Е. В. Коломейкина, Задача о биправильных триангуляциях сферы, *Чебышевский сб.*, 2010, том 11, выпуск 2, 57–72

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 2 (2010)

УДК 511

ЗАДАЧА О БИПРАВИЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ СФЕРЫ

Е. В. Коломейкина (г. Москва)
pihta.2@mail.ru

В данной работе изучаются локальные условия биправильных триангуляций сферы. . Триангуляция называется *биправильной*, если множество всех ее ячеек распадается в две орбиты. Согласно определению биправильных разбиений, найдется такое целое $k \geqslant 0$, что для числа классов полных корон выполняется: $N_i^* \leqslant 2$ для всех $i < k$ и $N_i^* = 2$ для всех $i \geqslant k$. Основной результат работы следующий:

Теорема. *Нормальная триангуляция T двумерной сферы является биправильной тогда и только тогда, когда число классов первых полных корон $N_1^* = 2$.*

В доказательстве данной теоремы используются обобщенная локальная теорема для $m-$эдральных разбиений [1], классификация триангуляций сферы [2] и теорема о локальных условиях правильных разбиений сферы [3].

Основные понятия.

Определение 1. *Корону радиуса 1 ячейки назовем стабильной, если группа симметрий этой короны совпадает с группой симметрий ее центра.*

Определение 2. *Компонентой $K^L(P)$ ячейки P относительно подмножества L разбиения T называется совокупность ячеек из множества L, содержащая ячейку P, в которой любые две ячейки P_1 и P_2 можно соединить последовательностью ячеек из L, любые две соседние которой смежны по стороне или имеют общую вершину.*

Определение 3. *Расстояние между компонентами K_1^L и K_2^L относительно множества L есть*

$$d^*(K_1^L, K_2^L) = \min_{\substack{P \in K_1^L \subset L, \\ Q \in K_2^L \subset L, \\ P \neq Q}} d^*(P, Q) - 1.$$

Определение 4. *Полной короной $C_1^*(K)$ радиуса 1 компоненты K называется объединение первых полных корон ячеек этой компоненты, то есть*

$$C_1^*(K) = \bigcup_{Q \in K} C_1^*(Q).$$

Множество ячеек биправильного разбиения T распадается на два семейства T^1 и T^2. Будем считать, что две ячейки $P, P' \in T$ принадлежат семейству T^1, если $C^*(P) \cong C^*(P')$; будем считать, что две ячейки $Q, Q' \in T$ принадлежат семейству T^2, если $C^*(Q) \cong C^*(Q')$ и при этом $C^*(P) \ncong C^*(Q)$. Очевидно, что $T = T^1 \sqcup T^2$. Если в разбиении T имеются две протоячейки P и Q, то:

$$T^1 = \{M \in T| \ \ M \cong P\}, \quad T^2 = \{M \in T| \ \ M \cong Q\}. \tag{1}$$

Для группы S_0 симметрий ячейки и групп симметрий ее корон неполной S_1 и полной S_1^* имеет место вложение:

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_1^*. \tag{2}$$

Заметим, что группа S_0 симметрий треугольника может быть D_3, D_1, E. Группы $S_1(P)$ и $S_1^*(P)$ симметрий неполной и полной короны радиуса 1 треугольника P могут быть D_3, C_3, D_1 или E. Выпишем всевозможные пары групп симметрий $(S_0(P), S_1^*(P))$; $(S_0(Q), S_1^*(Q))$:

1.$(D_3, D_3); (D_1, D_1)$	7.$(D_3, D_1); (D_1, D_1)$	13.$(D_1, D_1); (D_1, D_1)$
2.$(D_3, D_3); (D_1, E)$	8.$(D_3, D_1); (D_1, E)$	14.$(D_1, D_1); (D_1, E)$
3.$(D_3, D_3); (E, E)$	9.$(D_3, D_1); (E, E)$	15.$(D_1, D_1); (E, E)$
4.$(D_3, C_3); (D_1, D_1)$	10.$(D_3, E); (D_1, D_1)$	16.$(D_1, E); (D_1, E)$
5.$(D_3, C_3); (D_1, E)$	11.$(D_3, E); (D_1, E)$	17.$(D_1, E); (E, E)$
6.$(D_3, C_3); (E, E)$	12.$(D_3, E); (E, E)$	18.$(E, E); (E, E)$

(3)

3. Доказательство Теоремы.

Доказательство условия необходимости тривиально. Действительно, если разбиение T биправильно, то есть ячейки разбиения распадаются в две орбиты G_1 и G_2, то для любых ячеек $P, P' \in G_1$ существует движение g_1 такое, что $g_1(P) = P'$ и $g_1(T) = T$, а также для любых ячеек $Q, Q' \in G_2$ существует движение g_2 такое, что $g_2(Q) = Q'$ и $g_2(T) = T$. Тогда движение g_1 переводит $C_1^*(P)$ в $C_1^*(P')$, а движение g_2 переводит $C_1^*(Q)$ в $C_1^*(Q')$ как подкомплексы разбиения. Если предположить, что $C_1^*(P) \cong C_1^*(Q)$, то по теореме о полных коронах [3] все полные короны попарно конгруэнтны, а значит, разбиение T правильное, что невозможно. Это противоречие означает, что $C_1^*(P) \ncong C_1^*(Q)$, а значит, в разбиении T имеется ровно два класса попарно неконгруэнтных полных корон радиуса 1.

Доказательство условия достаточности для триангуляций с двумя протоячейками.

Из условия теоремы множество ячеек разбиения распадается в две совокупоности T^1 и T^2, см. (1).
а). Если в разбиении $S_0(P) = S_1^*(P)$ для любого $P \in T$ (что соответствует парам 1, 3, 13, 15, 18), то биправильность таких разбиений следует из локальной теоремы [1].
б). Если в разбиении $S_0(P) = S_1^*(P)$ для всех $P \in T^1$, но $S_0(Q) \supset S_1^*(Q)$ для всех $Q \in T^2$ (что соответствует парам 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 17), то доказательство см. в теореме 1.
в). Если в разбиении для любого $P \in T$ имеем $S_0(P) \supset S_1^*(P)$, то биправильность таких разбиений (соответствующих парам 5, 8, 11, 16), доказывается в теоремах 2 – 5 соответственно.

Доказательство будет опираться на следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть в разбиении T имеются две конгруэнтные полные короны $C_1^*(P)$ и $C_1^*(P')$, причем $S_0(P) = S_1^*(P)$, и g — такое движение, что $g(P) = P'$. Тогда $g(C_1^*(P)) = C_1^*(P')$.*

Доказательство. Поскольку короны $C_1^*(P)$ и $C_1^*(P')$ конгруэнтны, то найдется такое движение γ, что $\gamma(P) = P'$ и $\gamma(C_1^*(P)) = C_1^*(P')$. Рассмотрим композицию $g^{-1} \circ \gamma$. Очевидно, что $g^{-1} \circ \gamma(P) = g^{-1}(P') = P$, то есть элемент $h = g^{-1} \circ \gamma \in S_0(P) = S_1^*(P)$. Выразим g и применим к $C_1^*(P)$: $g(C_1^*(P)) = \gamma \circ h^{-1}(C_1^*(P)) = \gamma(C_1^*(P)) = C_1^*(P')$.

Предложение 2. *Пусть в разбиении T имеются две конгруэнтные друг другу короны $C_1^*(Q)$ и $C_1^*(Q')$, причем $S_1(Q) = S_1^*(Q)$, и g такое движение, что $g(Q) = Q'$ и $g(C_1(Q)) = C_1(Q')$. Тогда $g(C_1^*(Q)) = C_1^*(Q')$.*

Доказательство. Так как $C_1^*(Q)$ и $C_1^*(Q')$ конгруэнтны, то найдется движение γ такое, что $\gamma(Q) = Q'$ и $\gamma(C_1^*(Q)) = C_1^*(Q')$. Рассмотрим композицию $g^{-1} \circ \gamma$. Очевидно, что $g^{-1} \circ \gamma(Q) = g^{-1}(Q') = Q$ и $g^{-1} \circ \gamma(C_1(Q)) = g^{-1}(C_1(Q')) = C_1(Q)$. Таким образом, элемент $h = g^{-1} \circ \gamma \in S_1(Q) = S_1^*(Q)$. Выразим g : $g = \gamma \circ h^{-1}$. Поэтому $g(C_1^*(Q)) = \gamma \circ h^{-1}(C_1^*(Q)) = \gamma(C_1^*(Q)) = C_1^*(Q')$.

Предложение 3. *Триангуляция T с условиями $N_1^* = 2$ и $S_1(P) = S_1^*(P)$ для любого $P \in T$ является биправильной.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать биправильность разбиения, покажем, что движение g, переводящее полную корону $C_1^*(M)$ произвольной ячейки M в корону $C_1^*(M')$ некоторой ячейки M', переводит произвольную ячейку N в ячейку N' разбиения. Соединим M и N цепочкой $[MN] = \{M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N\}$, в которой каждые две соседние ячейки смежны по стороне. Индукцией по i покажем, что $g(M_i) = M_i' \in T$ и $g(C_1^*(M_i)) = C_1^*(M_i')$.

Для $i = 0$ данное утверждение верно. Пусть утверждение верно для всех $i < j$, в том числе пусть $g(M_{j-1}) = M'_{j-1} \in T$ и $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M'_{j-1})$. Поскольку $C_1(M_j) \in C_1^*(M_{j-1})$, то $g(C_1(M_j)) = C_1(M'_j)$. В силу равенства групп симметрий $S_1(M_j) = S_1^*(M_j)$ и $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M'_{j-1})$ из предложения 2 имеем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M'_j)$.

Предложение 4. *Пусть T — нормальная триангуляция евклидовой плоскости с условием $N_0 = N_1 = 2$. Пусть для любых ячеек $M, N \in T$ цепочка по сторонам $[M, N] = \{M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N\}$ такова, что корона $C_1(M_j)$ однозначно восстанавливается по короне $C_1(M_{j-1})$. Тогда T является биправильной триангуляцией.*

Доказательство. Покажем, что всякое движение g такое, что $g(M) = M'$ и

$g(C_1(M)) = C_1(M')$ для произвольных $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$.

Докажем индукцией по i, что $g(C_1(M_i)) = C_1(M'_i)$ для $i = 0, 1, \dots, n$. Для $i = 0$ утверждение верно из условия. Предположим, что утверждение верно для $i = j - 1$, то есть $g(C_1(M_{j-1})) = C_1(M'_{j-1}) \subset T$, тогда поскольку корона $C_1(M_j)$ однозначно восстанавливается по короне $C_1(M_{j-1})$, то $g(C_1(M_j)) = C_1(M'_j)$.

Замечание. Легко видеть, что в неполной короне $C_1(P)$ произвольной ячейки $P \in T^1$ такой триангуляции всегда присутствует хотя бы одна ячейка $Q \in T^2$, иначе мы имели бы моноразбиение.

Теорема 1. *Пусть T — триангуляция плоскости с условиями $N_0 = N_1^* = 2$ и $S_0(P) = S_1^*(P)$ для любого $P \in T^1$. Тогда T является биправильным разбиением.*

Доказательство. Теоремы 1. Для каждой ячейки $P \in T^1$ рассмотрим ее компоненту связности $K_{T^1}(P)$. Для краткости будем обозначать $K_{T^1}(P)$ через $K(P)$ или просто K. Класс T^1 есть объединение попарно непересекающихся компонент. Докажем, что эти компоненты конгруэнтны.

Лемма 1. *Пусть P и P' — ячейки из T^1, тогда любое движение g, переводящее P в P', переводит $K(P)$ в $K(P')$.*

Доказательство. Пусть P и $P' \in T^1$, и g такое движение, что $g(P) = P'$. Возьмем произвольную ячейку $Q \in K(P)$ и покажем, что $g(Q) = Q' \in K(P')$.

Так как P, $Q \in K(P)$, то существует последовательность ячеек

$[PQ] = \{P = P_0, P_1, \dots, P_n = Q\}$ такая, что $P_i \in K(P)$, $i = 1, \dots, n-1$, и любые две соседние ячейки P_i и P_{i+1} смежны хотя бы по вершине. Поскольку $C_1^*(P)$ и $C_1^*(P')$ стабильны, то $g(P_1) = P'_1 \in C_1^*(P')$ и $g(C_1^*(P)) = C_1^*(P')$. Поскольку $P_1 \in C_1^*(P)$, то $g(P_1) = P'_1 \subset C_1^*(P')$, и поскольку корона $C_1^*(P_1)$ стабильна, то из предложения 1 имеем $g(C_1^*(P_1)) = C_1^*(P'_1)$. Так как $P_2 \in C_1^*(P_1)$, то $g(P_2) = P'_2$, где $P'_2 \in C_1^*(P'_1)$, а так как $C_1^*(P_2)$ также стабильна, то $g(C_1^*(P_2)) =$

$C_1^*(P_2')$. Продолжая двигаться по цепочке, устанавливаем, что цепочка ячеек $\{P = P_0, P_1, \ldots, P_n = Q\} \subset K(P)$ при движении g перейдет в цепочку ячеек $\{P', P_1', \ldots, P_n' = Q'\} \subset K(P')$.

Для доказательства того, что движение g отображает $K(P)$ на $K(P')$ достаточно рассмотреть движение g^{-1}. В самом деле, пусть $Q' \in K(P')$. По доказанному выше $Q = g^{-1}(Q') \in K(P)$, причем $g(Q) = Q'$, то есть каждая ячейка $Q' \in K(P')$ обладает прообразом из $K(P)$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Все компоненты* $K(P)$, $P \in T^1$, *попарно конгруэнтны.*

Следствие 2. *Движение* g, *рассмотренное в лемме 1, переводит* $C_1^*(K(P))$ *в* $C_1^*(K(P'))$.

Следствие 3. *Если* P *и* P' *принадлежат одной компоненте* $K(P)$, *то движение* g *из леммы 1 есть симметрия (автоморфизм) этой компоненты.*

Следствие 4. *Множество всех симметрий компоненты* $K(P)$, $P \in T^1$, *образует группу движений, транзитивно действующую на множестве ячеек данной компоненты.*

Лемма 2. *Пусть в триангуляции* T *все ячейки из* T^1 *образуют одну компоненту связности* $K = T^1$. *Тогда разбиение* T *биправильно.*

Доказательство. Доказать биправильность разбиения T, значит, доказать, что группа $Sym(T)$ действует транзитивно на множестве T^1 и на множестве T^2. Из следствия 4 леммы 1 группа симметрий компоненты K действует транзитивно на множестве ячеек из T^1. Таким образом, группа симметрий $Sym(T)$ разбиения действует транзитивно на множестве ячеек из T^1.

Докажем, что группа $Sym(T)$ транзитивно действует и на множестве T^2. Пусть Q, $Q' \in T^2$. Поскольку полные короны ячеек из T^2 конгруэнтны, найдется движение h такое, что $h(Q) = Q'$ и $h(C_1^*(Q)) = C_1^*(Q')$. Покажем, что $h(T^2) = T^2$.

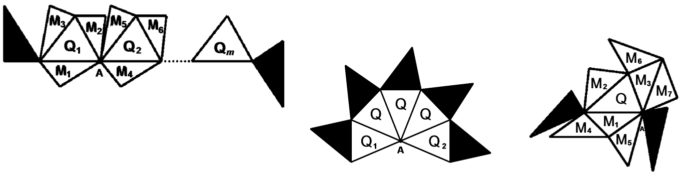
Для этого в $C_1(Q)$ возьмем ячейку $P \in T^1$ (такая ячейка существует в силу замечания перед теремой 1). Ясно, что $h(P) = P' \in C_1(Q') \cap T^1$. Так как корона $C_1(P)$ стабильна, то $h(K(P)) = K(P')$ по лемме 1. По только что доказанному h является симметрией единственной компоненты $K(P) = T^1$, и следовательно, симметрией всего разбиения T в силу следствия 2.

Лемма 3. *Пусть число компонент в* T^1 *больше 1. Тогда для любой компоненты* K_1 *ближайшая к ней компонента* K_2 *находится на расстоянии 1.*

Доказательство. Пусть расстояние между ближайшими компонентами K_1 и K_2 больше 1, то есть $d^*(K_1, K_2) = m \geqslant 2$. Найдется кратчайшая цепочка

$\{P_1, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{i-1}, Q_i, \ldots, Q_m, P_2\}$, где $P_1 \in K_1$, $P_2 \in K_2$, $Q_i \in T^2$, на которой реализуется расстояние m между компонентами, см. рис. 1 (a). В вершине

A сходятся ячейки только из T^2 (иначе получаем противоречие либо с расстоянием между компонентами K_1 и K_2, либо с тем, что компонента K_2 является ближайшей для K_1). В силу того, что к любой ячейке из T^2 прилегает хотя бы одна ячейка из T^1, рис. 1 (б), имеем $K(P_1) = K(P_2)$, что противоречит условию. Предположение неверно, и $d^*(K_1, K_2) = 1$.



(а) (б) (в)

рис. 1

То же самое утверждение верно и для компонент относительно T^2.

Определение 5. *Две компоненты K_1 и K_2 называются соседними, если расстояние между ними $d^*(K_1, K_2) = 1$.*

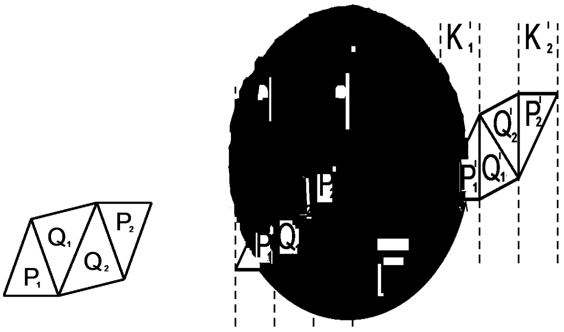
Лемма 4. *Если компоненты K_1 и K_2 — соседние, то найдется цепочка $\{P_1, Q_1, Q_2, P_2\}$ такая, что $P_1 \in K_1 \subset T^1$, $Q_1, Q_2 \in T^2$, $P_2 \in K_2 \subset T^1$, и соседние ячейки смежны по стороне.*

Доказательство. Поскольку компоненты K_1 и K_2 — соседние, то $d^*(K_1, K_2) = 1$. Пусть $\{P_1, Q, P_2\}$ — цепочка, на которой это расстояние реализуется, см. рис. 1 (в). Рассмотрим неполную корону $C_1(Q)$, в ней найдется хотя бы одна ячейка из T^1. Ясно, что $M_1 \notin T^1$, иначе $K_1 = K_2$. Тогда M_2 или M_3 из T^1. Рассмотрим корону $C_1(M_1)$, в ней также имеется ячейка из T^1. Если M_2, $M_5 \in T^1$ или M_3, $M_4 \in T^1$, то искомая цепочка $\{M_2, Q, M_1, M_5\}$ или $\{M_3, Q, M_1, M_4\}$ построена. Без ограничения общности, пусть M_2, $M_4 \in T^1$, рассмотрим корону $C_1(M_3)$. Если $M_7 \in T^1$, то цепочка $\{M_2, Q, M_3, M_7\}$ построена. Если $M_6 \in T^1$, то процесс повторяется, однако, в силу того, что в вершине A сходится конечное число ячеек, мы получим желаемое построение.

Следствие 5. *Если в триангуляции число компонент из T^1 больше 1, то в неполной короне ячейки из T^2 есть как ячейка из T^1, так и ячейка из T^2.*

Лемма 5. *Пусть K_1 и K_2 — соседние компоненты из T^1. Движение, переводящее компоненту K_1 в некоторую компоненту K_1', переводит компоненту K_2 в компоненту K_2', являющейся соседней для K_1'.*

Доказательство. Поскольку компоненты K_1 и K_2 — соседние, то в силу леммы 4 найдутся $P_1 \in K_1$ и $P_2 \in K_2$, связанные цепочкой вида $\{P_1, Q_1, Q_2, P_2\}$, рис. 2 (а). Ячейки $Q_1, Q_2 \in T^2$, причем каждая из них смежна только с одной ячейкой из T^1 (Q_1 смежна с P_1, Q_2 смежна с P_2), в противном случае $K_1 = K_2$. Очевидно, $P_2 \in C_1(Q_2)$ и $P_2 \in C_1^*(Q_1)$.



(а) (б)

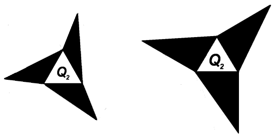
рис. 2

Рассмотрим произвольную ячейку $P_1' \in K_1' \subset T^1$ и движение g, переводящее P_1 в P_1' (рис. 2 (б)). Тогда, в силу стабильности, корона $C_1^*(P_1)$ при движении g перейдет в корону $C_1^*(P_1')$). Поскольку $C_1^*(P_1) \supset C_1(Q_1)$, то $g(Q_1) = Q_1' \in C_1(P_1')$ и $g(C_1(Q_1)) = C_1(Q_1')$. При этом движении ячейка Q_2 перейдет в $Q_2' \in C_1^*(P_1')$. Как было замечено выше, в короне $C_1(Q_2)$ имеется ровно одна ячейка из T^1, а именно: P_2. Поэтому в короне $C_1(Q_2')$ имеется ровно одна ячейка из T^1, обозначим ее P_2'. При движении g ячейка P_2 перейдет в ячейку P_2'. Покажем это отдельно для каждого из случаев таблицы (12).

Для пар групп симметрий (2), (14), (17) имеем $S_0(Q_2) = D_1$ и $S_0^*(Q_2) = E$. Если $S_0(Q_2) = D_1$, то биправильность этих разбиений следует из обобщенной локальной теоремы (А). Если $S_0(Q_2) = E$, то в силу предложения 2 движение g переводит полную корону $C_1^*(Q_2)$ в полную корону $C_1^*(Q_2')$ разбиения, а значит, P_2 перейдет в ячейку P_2' разбиения.

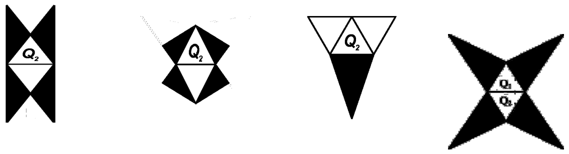
Для случаев (4) и (6) имеем $S_0(Q_2) = D_3$ и $S_1^*(Q_2) = C_3$. Если $S_1(Q_2) = D_3$, то это случай пары (1) или (3); соответствующие разбиения биправильны по обобщенной локальной теореме (А). Если $S_1(Q_2) = C_3$, то в силу предложения 2 движение g переводит полную корону $C_1^*(Q_2)$ в полную корону $C_1^*(Q_2')$ разбиения, а значит, ячейка P_2 перейдет в ячейку P_2' разбиения.

Для случаев (7) и (9) имеем $S_0(Q_2) = D_3$ и $S_1^*(Q_2) = D_1$. Если $S_1(Q_2) = D_3$, то это есть случай пары (1) или (3). Если $S_1(Q_2) = D_1$, то в силу предложения 2 движение g переводит корону $C_1^*(Q_2)$ в корону $C_1^*(Q_2')$ разбиения, а значит, ячейка P_2 перейдет в ячейку P_2' разбиения.



(а) (б)

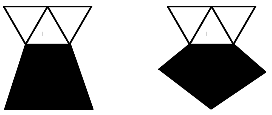
рис. 3



(а) (б) (в) (г) (д)

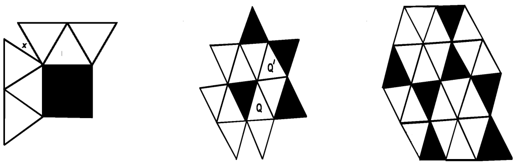
рис. 4

Для пар (10) и (12) имеем $S_0(Q_2) = D_3$ и $S_1^*(Q_2) = E$. Если $S_1(Q_2) = D_3$, то это также случай пары (1) или (3). Если $S_1(Q_2) = E$, то в силу предложения 2 ячейка P_2 перейдет в ячейку P_2' разбиения. Если $S_1(Q_2) = C_3$, то из рис. 3 (а) и (б) для случаев (10) и (12) соответственно, видно, что в неполной короне ячейки из T^2 лежат только ячейки из T^1, что противоречит следствию леммы 4. Если $S_1(Q_2) = D_1$, см. рис. 4 (а–д), то в случаях (а–в) ячейки из T^1 составляют одну компоненту. В случае (г) ячейки из T^1 могут иметь два вида неполных корон, рис. 5 (а), (б), первый из которых соответствует биправильному разбиению. Для другого случая угол при основании равнобедренного треугольника может быть либо 45^o, рис. 6 (а) (разбиение невозможно, поскольку угол $x = 30^o$ не совпадает ни с одним из углов данных ячеек), либо угол при основании равнобедренного треугольника равен 30^o, рис. 6 (б) (нарушается конгруэнтность корон $C_1^*(Q) \not\cong C_1^*(Q'))$ и рис. 6 (б$'$) (разбиение биправильное, но $S_1^*(P) = D_1$ для $P \in T^1$).



(а) (б)

рис. 5



(а) (б) (б$'$)

рис. 6

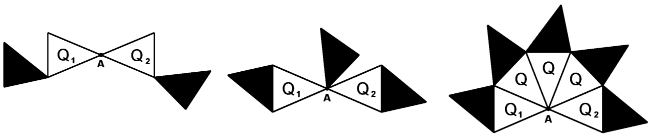
Итак, доказано, что движение g переводит ячейку $P_2 \in K_2$ в ячейку $P_2' \in C_1^*(Q_1')$ разбиения, $P_2' \in K_2'$. Значит, по лемме 1 движение g переводит компоненту $K_2 = K_2(P_2)$ в компоненту $K_2' = K_2'(P_2')$, являющейся соседней для K_1'.

Лемма 6. *Всякое движение g, переводящее $P \in T^1$ в $P' \in T^1$, является симметрией множества T^1.*

Доказательство. Возьмем произвольные $P \in K(P) \subset T^1$, $P' \in K(P') \subset T^1$. Пусть g — такое движение, что $g(P) = P'$ (тогда автоматически $g(C_1^*(P)) = C_1^*(P')$ в силу стабильности). Покажем, что $g(M) = M' \in T^1$ для любого $M \in T^1$. Соединим ячейки P и M цепочкой $[P, M] = \{P = M_0, M_1, \dots, M_{i+1} = M\}$, то есть последовательностью ячеек из T, в которой любые две соседние ячейки M_k и M_{k+1}, $k = 0, \dots, i$, смежны хотя бы по вершине. Доказательство будет производиться индукцией по i, возможному расстоянию между компонентами $K(P)$ и $K(M)$.

Если $i = 1$, то утверждение верно в силу леммы 5.

Если $i = 2$, то есть $d^*(K(P), K(M)) = 2$, то найдется кратчайшая цепочка $\{P_1, Q_1, Q_2, P_2\}$, на которой это расстояние реализуется, $P_1 \in K(P)$, $P_2 \in K(M)$, ячейки Q_1 и Q_2 смежны в вершине A, рис. 7(а). Если в вершине A сходится хотя бы одна ячейка $P'' \in T^1$, рис. 7(б), тогда $d^*(K(P), K(P'')) = 1$ и $d^*(K(P''), K(M)) = 1$, и из того, что утверждение верно для $i = 1$, имеем $g(P'') = P''' \in K(P')$ и $g(P_2) = P_2' \in K(M')$ и $g(M) = M' \in T^1$. Если в вершине A сходятся только ячейки из T^2, то $K(P) = K(M)$, см. рис. 7(в), что невозможно.



(а) (б) (в)

рис. 7

Предположим, что утверждение верно для всех $i < j$, покажем, что утверждение верно для случая $d^*(K(P), K(M)) = j$. Пусть $d^*(K(P), K(M)) = j > 2$, тогда в цепочке $[P_1, M''] = \{P_1, M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{j-1}, M_j, M''\}$, на которой реализуется это расстояние, найдется ячейка $N \in \{M_2, M_3, \ldots, M_{j-1}\}$, для которой верно следующее.

Либо $N \in T^1$, тогда $d^*(K(P), K(N)) < j$, и по предположению индукции $g(N) = N' \in T^1$. Также имеем $d^*(K(N), K(M)) < j$, и по предположению индукции $g(M) = M' \in T^1$.

Либо $N \notin T^1$, тогда в неполной короне $C_1(N)$ существует ячейка $N' \in T^1$, причем $d^*(K(P), K(N')) < j$, и по предположению индукции $g(N') = N'' \in T^1$. Имеем $d^*(K(N'), K(M)) < j$, и по предположению индукции $g(M) = M' \in T^1$.

ЛЕММА 7. *Всякое движение g, переводящее $P \in T^1$ в $P' \in T^1$, является симметрией множества T^2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что движение g, переводящее произвольный $P \in T^1$ в некоторый $P' \in T^1$, переводит произвольный $Q \in T^2$ в $Q' \in T^2$. В короне $C_1(Q)$ есть ячейка $M \in T^1$, которая при движении g переходит в $M' \in T^1$. Из стабильности короны $C_1(M)$ имеем $g(C_1(M)) = C_1(M')$, а значит, ячейка $Q \in C_1(M)$ при движении g перейдет в некоторую ячейку $Q' \in C_1(M')$.

На основании лемм 1, 6, 7 доказано, что для любых $P, P' \in T^1$ разбиения T найдется движение g такое, что $g(P) = P'$ и $g(T) = T$.

ЛЕММА 8. *Для любых ячеек $Q, Q' \in T^2$ разбиения T найдется движение g, являющееся симметрией разбиения T.*

Доказательство. В качестве движения g рассмотрим движение, переводящее $C_1(Q)$ в $C_1(Q')$. Поскольку в неполной короне $C_1(Q)$ имеется ячейка $P \in T^1$, причем $g(P) = P' \in C_1(Q')$, то из лемм 6 и 7 движение g является симметрией всего разбиения T.

Теорема 2. *Пусть триангуляция T с условием $N_0 = N_1^* = 2$ соответствует паре (16): $(D_1, E); (D_1, E)$. Тогда разбиение T является биправильным.*

Доказательство. Пусть P — ячейка разбиения, и $S_0(P) = D_1$, $S_1^*(P) = E$. При этом группа симметрий неполной короны $S_1(P) = D_1$ или $S_1(P) = E$. Рассмотрим тройки групп симметрий: $(S_0(P),\ S_1(P),\ S_1^*(P))$

и $(S_0(Q),\ S_1(Q),\ S_1^*(Q))$, где $P \in T^1, Q \in T^2$. Возможны варианты:

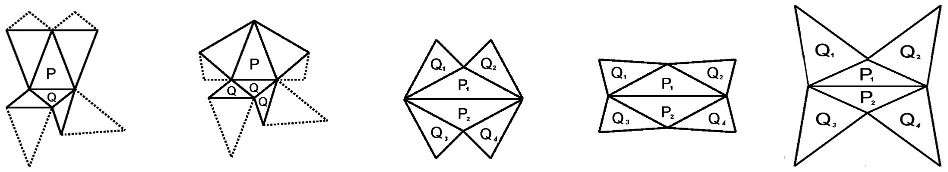
$$1.(D_1, D_1, E), (D_1, D_1, E);\quad 2.(D_1, E, E), (D_1, E, E);\quad 3.(D_1, D_1, E), (D_1, E, E)$$

В первом случае биправильность разбиений следет из обобщенной локальной теоремы.

Во втором случае биправильность разбиений вытекает из предложения 3.

В третьем случае пусть ячейки с условием (D_1, D_1, E) составляют множество T^1, ячейки с условием (D_1, E, E) составляют множество T^2. Ячейка $P \in T^1$ не может быть окружена только ячейками из T^1 или только ячейками из T^2 (поскольку P и Q — равнобедренные треугольники и $P \ncong Q$).

В силу того, что $S_1(P) = D_1$, к основанию треугольника P из T^1 может прилегать либо $Q \in T^2$ основанием (см. рис. 8 (а,б)), либо ячейка из T^1 также основанием (рис. 8 (в–д)).



(а) (б) (в) (г) (д)

рис. 8

Пусть к основанию $P \in T^1$ прилегает $Q \in T^2$ основанием. Тогда имеются короны $C_1(P)$ только двух видов, корона $C_1(Q)$ единственна, рис. 8 (а,б). Склеивая ячейки P и Q по основанию, получаем разбиение T_R на равные дельтоиды R с конгруэнтными первыми неполными коронами. Из [3] разбиение T_R является правильным. Движение g, переводящее T_R в себя, переводит ячейку $P \in T^1$ в ячейку $P' \in T^1$ и ячейку $Q \in T^2$ в ячейку $Q' \in T^2$. Поэтому группа $Sym(T_R)$ симметрий разбиения T_R действует транзитивно на множестве T^1 и на множестве T^2. Значит, разбиение T является биправильным.

Пусть к основанию ячейки $P \in T^1$ прилегает ячейка из T^1 основанием, рис. 8 (в–д). В короне $C_1(P)$ имеется ячейка $Q \in T^2$. В условиях теоремы 2 третьего случая справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Всякое движение g, переводящее $C_1^*(M)$ в $C_1^*(M')$, $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T.*

Доказательство. Покажем, что при движении g, переводящем $C_1^*(M)$ в $C_1^*(M')$, где $M, M' \in T$, произвольная ячейка N разбиения перейдет в ячейку N' разбиения. Соединим M с N цепочкой $[M, N] = \{M = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = N\}$, в которой любые две соседние ячейки смежны по стороне. Индукцией по i, $i = 0, \dots, n$, покажем, что $g(M_i) = M_i' \in T$ и $g(C_1^*(M_i)) = C_1^*(M_i')$.

Для $i = 0$ утверждение верно. Предположим, что утверждение верно для всех $i < j$, значит, $g(M_{j-1}) = M_{j-1}' \in T$ и $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M_{j-1}')$.

Поскольку $M_j \in C_1(M_{j-1})$, то $g(M_j) = M_j' \in C_1(M_{j-1}')$, $M_j' \in T$.

а) Пусть $M_{j-1} \in T^1$ или $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^2$. Тогда $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$, так как $C_1(M_j) \subset C_1^*(M_{j-1})$, и из предложения 2 имеем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M_j')$.

б) Пусть $M_{j-1} \in T^1$ и $M_j \in T^1$. Обозначим M_{j-1} через P_1, а M_j обозначим через P_2. В короне $C_1(P_2)$ имеются $Q_3, Q_4 \in T^2$, рис. 8 (в–д). Корона $C_1^*(P_1)$ однозначно определяет короны $C_1(Q_3)$ и $C_1(Q_4)$. Поскольку $S_1(Q) = S_1^*(Q) = E$ для $Q \in T^2$, то применяя предложение 2, получаем $g(C_1^*(Q_3)) = C_1^*(Q_3')$ и $g(C_1^*(Q_4)) = C_1^*(Q_4')$, а поскольку $C_1^*(P_2) \subset (C_1^*(Q_3) \cup C_1^*(Q_4))$, то $g(C_1^*(P_2)) \subset (g(C_1^*(Q_3)) \cup g(C_1^*(Q_4))) \subset T$.

в) Пусть $M_{j-1} \in T^2$ и $M_j \in T^1$. Обозначим M_{j-1} через Q_1 и M_j — через P_1, рис. 8 (в–д). В $C_1(P_1)$ имеется также $Q_2 \in T^2$, корона $C_1(Q_2)$ определяется однозначно по короне $C_1^*(Q_1)$. Из предложения 2 имеем $g(C_1^*(Q_2)) = C_1^*(Q_2')$. Поскольку $C_1^*(P_1) \subset (C_1^*(Q_1) \cup C_1^*(Q_2))$, то $g(C_1^*(P_1)) \subset (g(C_1^*(Q_1)) \cup g(C_1^*(Q_2))) \subset T$. Лемма доказана.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть триангуляция T с условием $N_0 = N_1^* = 2$ соответствует паре (8): $(D_3, D_1); (D_1, E)$. Тогда разбиение T является биправильным.*

Доказательство. В силу вложения (3) группы симметрий первых неполных корон треугольников $P \in T^1$ и $Q \in T^2$ могут быть следующими: $S_1(P) = \{D_3, C_3, D_1\}$; $S_1(Q) = \{D_1, E\}$. Если $S_1(P_1) = C_3$, то $S_1^*(P_1) \neq D_1$, что противоречит условию. Поэтому групп симметрий ячеек и их неполных первых корон $(S_0(P), S_1(P)), (S_0(Q), S_1(Q))$ возможно ровно 4 варианта:

1. $(D_3, D_3), (D_1, D_1)$; 2. $(D_3, D_3), (D_1, E)$;

3. $(D_3, D_1), (D_1, D_1)$; 4. $(D_3, D_1), (D_1, E)$.

1. Для случая $(D_3, D_3), (D_1, D_1)$ применима обобщенная локальная теорема [1].

2. Случай $(D_3, D_3), (D_1, E)$ невозможен, поскольку $S_1^*(P) \neq D_1$, рис. 9.

3. В случае $(D_3, D_1), (D_1, D_1)$ корона $C(P)$ может быть одной из следующих, рис. 10:

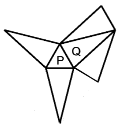
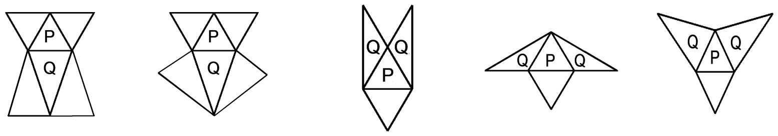


рис. 9



(а′) (а″) (б) (в) (г)

рис. 10

В случае (а′) имеем однозначно восстанавливаемое биправильное разбиение, рис 11 (а). Случай (а″) возможен, рис. 11 (б). В остальных случаях (б–г), поскольку ячейка $Q \in T^2$ по любой своей вершине смежна с ячейкой из T^2, в разбиении имеется только одна компонента относительно T^2, то есть $T = C_1^*(T^2)$. В силу предложения 4 группа симметрий компоненты T^2 действует транзитивно на ячейках этой компоненты. Поскольку $T = C_1^*(T^2)$, то группа симметрий разбиения действует действует транзитивно на множестве всех ячеек разбиения.

4. Рассмотрим случай $(D_3, D_1), (D_1, E)$. Имеются тройки групп симметрий:

$(S_0(P), S_1(P), S_1^*(P)) = (D_3, D_1, D_1)$ — для всех $P \in T^1$, и

$(S_0(Q), S_1(Q), S_1^*(Q)) = (D_1, E, E)$ — для всех $Q \in T^2$. Из предложения 3 следует, что соответствующие разбиения являются биправильными.

Теорема 4. *Нормальная триангуляция евклидовой плоскости с условием* $N_0 = N_1^* = 2$, *соответствующая паре (5):* $(D_3, C_3); (D_1, E)$, *является биправильной.*

Доказательство. С учетом вложения (2) имеем $S_1(P) = \{D_3, C_3\}$ для $P \in T^1$ и $S_1(Q) = \{D_1, E\}$ для $Q \in T^2$. Тогда пары троек групп симметрий $(S_0(P), S_1(P), S_1^*(P);\ S_0(Q), S_1(Q), S_1^*(Q))$ возможны следующие:

1. $(D_3, D_3, C_3; D_1, D_1, E)$; 2. $(D_3, D_3, C_3; D_1, E, E)$;

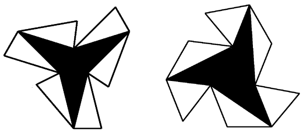
3.$(D_3, C_3, C_3; D_1, D_1, E)$; 4. $(D_3, C_3, C_3; D_1, E, E)$.

1. Применима обобщенная локальная теорема.

2. Данному случаю соответствует рис. 12 (а), но поскольку сумма углов, сходящихся в любой вершине ячейки P: $4\alpha + 2\beta + 60^o > 360^o$, то такого разбиения не существует.

(а) (б)

рис. 11



(а) (б)

рис. 12

3. $(D_3, C_3, C_3; D_1, D_1, E)$, рис. 12 (б). Покажем, что всякое движение g такое, что $g(M) = M'$ и $g(C_1(M)) = C_1(M')$ для произвольных $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$. Пусть имеется цепочка по сторонам $[MN] = \{M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N\}$.

а). Пусть $M_{j-1} \in T^1$, $M_j \in T^1$. Случай невозможен, так как в короне $C_1(M_{j-1})$ только ячейки типа T^2.

б). Пусть $M_{j-1} \in T^1$, $M_j \in T^2$. В этом случае $C_1(M_j)$ однозначно определена короной $C_1(M_{j-1})$, и следовательно, $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$.

в). Пусть $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^1$. По короне $C_1(M_{j-1})$ определяется корона $C_1(M_j)$ однозначно, следовательно, $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$, и более того из предложения 2 следует $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M_j')$.

г). Пусть $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^2$. Из стабильности короны $C_1(M_j)$ имеем $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$. Таким образом, $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$.

4. Из предложения 3 следует, что соответствующие разбиения биправильные.

Теорема 5. *Нормальная триангуляция евклидовой плоскости с условием $N_0 = N_1^* = 2$, соответствующая паре (11): $(D_3, E); (D_1, E)$, является биправильной.*

Доказательство. С учетом вложения (2) имеем $S_1(P) = \{D_3, C_3, D_1, E\}$ для ячеек $P \in T^1$; $S_1(Q) = \{D_1, E\}$ для ячеек $Q \in T^2$. Тогда пары троек групп симметрий таковы:

1. $(D_3, D_3, E; D_1, D_1, E)$; 2. $(D_3, C_3, E; D_1, D_1, E)$; 3. $(D_3, D_1, E; D_1, D_1, E)$;
4. $(D_3, E, E; D_1, D_1, E)$; 5. $(D_3, D_3, E; D_1, E, E)$; 6. $(D_3, C_3, E; D_1, E, E)$;
7. $(D_3, D_1, E; D_1, E, E)$; 8. $(D_3, E, E; D_1, E, E)$.

Доказательство следующих пунктов происходит при условии существования соответствующих разбиений.

1). Применима обобщенная локальная теорема.

2). Покажем, что всякое движение g: $g(M) = M'$ и $g(C_1(M)) = C_1(M')$ для произвольных $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$. Возьмем цепочку по сторонам $[M, N] = \{M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N\}$. Докажем индукцией по i, что $g(C_1(M_i)) = C_1(M_i')$ для $i = 0, 1, \ldots, n$. Предположим, что утверждение верно для $i = j - 1$, то есть $g(C_1(M_{j-1})) = C_1(M_{j-1}')$ и $g(M_j) = M_j' \in C_1(M_{j-1}')$. Корона $C_1(M_j)$ однозначно определяется по короне $C_1(M_{j-1})$, рис. 13, следовательно, $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$.

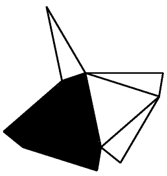
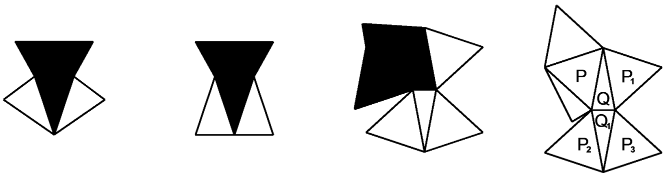


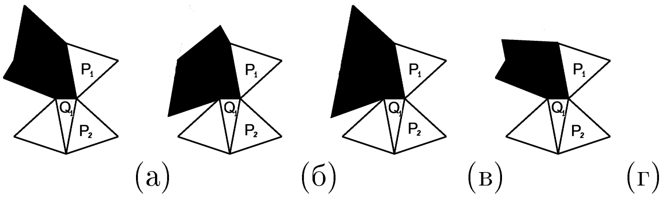
рис. 13



(а) (б) (в) (г)

рис. 14

3). Данным условиям соответствуют короны $C_1(P)$ и $C_1(Q)$, изображенные на рис. 14 (а–г). Случай 14.3(а) сводится к случаю 10.3(а$''$). Случай 14.3(б) сводится к случаю 10.3(а$'$). В каждом из случаев 14 (в,г) корона $C_1(P)$ определяется однозначно по короне $C_1(Q)$, и наоборот, корона $C_1(Q)$ определяется однозначно по короне $C_1(P)$, поэтому применимо предложение 4, в силу которого соответствующие разбиения являются биправильными.



(а) (б) (в) (г)

рис. 15

4). Данным условиям соответствуют короны, изображенные на рис. 15 (а–г). В каждом из этих случаев корона $C_1(P)$ определяется однозначно по короне $C_1(Q)$, и наоборот, поэтому применимо предложение 4.

5). Покажем, что всякое движение g: $g(M) = M'$ и $g(C^*(M)) = C^*(M')$ для произвольных $M, M' \in T^2$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$.

Рассмотрим цепочку по сторонам $[MN] = \{M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N\}$. Докажем индукцией по i, что $g(C_1^*(M_i)) = C_1^*(M_i')$ для $i = 0, 1, \ldots, n$. Предположим, что утверждение верно для $i = j - 1$, то есть $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M_{j-1}')$, покажем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M_j')$.

а). Пусть $M_{j-1} \in T^1$ или $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^2$. Поскольку $C_1(M_j) \subset C_1^*(M_{j-1})$, то $g(C_1(M_j)) = C_1(M_j')$. Из предложения 2 имеем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M_j')$.

б). Пусть $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^1$. Обозначим M_{j-1} через Q, M_j через P. В $C_1(P)$ имеются $Q, Q_1 \in T^2$, рис. 16, причем $C_1(Q_1)$ определяется однозначно короной $C_1^*(Q)$. Тогда из предложения 2 имеем $g(C_1^*(Q_1)) = C_1^*(Q_1')$. Поскольку $C_1^*(P) \subset (C_1^*(Q) \cup C_1^*(Q_1))$, то $g(C_1^*(P)) \subset g(C_1^*(Q) \cup C_1^*(Q_1)) \subset T$.

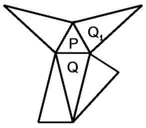


рис. 16

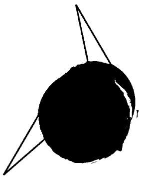
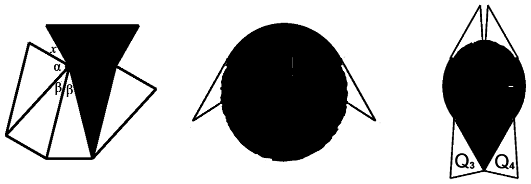


рис. 17



(а) (б) (в)

рис. 18

6). Покажем, что движение g такое, что $g(M) = M'$ и $g(C_1^*(M)) = C_1^*(M') \subset T$ для произвольных $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$.

Рассмотрим цепочку по сторонам $[MN] = \{M = M_0, M_1, \ldots, M_n = N\}$. Докажем индукцией по i, что $g(C_1^*(M_i)) = C_1^*(M_i') \subset T$ для $i = 0, 1, \ldots, n$,.

Предположим, что утверждение верно для $i = j-1$, то есть $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M'_{j-1})$ и $g(M_j) = M'_j \in C_1(M'_{j-1})$. Покажем, что $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M'_j)$.

а) Пусть $M_{j-1} \in T^1$ или $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^2$. Поскольку $C_1(M_j) \subset C_1^*(M_{j-1})$, то $g(C_1(M_j)) = C_1(M'_j)$. Из предложения 2 имеем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M'_j)$.

б) Пусть $M_{j-1} \in T^2$, $M_j \in T^1$. Обозначим M_{j-1} через Q, а M_j — через P. Из предположения индукции имеем $g(C_1^*(Q)) = C_1^*(Q')$. В силу того, что $C_1(Q_1)$ однозначно определяется по короне $C_1^*(Q)$, рис. 17, то $g(C_1(Q_1)) = C_1(Q'_1)$. Поскольку $S_1(Q_1) = S_1^*(Q_1) = E$, то $g(C_1^*(Q_1)) = C_1^*(Q'_1)$ из предложения 2. Заметим, что $C_1^*(P) \subset (C_1^*(Q) \cup C_1^*(Q_1))$, тогда $g(C_1^*(P)) \subset g(C_1^*(Q) \cup C_1^*(Q_1)) \subset T$.

7). $(D_3, D_1, E; D_1, E, E)$. Имеется 3 вида неполных корон $C_1(P)$, рис. 18.

Покажем для случаев 7 (а,б,в), что всякое движение g: $g(M) = M'$ и

$g(C_1^*(M)) = C_1^*(M')$ для произвольных $M, M' \in T$, является симметрией всего разбиения T, то есть $g(N) = N' \in T$ для любого $N \in T$.

Рассмотрим цепочку по сторонам $[MN] = \{M = M_0, M_1, \dots, M_n = N\}$. Докажем индукцией по i, что $g(C_1^*(M_i)) = C_1^*(M'_i)$ для $i = 0, 1, \dots, n$. Предположим, что утверждение верно для $i = j-1$, то есть $g(C_1^*(M_{j-1})) = C_1^*(M'_{j-1})$, покажем $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M'_j)$. В пунктах 7 (а,б,в) по полной короне $C^*(M_{j-1})$ короны $C(M_j)$ и $C^*(M_j)$ восстанавливаются однозначно по принципу пункта 6 (б). Из предложения 2 следует $g(C_1^*(M_j)) = C_1^*(M'_j)$.

8). Из предложения 3 следует, что разбиения являются биправильными.

Доказательство условия достаточности для моноразбиений.

Пусть дана триангуляция с одной протоячейкой (пары 13, 14, 16, 18 из таблицы (3)).

Теорема 6. *Нормальная триангуляция сферы S^2 с условием $N_0 = 1$ и $N_1 = N_1^* = 2$ является биправильной.*

Доказательство. Исследуются разбиения, соответствующие парам из таблицы (3):

13. $(D_1, D_1), (D_1, D_1)$; 14. $(D_1, D_1), (D_1, E)$;

16. $(D_1, E); (D_1, E)$ и 18. $(E, E); (E, E)$

Для пар 13 и 18 биправильность таких разбиений вытекает из предложения 3.

Для пары 14 имеются два варианта групп симметрий неполной короны:

1) Пусть $S_1(Q) = D_1$. В работе [2] дана классификация разбиений сферы на равные треугольники. В разбиении с нашими условиями легко видеть, что полная корона также имеет группу $S_1^*(Q) = D_1$, что противоречит условию $S_1^*(Q) = E$.

2) Пусть $S_1(Q) = E$. Для соответствующих разбиений из [2] имеем тройки групп симметрий $(D_1, D_1, D_1), (D_1, E, E)$, биправильность которых очевидна из предложения 3.

Для пары (16). Среди разбиений [2] нет соответствующих разбиений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dolbilin N.P., *Which clusters can form a crystal?*, Volume «Voronoi's impact on modern science», book 2, Kyiv (1998) 96 – 104.

[2] Алексенцева С.А., *Классификация разбиений сферы на конгруэнтные треугольники.* МГУ, М. 2004, 31 с., рукопись деп. в ВИНИТИ 05.10.2004 № 1559 – В2004.

[3] Коломейкина Е.В., *Локальные условия правильности разбиения евклидовой сферы.* Чебышевский сборник (2005), Т. 6 вып. 2(14), с. 184 – 195.

МГТУ им. Н. Э. Баумана
Поступило 02.09.2010