ловиям: 1) $\dim C_X \leqslant 1$ *и* 2) *при некотором простом* p *группа* C_X *не содержит элементов порядка* p.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть группа* X *такова, что* Y – *связная компактная группа,* $A \in \mathfrak{N}(X)$. *Тогда* $\Gamma_A(X) \subset D(X)$.

Пусть p — простое число. Если $p \neq 2$, то положим

$$a_0 = p^2,\ a_1 = \ldots = a_{n_1} = 1,\quad a_{n_1+1} = \ldots = a_{n_1+n_2} = 2,\quad n = p^2,$$
$$n_1 = n - 2[n/3],\ n_2 = [n/3],\ s = n_1 + n_2,\quad A_p = \{a_j\}_{j=0}^{s}.$$

Если же $p = 2$, то положим

$$a_0 = 16,\ a_1 = \ldots = a_{10} = 1,\ a_{11} = a_{12} = 3,\quad A_2 = \{a_j\}_{j=0}^{12}.$$

Лемма 4. *Пусть* X – *произвольная группа,* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$. *Тогда существует такой элемент* $x \in X$, *что* $\sigma(\mu * E_x) \subset G$, *где* $G \approx R^m + K$, *группа* K *компактна и* $K^{(p)} = K$.

Лемма 5. *Пусть* p – *простое число, группа* X *такова, что* $X^{(p)} = X$, $Y^{(p)} = Y$ *и* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$. *Тогда множество* $E = \{y \in Y\colon \hat{\mu}(y) \neq 0\}$ – *открытая подгруппа в* Y.

Лемма 6. *Пусть* p – *простое число, а группа* X *такова, что* $X^{(p)} = X$, $Y^{(p)} = Y$ *и* $\dim C_X \leqslant 1$. *Тогда если* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$ *и* $\hat{\mu}(y) \neq 0$ *при любом* $y \in Y$, *то* $\mu \in K(X)$.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
14 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с. 2. *Партасарати К.Р., Ранга Рао Р., Варадхан С.Р.С.* Сб. пер.: Математика, 1965, т. 9, № 2, с. 115–146. 3. *Shimizu R.* – Ann. Inst. Stat. Math., 1968, vol. 20, p. 187–209. 4. *Ramachandran B., Rao C.R.* – Sankhya. Ser. A, 1969, vol. 31.

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

© **В.П. ХАХЛЮТИН**

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ ВДОЛЬ СЕМЕЙСТВА ЛУЧЕЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОДНОМЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В R^n

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 30 V 1988)

Большую роль в современной технологии, медицине и физических исследованиях играют методы неразрушающего контроля и диагностики. Если ранее вполне удовлетворительными считались методы классической рентгеноскопии, то в настоящее время на практике приходят к необходимости получения более полной информации о пространственной структуре исследуемых объектов. Наиболее перспективными в этом отношении оказались методы, используемые в томографии. Как и в рентгеноскопии, в томографии используется информация о прохождении некоторого проникающего излучения сквозь исследуемый объект. Разница заключается лишь в количестве измеряемых проекций, что дает возможность получения более полной информации о поглощении излучения исследуемым веществом и, как следствие, о плотности этого вещества. Традиционная математическая модель определения коэффициента поглощения веществом монохроматического проникающего излучения без учета рассеяния приводит к известной плоской задаче Радона, и большинство реконструктивных алгоритмов томографии используют именно его формулу обращения [5]. Новые математические постановки подобных задач стали появляться в связи с развитием методов вычислительной томографии и поиском наиболее экономичных и технически простых способов решения возникающих в ней проблем. В частности, практический интерес представляет задача, приводимая ниже.

Похожая задача в несколько иной постановке была исследована в проективных пространствах И.М. Гельфандом с соавторами в работах [1, 2]. Изначально обращение преобразования Радона было получено сведением задачи к решению уравнения Абеля, однако технически проще и, вероятно, более естественно использовать связь преобразования Радона и других аналогичных ему преобразований с преобразованием Фурье. Именно эта идея положена в основу полученных результатов, тем более, что выражение преобразования Фурье функции через ее интегралы по линейным многообразиям позволяет использовать при численной реализации полученных алгоритмов методы быстрого преобразования Фурье.

В аффинном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с фиксированной системой координат и обычным скалярным произведением рассмотрим одномерное многообразие, задаваемое отображением a: $I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, и пространство функций $C_0^\infty(B(0,1))$, $B(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x|_{\mathbf{R}^n} = \|x - 0\|_{\mathbf{R}^n} < 1\}$. Определим так называемое лучевое преобразование соотношением

$$Du(a(s),\omega) = \int_0^\infty u(a(s)+t\omega)\,dt, \quad s \in I, \quad \omega \in S^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon \|x\|_{\mathbf{R}^n} = 1\},$$

$$g(s,\omega) = Du(a(s),\omega).$$

Для любого $\omega \in S^n$ обозначим: $l_\omega = \{x \in \mathbf{R}^n\colon (x,\omega)_{R^n} = 0\}$ – $(n-1)$-мерное подпространство в $\mathbf{R}^n$, ортогональное ω. Введем семейство отображений $A_\omega = \{a(x,s,t) = a(s) + tx\colon l_\omega \cap S^n \times I \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n\}$. Множество A_ω изоморфно S^n. Обозначим: $a((\xi_1,\xi_2)\times l_\omega)$ – образ $l_\omega \cap S^n \times (\xi_1,\xi_2)\times \mathbf{R}^+$, $(\xi_1,\xi_2) \subseteq I$, при отображении $a(x,s,t)$. Пусть для отображения $a(s)$ выполняется следующее

Условие 1. Для любого $\omega \in S^n$ существует интервал $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)) \subseteq I$ такой, что $a(s)$ дифференцируемо на $(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$, $a((\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))\times l_\omega) \supset B(0,1)$, причем $a'(s) \neq 0$, $a'(s) \notin l_\omega$, $s \in (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$.

В этом случае любое из семейства отображений $a(x,s,t)$, $x \in l_\omega \cap S^n$, $s \in (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega))$, $t \in \mathbf{R}^+$, осуществляет тривиальное накрытие шара $B(0,1)$, и из него возможно выделить один лист, на котором накрытие $a(x,s,t)$, $s \in (s_1(\omega), s_2(\omega)) \subseteq (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)) \subseteq I$, $x \in l_\omega \cap S^n$, $t \in \mathbf{R}^+$, будет неприводимо. Одновременно данное отображение порождает гладкое расслоение шара $B(0,1)$ со слоем $a(s) + x$, $s \in (s_1(\omega), s_2(\omega))$, $x \in l_\omega$ и базой $l_\omega \cap B(0,1)$. Легко установить равенства

$$(-i\xi)^{n-2}F[u]\,(\xi\cdot\omega) = (-i\xi)^{n-2}(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\xi(x,\omega)_{\mathbf{R}^n}}u(x)\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{s_1(\omega)}^{s_2(\omega)} e^{i\xi(a(s),\omega)_{\mathbf{R}^n}}\,dx \int_{l_\omega \cap S^n = S_x}\left(\omega^{n-2}, \nabla_x^{(n-2)}\left(g\left(s, \frac{x}{|x|_{\mathbf{R}^n}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times |x|_{\mathbf{R}^n}^{-1}\right)\right)_{R^n} |(a'(s),\omega)_{\mathbf{R}^n}| \cdot \|\omega^{n-2}\|_{\mathbf{R}^n}^{-2}\,dS_x, \quad \xi \in \mathbf{R}^+, \quad \omega \in S^n,$$

где

$$\nabla_x^{(k)} f(s,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} e_i, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad x^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i;$$

e_i, $i = 1, \ldots, n$, – фиксированный ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, причем

$$\int_{l_\omega \cap S^2 = S_x} g(x)\, dS_x = g(\omega^\perp) + g(-\omega^\perp), \quad \omega \perp \omega^\perp \in S^2.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, будем иметь:

1) в случае четных n

$$u(y) = (-1)^{n/2+1}(2\pi)^{-n} \times$$

$$\times \int_{S^n} d\omega \int_{l_\omega \cap S^n = S_x} dS_x \int_{s_1(\omega)}^{s_2(\omega)} (\omega^{n-2}, \nabla_x^{(n-2)}(g_s(s, x/|x|_{\mathbf{R}^n})\,|x|_{\mathbf{R}^n}^{-1}))_{\mathbf{R}^n} \times$$

$$\times \operatorname{sgn}(a'(s), \omega)_{\mathbf{R}^n} (a(s) - y, \omega)_{\mathbf{R}^n}^{-1} \| \omega^{n-2} \|_{\mathbf{R}^n}^{-2}\, ds;$$

2) в случае нечетных n

$$u(y) = (-1)^{(n+1)/2} \cdot 2^{-1}(2\pi)^{-(n-1)} \times$$

$$\times \int_{S^n} d\omega \int_{l_\omega \cap S^n = S_x} (\omega^{n-2}, \nabla_x^{(n-2)}(g_s(s(y,\omega), \times$$

$$\times x/|x|_{\mathbf{R}^n})\,|x|_{\mathbf{R}^n}^{-1}))_{\mathbf{R}^n} (a'(s(y,\omega)), \omega)_{\mathbf{R}^n}^{-1} \| \omega^{n-2} \|_{\mathbf{R}^n}^{-1}\, dS_x,$$

$$s(y,\omega) \in (s_1(\omega), s_2(\omega)), \quad (y - a(s(y,\omega)), \omega)_{\mathbf{R}^n} = 0.$$

Заметим, что рассматриваемая задача является слабо некорректной [3, 4]. Изложенный метод допускает очевидные обобщения на случай a: $Q \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Пользуясь формулой Парсеваля для преобразования Фурье, можно получить аналогичную формулу и для преобразования $Du(a, \omega)$ и тем самым определить лучевое преобразование распределений. Похожие формулы обращения могут быть получены и в этом случае. Однако все вводимые функциональные пространства будут существенно зависеть от конкретного вида отображения a: $Q \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Для того чтобы этого избежать, можно по аналогии с [1, 2] исследовать задачу в проективных пространствах $P(\mathbf{R}^n)$, но в этом случае теряется явная связь между многообразиями в $P(\mathbf{R}^n)$ и многообразием $a(Q)$.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Поступило 20 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г.* – Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 3, с. 12–19. 2. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Шапиро З.Я.* – Там же, 1970, т. 4, вып. 1, с. 14–32. 3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с. 4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с. 5. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.