С. В. Дьяченко, Асимптотическая устойчивость полугрупп со строго диссипативным производящим оператором,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 1, 75–78

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 1 (1980)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП СО СТРОГО ДИССИПАТИВНЫМ ПРОИЗВОДЯЩИМ ОПЕРАТОРОМ

С. В. Дьяченко

Пусть в гильбертовом пространстве H действует полугруппа класса C_0 линейных ограниченных сжимающих операторов $U(t)$ $(t \geqslant 0)$ такая, что ее производящий оператор удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x \in D(A)\ \forall x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(Ax, x) < 0. \qquad (1)$$

Определение. Будем говорить, что оператор A является строго диссипативным, если для него выполняется (1).

При условии (1) для каждого $x \in H$ функция $\| U(t)\, x \|$ строго монотонно убывает (если, начиная с некоторого t_0, она не обращается в нуль). Возникает вопрос, существует ли $x_0 \in H$ такой, что $\lim\limits_{t\to\infty} \| U(t)\, x_0 \| > 0$.

Ответить на этот вопрос можно с помощью функциональной модели вполне неунитарного сжатия [1].

1. Пусть T — вполне неунитарное сжатие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда [1, теорема 2.3*] оператор T унитарно эквивалентен оператору T' в функциональном пространстве

$$H' = [H^2(D_T) \oplus \overline{\Delta_{T^*}L^2(D_{T^*})}] \ominus \{\theta_{T^*}w \oplus \Delta_{T^*}w:\ w \in H^2(D_{T^*})\},$$

определяемому формулой

$$T'(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \ (u \oplus v \in H').$$

В случае, когда $T^n \to 0$ (сильно), и только в этом случае модель упрощается, принимая вид

$$H' = H^2(D_T) \ominus \theta_{T*}H^2(D_{T*}),$$
$$T'u(\lambda) = [u(\lambda) - u(0)] / \lambda (u \in H').$$

Здесь $\theta_{T*}(\lambda)$ — характеристическая функция оператора T^*, а $\Delta(t) = [1 - \theta_{T*}(e^{it})^* \theta_{T*}(e^{it})]^{1/2}$, $0 \leqslant \Delta(t) \leqslant I$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Предложение. *Если для* $x \neq 0$ $\| Tx \| < \| x \|$, *то*

$$\overline{\Delta_{T*}L^2(D_{T*})} = \overline{\Delta_{T*}H^2(D_{T*})}.$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\theta = \theta_{T^*}$, $\Delta = \Delta_{T^*}$, $L_1 = \overline{\Delta L^2(D_{T^*})}$, $L_2 = \overline{\Delta H^2(D_{T^*})}$. Если $L_1 \neq L_2$, то $L_2 \subset L_1$ и существует ненулевой элемент $v \in L_1$ такой, что $v \perp L_2$. Рассмотрим элемент $0 \oplus v$. Ясно, что он ненулевой и из

$$(0 \oplus v, \theta w \oplus \Delta w) = (0, \theta w) + (v, \Delta w) = 0$$

следует, что $0 \oplus v \in H'$. Для него $T'(0 \oplus v) = 0 \oplus e^{-it}v$ и $\| T'(0 \oplus v) \| = \| v \| = \| 0 \oplus v \|$. Это противоречит предположению.

ТЕОРЕМА. *Если выполняются условия предложения, то* $T^n \to 0$ *сильно.*

Доказательство. $u \oplus v \in H'$ означает, что $u \in H^2(D_T)$, $v \in \overline{\Delta H^2(D_{T^*})}$ и $u \oplus v \perp \theta w \oplus \Delta w$ для всех $w \in H^2(D_{T^*})$, т. е. $(u, \theta w) + (v, \Delta w) = (\theta^* u + \Delta v, w) = 0$. Отсюда

$$\theta^* u + \Delta v = 0 \text{ в } H^2(D_{T^*}). \tag{2}$$

Подействуем на $u \oplus v$ оператором T':

$$T'(u \oplus v) = e^{-it}[u(e^{it}) - u(0)] \oplus e^{-it}v = u_1 \oplus v_1.$$

Для $u_1 \oplus v_1$ должно выполняться соотношение (2), поэтому $e^{-it}[\theta^* u(e^{it}) - \theta^* u(0)] + \Delta e^{-it} v = 0$ в $H^2(D_{T^*})$. Отсюда и из (2) $\theta^* u(0) = 0$. Но $u(\lambda) = \sum_0^\infty \lambda^k a_k$ ($a_k \in D_T$, $k = 0,1, \ldots$). Значит $\theta^* a_0 = 0$ ($t \in (0, 2\pi)$). Подействуем на $u_1 \oplus v_1$ оператором T'. Как и раньше, получаем $\theta^* u_1(0) = 0$, т. е. $\theta^* a_1 = 0$ ($t \in (0, 2\pi)$). Продолжая этот процесс, получаем

$$\theta^* a_k = 0 \text{ для почти всех } t \in (0, 2\pi),\ k = 0, 1, \ldots \quad (3)$$

Отсюда

$$\Delta v = -\theta^* u = -\theta^* \sum_0^\infty \lambda^k a_k = -\sum_0^\infty \lambda^k \theta^* a_k = 0.$$

Но $v \in \overline{\Delta H^2 (D_{T^*})}$. Пусть $v \in \Delta H^2 (D_{T^*})$, тогда

$$v = \Delta \bar{v}\ (\bar{v} \in H^2 (D_{T^*})), \qquad \Delta v = \Delta^2 \bar{v} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что если S — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} S^2$. Действительно, $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} S^2$ — очевидно. Пусть $x \in \operatorname{Ker} S^2$. Множество элементов вида $Sy + z (y \in H,\ z \in \operatorname{Ker} S)$ плотно в H и для них $(Sx, Sy + z) = (S^2 x, y) + (x, Sz)$. Отсюда и вытекает, что $x \in \operatorname{Ker} S$.

Из (4) поэтому следует, что $\bar{v} \in \operatorname{Ker} \Delta$ и значит $v = \Delta \bar{v} = 0$. Теперь

$$\| T'^n (u \oplus 0) \|^2 = \sum_{k=n}^\infty \| a_k \|^2 \to 0,$$

и теорема доказана.

2. Пусть теперь производящий оператор A, сжимающей полугруппы $U(t)$ строго диссипативен. Известно [1], что в этом случае его преобразование Кэли является сжатием, удовлетворяющем условию теоремы. Поэтому $T^n \to 0$ сильно. Это эквивалентно [1] тому, что $U(t) \to 0$ сильно при $t \to \infty$.

Получаем

Следствие. *Если выполняется условие* (1), *то для всех* $x \in H$ $U(t)x \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Пример. $H = L^2(R^n)$, $D(A) = W_2^2(R^n)$, $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ — гладкие, вещественные, ограниченные вместе с производными функции,

$$Au := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \quad x \in R^n;$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} - c(x) \geqslant 0.$$

В этом случае условие (1) выполняется.

Аналогично можно рассмотреть операторы в $L^2(\Omega)$, где Ω — неограниченная область в R^n, и вырождающиеся дифференциальные операторы.

Распространение доказанной теоремы на случай несепарабельного пространства очевидно.

Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило 6.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., «Мир», 1970.