В. Н. Ремесленников, Пример конечноопределенной разрешимой группы без условия максимальности для нормальных подгрупп,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 287–293

https://www.mathnet.ru/mzm9881

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 287—293

УДК 519.4

ПРИМЕР КОНЕЧНООПРЕДЕЛЕННОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БЕЗ УСЛОВИЯ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В. Н. Ремесленников

Существует конечноопределенная разрешимая группа, не удовлетворяющая условию максимальности для нормальных подгрупп.

Эта теорема дает отрицательный ответ на один из вопросов Ф. Холла. Библ. 2 назв.

В работе [1], посвященной вопросам конечности в разрешимых группах, Ф. Холл выдвинул такую гипотезу; конечноопределенная разрешимая группа удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. Об этой гипотезе Ф. Холла упоминает и Робинсон в книге [2]. В настоящей заметке доказывается

ТЕОРЕМА. *Существует конечноопределенная разрешимая группа, не удовлетворяющая условию максимальности для нормальных подгрупп.*

Поэтому ответ на вопрос Ф. Холла отрицательный.

§ 1. Построение примера. Группа H — двуступенно нильпотентное сплетение бесконечной циклической группы A с порождающим элементом a и свободной абелевой группы B с порождающими x, y. Базисная подгруппа $\bar{A}$ сплетения есть свободная двуступенно нильпотентная группа со свободными порождающими a_u для всех $u \in B$. H есть полупрямое произведение $\bar{A}$ на B, причем элементы из B при сопряжении переставляют свободные порождающие $\bar{A}$ по правилу

$$v^{-1}a_u v = a_{uv}, \qquad v \in B.$$

Центром C базисной подгруппы $\bar{A}$ является свободная абелева группа, в качестве свободных порождающих которой можно взять элементы $c_{v,w} = (a_v, a_w)$, $v, w \in B$, $v < w$ при лексикографическом порядке на группе B, при котором $x > y$. N — нормальная подгруппа H, порожденная элементами $a_y a_x^{-1} a_1^{-1}$, $c_{1,x} c_{x,x^2}^{-1}$. Фактор-группа $H/N \approx G$ — пример, о котором идет речь в теореме.

Ясно, что группа G разрешима; даже 3-ступенно разрешима. Остальные утверждения о G будут доказаны в следующих параграфах.

§ 2. Группа G конечноопределена. Пусть $x^y = y^{-1}xy$, либо $a_y = y^{-1}ay$.

$$(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Мы будем широко пользоваться следующими хорошо известными коммутаторными соотношениями:

$$(x, y)^{-1} = (y, x), \tag{1}$$

$$(xy, z) = (x, z)^y (y, z), \tag{2}$$

$$(x, yz) = (x, z)(x, y)^z, \tag{3}$$

$$(x, y^{-1}, z)^y (y, z^{-1}, x)^y (z, x^{-1}, y)^x = 1, \tag{4}$$

$$(x, y^{-1}) = (x, y, y^{-1})^{-1} (x, y)^{-1}. \tag{5}$$

Порождающими элементами группы G служат a, x, y. Выпишем конечную систему соотношений, каждое из которых очевидным образом выполняется в G; соотношения записываем в сжатой форме, используя предыдущие обозначения

$$C_G = \begin{cases} \text{а)}\ (x, y) = 1 \\ \text{б)}\ a_y a_x^{-1} a^{-1} = 1,\ c_{1,x} c_{x,x^2}^{-1} = 1, \\ \text{в)}\ (a, a_x, a) = 1. \end{cases}$$

Покажем, что все остальные соотношения G выводимы из C_G. Предварительно найдем бесконечные системы определяющих соотношений для H и G.

ЛЕММА. *Пусть A — свободная двуступенно нильпотентная группа со свободными порождающими $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Тогда соотношения*

$$(a_i, a_j, a_k) = 1, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

определяют группу A.

Доказательство. $(x, y, z)=1$ — тождество, определяющее свободную двуступенно нильпотентную группу. Поэтому система соотношений

$$(u, v, w) = 1, \tag{7}$$

где u, v, w — производные слова от a_i определяет A. Покажем индукцией по суммарной длине $l(u) + l(v) + l(w)$ слов u, v, w, что соотношения (7) выводимы из (6).

а) $l(u) = l(v) = l(w) = 1$, $u = a_i^{\varepsilon_i}$, $v = a_j^{\varepsilon_j}$, $w = a_k^{\varepsilon_k}$, ε_i, ε_j, $\varepsilon_k = \pm 1$. Если элементы перестановочны, то перестановочны и их степени, поэтому можно считать, что $\varepsilon_k = 1$.

Пусть $\varepsilon_i = 1$. Тогда

$$(a_i, a_j^{-1}, a_k) = ((a_i, a_j, a_j^{-1})^{-1} (a_i, a_j)^{-1}, a_k)$$

по (5), а потому соотношение $(a_i, a_j^{-1}, a_k) = 1$, а с ним и $(a_i^{-1}, a_j, a_k) = 1$ выводимы из (6). Пусть $\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$; тогда

$$(a_i^{-1}, a_j^{-1}, a_k) = ((a_i^{-1}, a_j, a_j^{-1})^{-1} (a_j^{-1}, a_j)^{-1}, a_k),$$

а потому соотношение $(a_i^{-1}, a_j^{-1}, a_k) = 1$ выводимо из (6).

б) Пусть для $n \geqslant 3$ все соотношения вида $(u, v, w) = 1$ с $l(u) + l(v) + l(w) \leqslant n$ выводимы из (6). Тогда

$$(ua_i^{\varepsilon_i}, v, w) = ((u, v)^{a_i^{\varepsilon_i}} (a_i^{\varepsilon_i}, v), w)$$

по (2). Но $(u, v)^{a_i^{\varepsilon_i}} = (u, v)$ так, что $(ua_i^{\varepsilon_i}, v, w) = (u, v, w) (a_i^{\varepsilon_i}, v, w)^w$. Из последнего равенства следует, что соотношение $(ua_i^{\varepsilon_i}, v, w) = 1$ выводимо из (6). Случаи, когда увеличивается длина v или w, рассматриваются аналогично. Лемма доказана *).

С помощью леммы легко показать, что система соотношений

$$C_H = \begin{cases} \text{а)} & (x, y) = 1, \\ \text{в}') & (a_u, a_v, a_w) = 1 \text{ для всех } u, v, w \in B \end{cases}$$

---

*) Можно доказать лемму быстрее, не проводя вычислений. Избранный путь доказательства имеет то достоинство, что проведенные выкладки пригодятся в дальнейшем.

определяет группу H. Следовательно, группа G определяется следующей бесконечной системой соотношений:

$$C_{G'} = \begin{cases} \text{а)}\ (x, y) = 1, \\ \text{б)}\ a_y a_x^{-1} a^{-1} = 1,\ c_{1,x} c_{x,x^2}^{-1} = 1, \\ \text{в}')\ (a_u, a_v, a_w) = 1 \text{ для всех } u, v, w \in B. \end{cases}$$

Поэтому, чтобы доказать, что C_G определяет группу G, достаточно показать, что все соотношения вида $(a_u, a_v, a_w) = 1$ выводимы из C_G.

а) Выведем из C_G соотношения $(a_u, a_v, a_w) = 1$ для случая, когда $u = x^i$, $v = x^j$, $w = x^k$. Удобнее в этом случае коммутатор записывать в форме (a_i, a_j, a_k). Проведем несколько выкладок.

1) $(a_0, a_1) = (a_1, a_2)$. Сопрягая x^i, получаем $(a_i, a_{i+1}) = (a_{i+1}, a_{i+2})$. Отсюда следует, что $(a_0, a_1) = (a_i, a_{i+1})$ для всех i. Так как $(a_0, a_1, a_0) = 1$, то $(a_i, a_{i+1}, a_0) = 1$, а потому $(a_i, a_{i+1}, a_j) = (a_{i+1}, a_i, a_j) = 1$. Так же как и при доказательстве леммы, отсюда следует, что

$$(a_i^{\varepsilon_i}, a_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}, a_j^{\varepsilon_j}) = (a_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}, a_i^{\varepsilon_i}, a_j^{\varepsilon_j}) = 1$$
$$\text{для всех } i, j;\ \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_j = \pm 1. \tag{8}$$

Таким образом, если разница между первыми и вторым индексом по модулю равна 1, то соотношение выводимо из C_G. На следующем шаге мы рассмотрим ситуацию, когда разница между индексами равна 2.

2) $(a_0, a_2, a_1)^{a_2^{-1}} (a_2^{-1}, a_1^{-1}, a_0)^{a_1} (a_1, a_0^{-1}, a_2^{-1}) = 1$ по (4),
$(a_2^{-1}, a_1^{-1}, a_0) = (a_1, a_0^{-1}, a_2^{-1}) = 1$ по (8).

Отсюда следует, что соотношение $(a_0, a_2, a_1) = 1$ выводимо из C_G.

$$(a_0, a_2, a_1) = 1 \text{ и } (8) \Rightarrow (a_0, a_1, a_1 a_2) = (a_0, a_2)(a_0, a_1)(a_1, a_2) \Rightarrow (a_i a_{i+1}, a_{i+1} a_{i+2}) = (a_i, a_{i+2})(a_i, a_{i+1})(a_{i+1}, a_{i+2}). \tag{9}$$

3) Так как $a_i^y = a_i a_{i+1}$, то

$$(a_0, a_1)^y = (a_0 a_1, a_1 a_2) \overset{\text{по (9)}}{=\!=} (a_0, a_2)\ (a_0, a_1)(a_1, a_2),$$
$$(a_1, a_2)^y = (a_1 a_2, a_2 a_3) \overset{\text{по (9)}}{=\!=} (a_1, a_3)(a_1, a_2)(a_2, a_3),$$
$$(a_0, a_1) = (a_1, a_2) \text{ и } (a_1, a_2) = (a_2, a_3),$$

поэтому $(a_0, a_2) = (a_1, a_3)$. Из последнего равенства следует, что $(a_0, a_2) = (a_1, a_3)$. Так как $(a_0, a_2, a_1) = 1 \Rightarrow \Rightarrow (a_i, a_{i+2}, a_j) = 1$ для всех i, j. Повторяя рассуждения 1), 2), 3), мы получим, что все соотношения $(a_i, a_j, a_k) = 1$ выводимы из C_G.

б) Общий случай. $(a_u, a_v, a_w) = 1$, $u = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}$, $v = v = x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$, $w = x^{\alpha_3}y^{\beta_3}$. Удобно в этом случае коммутатор записывать в форме

$$(a_{\alpha_1,\beta_1}, a_{\alpha_2,\beta_2}, a_{\alpha_3,\beta_3}).$$

Спрягая, если это нужно, достаточно большой положительной степенью y, мы можем добиться, чтобы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ были неотрицательными числами. Далее, используя соотношение $a_{vy} = a_v a_{vx}$, представим a_{α_1,β_1}, a_{α_2,β_2}, a_{α_3,β_3} как слова от букв a_i. Отсюда следует, что коммутатор равен единице. Поэтому утверждение о конечноопределенности G доказано.

§ 3. Возрастающая цепочка нормальных подгрупп в G. Перейдем от H к G, последовательно факторизуя H по нормальному замыканию N_1 элемента $a_y a_x^{-1} a_1^{-1}$, а затем по нормальному замыканию N_2 элемента $c_{1,x} c_{x,x^2}^{-1}$. В образах сохраним те же обозначения, что и в H. Уже отмечалось, что центр C подгруппы $\bar{A}$ в H свободно порождается коммутаторами $c_{v,w} = (a_v, a_w)$, $v, w \in B$, $v < w$. Пусть $G_1 = H/N_1$. Образ $\bar{A}$ в G_1 также будет свободной двуступенно нильпотентной группой. Для доказательства этого заменим в $\bar{A}$ порождающие $a_{x^\alpha y^\beta}$, $\beta > 0$, на элементы $a_{x^\alpha(1-y)^\beta}$ (здесь $a_{x^\alpha(1-y)} = a_{x^\alpha} a_{x^\alpha y}^{-1}$ и т. д.). Новая система элементов $a_{x^\alpha y^\beta}$, $\beta \leqslant 0$, $a_{x^\alpha(1-y)^\beta}$, $\beta > 0$,— система свободных порождающих для $\bar{A}$ в H. Факторизация по N_1 состоит в том, что порождающие $a_{x^\alpha(1-y)^\beta}$ склеиваются с $a_{x^{\alpha+\beta}}$ (это, очевидно, при $\beta = 1$; далее по индукции). Поэтому образ $\bar{A}$ в G_1 — свободная двуступенно нильпотентная группа со свободными порождающими $a_{x^\alpha y^\beta}$, $\beta \leqslant 0$.

Свободными порождающими образа C в G_1 будут коммутаторы вида

$$c_{v,w} = (a_v, a_w), \qquad v < w,\ v = x^{\alpha_1}y^{\beta_1},$$
$$w = x^{\alpha_2}y^{\beta_2}, \quad \beta_1 \leqslant 0, \quad \beta_2 \leqslant 0,$$

или по другому $c_{v,w} = c_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}$.

Пусть N_3 — подгруппа G_1, порожденная элементами $c_{i,\alpha;\,i+r,\,\beta}c^{-1}_{i+1,\,\alpha;\,i+r+1,\,\beta}$ для всех i; $r \geqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$; кроме того, если $r = 0$, то $\alpha < \beta$. N_3 — нормальная подгруппа в G_1. В самом деле,

$$(c_{i,\alpha;\,i+r,\,\beta}c^{-1}_{i+1,\,\alpha;\,i+r+1,\,\beta})^{x^\gamma y^\delta} =$$

$$= \begin{cases} c_{i+\gamma,\,\alpha+\delta;\,i+r+\gamma,\,\beta+\delta}c^{-1}_{i+\gamma+1,\,\alpha+\delta;\,i+r+\gamma+1,\,\beta+\delta}, & \text{если } \delta \leqslant 0, \\ (c_{i,\alpha;\,i+r,\,\beta}c^{-1}_{i+1,\,\alpha;\,i+r+1,\,\beta})^{x^\gamma (x+1)^\delta}, & \text{если } \delta > 0. \end{cases}$$

Здесь $a^{x+1} = a^x a$ и т. д. В обоих случаях сопряженный элемент содержится в N_3, что и доказывает нормальность подгруппы N_3 в G.

Так как $c_{1,x}\, c^{-1}_{x,x^2} \in N_3$, то $N_2 \leqslant N_3$; поэтому группа $G_2 = G_1/N_3$ является гомоморфным образом группы $G = G_1/N_2$. Достаточно убедиться, что в группе G_2 нет условия максимальности для нормальных подгрупп. Факторизация по N_3 состоит в склеивании порождающих элементов C в группе G_1. Поэтому образ C в G_2 будет свободной абелевой группой со свободными порождающими элементами $c_{r,\alpha,\beta}$, где $r \geqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$, кроме того, если $r = 0$, то $\alpha < \beta$.

Выделим в C возрастающую цепочку подгрупп $C_1 < C_2 < \ldots < C_\alpha < \ldots$, где

$$C_d = \mathrm{group}\,(c_{r,\,\alpha,\,\beta} / \,|\alpha - \beta| \leqslant d).$$

Остается проверить, что подгруппы C_α, $d = 1, 2, \ldots$ нормальны в G_2. $(c_{r,\alpha,\,\beta})x^\gamma = c_{r,\alpha,\beta}$, ибо разница в r сохраняется в индексах при сопряжении степенью x. $(c_{r,\,\alpha,\,\beta})^{y^\gamma} = c_{r,\,\alpha+\gamma,\,\beta+\gamma}$, если $\gamma \leqslant 0$,

$$|\alpha + \gamma - \beta - \gamma| = |\alpha - \beta| \leqslant d.$$

Пусть $\gamma > 0$, $(c_{r,\,\alpha,\,\beta})^\gamma = c_{r,\,\alpha+1,\,\beta+1}$, если $\alpha \leqslant -1$, $\beta \leqslant -1$,

$$|\alpha + 1 - \beta - 1| = |\alpha - \beta|,$$

$$(c_{r,\,\alpha,\,0})^y = (a_{i,\alpha},\, a_{i+r,\,0})^y = (a_{i,\,\alpha+1},\, a_{i+r},\, a_{i+r+1}) =$$
$$= (a_{i,\,\alpha+1},\, a_{i+r+1})(a_{i,\,\alpha+1},\, a_{i+r}) = c_{r+1,\,\alpha+1,\,0}c_{r,\,\alpha+1,\,0},$$
$$|\alpha + 1| < |\alpha|.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha = 0$, $\beta \leqslant -1$. Пусть $\alpha = \beta = 0$, $r > 0$.

$$(c_{r,0,0})^y = (a_i, a_{i+r})^y = (a_i a_{i+1}, a_{i+r} a_{i+r+1}) =$$
$$= (a_i, a_{i+r+1})(a_i, a_{i+r})(a_{i+1}, a_{i+r+1})(a_{i+1}, a_{i+r}) =$$
$$= \begin{cases} c_{r+1,0,0} c_{r,0,0}^2 c_{r-1,0,0}, & \text{если } r > 1, \\ c_{r+1,0,0} c_{r,0,0}^2, & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Институт математики
Сибирского отделения АН СССР

Поступило
25.X.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H a l l P., Finiteness Conditions for soluble groups, Proc. London Math., Soc., 4 (1954), 419—436.

[2] R o b i n s o n D. J. S., Infinite soluble and nilpotent groups, Queen Mary College (University of London), London, 1968.