \theta_{kl} \cdot \theta_{mn}, \quad |i+j| > 0. \tag{4.1}$$

Далее, с помощью равенства $[\mathfrak{D}(\mathcal{H}),\mathfrak{D}(\mathcal{H})] = \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ (см. пункт (1) раздела 2.4) выводим, что дифференциал $d\omega = 0$, $\omega \in \Omega^1(\mathcal{H};\mathbb{F})$, тогда и только тогда, когда $\omega = 0$, т.е. $\ker d_1 = 0$. В частности, $H^1(\mathcal{H};\mathbb{F}) = \ker d_1 \big/ \operatorname{im} d_0 = 0$.

4.2. Алгебра Ли $\mathcal{H}$. Параллельно с алгеброй Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{H}$ со скобкой $\{\cdot,\cdot\}$ (см. пункт (9) раздела 1.11). Напомним, что алгебра Ли $\mathcal{H}$ имеет базис $\rho^{ij},\ i,j\in\mathbb{Z}^d_+$, и коммутационные соотношения

$$\{\rho^{ij},\rho^{kl}\}=\sum_{m,n}C^{ij,kl}_{mn}\rho^{mn}.$$

Как и в случае алгебры $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ (см. пункт (1) раздела 2.4), коммутант $\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}=\mathcal{H}$. Заметим, что центр алгебры Ли $\mathcal{H}$ есть $\operatorname{cen}\mathcal{H}=\mathbb{F}$ (ср. с пунктом (3) раздела 1.11).

Пусть $\wedge^*\mathcal{H}$ – внешняя алгебра линейного пространства $\mathcal{H}$. Согласно общей теории (см. [15]) *u-коцепи алгебры Ли $\mathcal{H}$ со значениями в $\mathbb{F}$* определяются как линейные отображения из $\wedge^u\mathcal{H}$ в $\mathbb{F}$, $u\in\mathbb{Z}_+$, так что линейное пространство всех коцепей алгебры Ли $\mathcal{H}$ со значениями в $\mathbb{F}$ есть

$$\mathfrak{C}^*(\mathcal{H};\mathbb{F})=\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^*\mathcal{H};\mathbb{F})=\big(\wedge^*\mathcal{H}\big)'.$$

В частности, $\mathfrak{C}^0(\mathcal{H};\mathbb{F})=\mathbb{F}$, линейное пространство $\mathfrak{C}^1(\mathcal{H};\mathbb{F})$, дуальное к $\mathcal{H}$, имеет дуальный базис $\vartheta_{ij},\ \vartheta_{ij}(\rho^{kl})=\delta^{kl}_{ij},\ i,j,k,l\in\mathbb{Z}^d_+$. *Дифференциал* $d=d_u\colon\mathfrak{C}^u(\mathcal{H};\mathbb{F})\to\mathfrak{C}^{u+1}(\mathcal{H};\mathbb{F}),\ u\in\mathbb{Z}_+$, задается правилом

$$(d\omega)(f_0,\dots,f_u)=\sum_{0\leqslant v<w\leqslant u}(-1)^{v+w}\omega\big(\{f_v,f_w\},f_0,\dots,\check{f_u},\dots,\check{f_w},\dots,f_u\big)$$

для всех $\omega\in\mathfrak{C}^u(\mathcal{H};\mathbb{F})$. Здесь также $d_{u+1}\circ d_u=0$, так что определен *комплекс Ли* $\{\mathfrak{C}^u(\mathcal{H};\mathbb{F}),d_u,u\in\mathbb{Z}_+\}$ с когомологиями $H^u_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{H};\mathbb{F})=\ker d_u\big/\operatorname{im}d_{u-1}$.

По построению $d\mathfrak{C}^0(\mathcal{H};\mathbb{F})=d\mathbb{F}=0$, откуда $H^0_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{H};\mathbb{F})=\mathbb{F}$. Далее, в силу равенства $\{\mathcal{H},\mathcal{H}\}=\mathcal{H},\ \ker d_1=0$, так что $H^1_{\mathrm{Lie}}(\mathcal{H};\mathbb{F})=0$. Как и выше (см. (4.1)), легко проверяется равенство

$$d\vartheta_{ij}=-\sum_{k,l,m,n}C^{kl,mn}_{ij}\vartheta_{kl}\cdot\vartheta_{mn},\quad i,j\in\mathbb{Z}^d_+.\tag{4.2}$$

4.3. Центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Видно, что алгебры Ли $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ очень похожи. Действительно, с помощью теоремы 2.4 легко проверить, что

(1) *определена точная последовательность алгебр Ли*

$$0\to\mathbb{F}\to\mathcal{H}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{D}(\mathcal{H})\to0,\tag{4.3}$$

где $\mathbb{F}$ рассматривается как тривиальная коммутативная алгебра Ли, морфизм π задается правилом: $\mathcal{H}\ni f\mapsto\pi(f)=\{f,\cdot\}\in\mathfrak{D}(\mathcal{H})$.

Другими словами, алгебра Ли $\mathcal{H}$ есть *одномерное центральное расширение* алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$. Заметим, что $\pi(\rho^{00})=0,\ \pi(\rho^{ij})=R^{ij},\ i,j\in\mathbb{Z}^d_+,\ |i+j|>0$.

Дуальная последовательность имеет вид

$$0\longleftarrow\mathbb{F}\longleftarrow\mathfrak{C}^1(\mathcal{H};\mathbb{F})\xleftarrow{\pi^*}\Omega^1(\mathcal{H};\mathbb{F})\longleftarrow0,\tag{4.4}$$

где $\pi^*(\theta_{ij}) = \vartheta_{ij},\ i,j \in \mathbb{Z}_+^d,\ |i+j| > 0$.

Согласно общей теории когомологий алгебр Ли (см. [15]), каждое одномерное центральное расширение алгебры Ли ассоциировано с некоторой замкнутой 2-формой на этой алгебре. В нашем случае имеется разложение $\mathcal{H} = \mathbb{F}\cdot 1 + \mathcal{H}_\star$ (см. раздел 2.3), и искомая форма $\chi \in \Omega^2(\mathcal{H};\mathbb{F})$ определяется условием

$$\chi\big(\pi(f),\pi(g)\big) = \mathrm{pr}_1\big(\{f,g\}\big), \quad f,g \in \mathcal{H},$$

где проекция $\mathrm{pr}_1\colon \mathcal{H} \to \mathbb{F}$. Подробнее, $\mathrm{pr}_1(f) = f(0) = f_{00} = \vartheta_{00}(f)$ для всякого $f = \sum_{i,j} f_{ij}\rho^{ij} \in \mathcal{H}$. Следовательно, $\mathrm{pr}_1\big(\{f,g\}\big) = \vartheta_{00}\big(\{f,g\}\big) = -\big(d\vartheta_{00}\big)(f,g)$, так что определяющее условие принимает вид $\chi\big(\pi(f),\pi(g)\big) = -\big(d\vartheta_{00}\big)(f,g)$. Учитывая равенство (4.2), формулу

$$C_{00}^{ij,kl} = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r!\big(\delta_0^i\delta_r^j\delta_r^k\delta_0^l - \delta_r^i\delta_0^j\delta_0^k\delta_r^l\big),$$

соотношение пункта (4) раздела 0.8 и равенства типа $\vartheta_{ij}(f) = f_{ij} = \theta_{ij}\big(\pi(f)\big)$, окончательно получаем, что

(2) *одномерное центральное расширение* (4.3) *ассоциировано с 2-формой*

$$\chi = 2\sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r!\theta_{0r}\cdot\theta_{r0} \in \Omega^2(\mathcal{H};\mathbb{F}). \tag{4.5}$$

Обратимся к свойствам формы χ. По построению эта форма замкнутая. Проверим это свойство непосредственно: пусть $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{H}$, тогда

$$\begin{aligned}\big(d\chi\big)\big(\pi(f_1),\pi(f_2),\pi(f_3)\big) &= -\chi\Big(\big[\pi(f_1),\pi(f_2)\big],\pi(f_3)\Big) - \\ &\quad - \chi\Big(\big[\pi(f_2),\pi(f_3)\big],\pi(f_1)\Big) - \chi\Big(\big[\pi(f_3),\pi(f_1)\big],\pi(f_2)\Big) = \\ &= -\vartheta_{00}\big(\{\{f_1,f_2\},f_3\} + \{\{f_2,f_3\},f_1\} + \{\{f_3,f_1\},f_2\}\big) = 0,\end{aligned}$$

где мы использовали равенство $[\pi(f),\pi(g)] = \pi\big(\{f,g\}\big),\ f,g \in \mathcal{H}$, (см. пункт (1) раздела 4.3) и тождество Якоби.

Однако форма χ не является точной. Действительно, предположим, что $\chi = d\Psi$ с некоторой 1-формой

$$\Psi = \sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij}\theta_{ij} \in \Omega^1(\mathcal{H};\mathbb{F}),$$

коэффициенты $\Psi^{ij} \in \mathbb{F}$. Тогда для всех $f,g \in \mathcal{H}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\chi\big(\pi(f),\pi(g)\big) &= \big(d\Psi\big)\big(\pi(g),\pi(g)\big) = -\Psi\Big(\big[\pi(f),\pi(g)\big]\Big) = -\Psi\Big(\pi\big(\{f,g\}\big)\Big) = \\ &= -\psi\big(\{f,g\}\big) = \big(d\psi\big)(f,g),\end{aligned}$$

где

$$\psi = \pi^* \Psi = \sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij} \vartheta_{ij} \in \mathfrak{C}^1(\mathcal{H}; \mathbb{F}).$$

С другой стороны, по построению $\chi\big(\pi(f), \pi(g)\big) = -\big(d\vartheta_{00}\big)(f,g)$. Итак, $d(\psi + \vartheta_{00}) = 0$, и, значит, $\psi + \vartheta_{00} = 0$, поскольку $\ker d_1 = 0$ (см. раздел 4.2). Подробнее,

$$\sum_{|i+j|>0} \Psi^{ij} \vartheta_{ij} + \vartheta_{00} = 0,$$

что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что χ не является точной.

Таким образом, доказано

4.4. Предложение. *Форма*

$$\chi = 2 \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! \theta_{0r} \cdot \theta_{r0}$$

задает нетривиальный элемент $[\chi] \in H^2(\mathcal{H}; \mathbb{F})$.

В частности, *центральное расширение* (4.3) *нетривиальное, и* $H^2(\mathcal{H}; \mathbb{F}) \neq 0$.

4.5. Алгебра инвариантности формы χ. Форма $\omega \in \Omega^*(\mathcal{A}; \mathcal{K})$ называется *инвариантной относительно дифференцирования* $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ (мы используем обозначения раздела 0.7), если $L_D \omega = 0$. В силу равенства пункта (2) раздела 0.7 множество всех дифференцирований, относительно которых ω инвариантна, образует подалгебру (*алгебру инвариантности* ω) алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Вычислим алгебру инвариантности формы χ. Пусть

$$F = \sum_{|i+j|>0} f_{ij} R^{ij},$$

тогда в силу пункта (4) раздела 0.7 $L_F \chi = \iota_F(d\chi) + d(\iota_F \chi) = d(\iota_F \chi)$, где мы учли, что $d\chi = 0$. Форма $\iota_F \chi \in \Omega^1(\mathcal{H}; \mathbb{F})$ и $\ker d_1 = 0$ (см. раздел 4.1), так что $L_F \chi = 0$ тогда и только тогда, когда $\iota_F \chi = 0$. Подробнее последнее условие записывается в виде

$$\chi(F, G) = \sum_{|r|>0} \varkappa^{|r|-1} r! \big(f_{0r} g_{r0} - f_{r0} g_{0r}\big), \quad \forall G = \sum_{|k+l|>0} g_{kl} R^{kl} \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}),$$

и имеет очевидное решение $f_{0r} = f_{r0} = 0$ при $|r| > 0$, остальные коэффициенты f_{ij} произвольные. Итак,

(1) *алгебра инвариантности формы χ состоит из всех дифференцирований вида*

$$F = \sum_{|i|>0, |j|>0} f_{ij} R^{ij} \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}).$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 98-01-00640.

Список литературы

[1] *Дж. Макки*. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

[2] *Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский*. Лекции по квантовой механике для студентов математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

[3] *N. Fleury, A. Turbiner*. On polynomial relations in the Heisenberg algebra. Preprint, funct-an/9403002, 1994.

[4] *A. Turbiner*. Invariant identities in the Heisenberg algebra. Preprint, hep-th/9410128, 1998.

[5] *M. Pillin*. On the deformability of Heisenberg algebras. Preprint, q-alg/9508014, 1995.

[6] *M. Irac-Astaud*. A three-parameter deformation of the Weyl–Heisenberg algebra: differential calculus and invariance. Preprint, q-alg/9609008, 1996.

[7] *B. Abdesselam*. The twisted Heisenberg algebra. Preprint, q-alg/9610021, 1996.

[8] *M. S. Plyushchay*. R-deformed Heisenberg algebra. Preprint, hep-th/9701065, 1997.

[9] *A. Connes*. Noncommutative geometry. New York: Academic Press, 1994.

[10] *J. Madore*. An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[11] *M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore*. J. Math. Phys. 1990. V. 31. № 2. P. 316.

[12] *M. Dubois-Violette, P. W. Michor*. J. Geom. Phys. 1996. V. 20. P. 218.

[13] *T. Masson*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. № 5. P. 2484.

[14] *H.-D. Cao, J. Zhou*. On quantum de Rham cohomology. Preprint, DG/9806157, 1998.

[15] *Д. Б. Фукс*. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.

[16] *V. V. Zharinov*. Integral transforms and special functions. 1998. V. 7. № 1–2. P. 155.

[17] *E. R. Kolchin*. Differential algebra and algebraic groups. New York: Academic Press, 1950.

[18] *I. Kaplansky*. An introduction to differential algebra. Paris: Hermann, 1957.

[19] *Н. Х. Ибрагимов*. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[20] *V. V. Zharinov*. Lecture notes on geometrical aspects of partial differential equations. Singapore: World Scientific, 1992.

[21] *С. Маклейн*. Гомология. М.: Мир, 1966.

[22] *М. А. Наймарк*. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.

[23] *Д. П. Желобенко*. Лекции по теории групп Ли. Дубна: ОИЯИ, 1965.

Поступила в редакцию 21.VII.1998 г.