Математические заметки

том 79 выпуск 1 январь 2006

УДК 517.5+511.36

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ МАЛЕРА

Ю. В. Нестеренко

Доказываются представления некоторых кратных интегралов, зависящих от комплексного параметра z, в виде многочленов от z и $\ln(1-z)$. Подобные тождества впервые использовал К. Малер в связи с доказательствами некоторых результатов теории трансцендентных чисел.

Библиография: 13 названий.

Введение. В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства функций, задаваемых интегралами

$$F(z)=\int_{[0,1]^m}\prod_{i=1}^{m}\frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_i\cdots x_m)^{c_i}}\,dx_1\cdots dx_m, \tag{1}$$

где a_i,b_i,c_i – фиксированные действительные числа. Будет предполагаться, что z – комплексное число, $|z|<1$, и $0<a_i<b_i$. Это обеспечивает сходимость. Интегралы такого вида используются в теории трансцендентных чисел для конструкции совместных диофантовых приближений к значениям гипергеометрических функций, в частности, логарифмической функции и бинома. С их помощью получаются также совместные приближения к значениям полилогарифмов и так называемых обобщенных полилогарифмов.

Пусть $\overline{s}=(s_1,\dots,s_m)$ – вектор с целыми положительными координатами. *Обобщенными полилогарифмами* будем называть функции, задаваемые следующими кратными рядами:

$$\mathrm{Li}_{\overline{s}}(z)=\sum_{n_1>\dots>n_m\geqslant 1}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}},\qquad \mathrm{Le}_{\overline{s}}(z)=\sum_{n_1\geqslant\dots\geqslant n_m\geqslant 1}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_m^{s_m}}.$$

При $m=1$ таким способом получаются классические полилогарифмы. Свойства обобщенных полилогарифмов изучались в статьях различных авторов (см. [1] для дальнейших ссылок). Функции каждого из семейств Li и Le линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, а линейные пространства над $\mathbb{Q}$, порождаемые этими семействами, совпадают. Явные

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

формулы, выражающие функции одного семейства через функции другого, указаны в [2, предложения 2 и 3].

При целых значениях параметров a_i, b_i, c_i интегралы вида (1), умноженные на некоторую степень переменной z, представляются в виде линейной комбинации обобщенных полилогарифмов с полиномиальными от z коэффициентами. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. В работе В.Н. Сорокина [3] для доказательства иррациональности числа $\zeta(3)$ при любом целом неотрицательном n устанавливается тождество

$$\begin{aligned} z^{2n+1} \int_{[0,1]^3} & \frac{\prod_{i=1}^3 x_i^n (1-x_i)^n}{(1-zx_2x_3)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &= A_0(z) + A_1(z)\operatorname{Le}_1(z) + A_2(z)\operatorname{Le}_{1,1}(z) + A_3(z)\operatorname{Le}_{2,1}(z), \end{aligned}$$

где $A_i(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степени не выше n. При этом интеграл сходится в точке $z=1$, и выполняются равенства $A_1(1) = A_2(1) = 0$. Поскольку $\operatorname{Le}_{2,1}(1) = 2\zeta(3)$, таким способом получаются рациональные приближения Апери к $\zeta(3)$.

Пример 2. Для оценки меры трансцендентности числа π^2 Сорокин в работе [4] доказывает, что

$$\begin{aligned} z^{(r+1)(n+1)-1} & \int_{[0,1]^{2r}} \prod_{i=1}^{r} \frac{x_{2i-1}^{i(n+1)-1}(1-x_{2i-1})^n x_{2i}^{i(n+1)-1}(1-x_{2i})^n}{(1-zx_{2i-1}x_{2i}\cdots x_{2r-1}x_{2r})^{n+1}}\, dx_1 \cdots dx_{2r} \\ &= A_0(z) + \sum_{i=1}^{r}\bigl(A_i(z)\operatorname{Li}_{\{2\}_i}(z) + B_i(z)\operatorname{Li}_{1\{2\}_{i-1}}(z)\bigr), \end{aligned}$$

где $\{2\}_i = (2,\dots,2) \in \mathbb{Z}^i$, $A_i(z), B_i(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степени не выше n. При этом также выполняются равенства $B_i(1) = 0$.

Пример 3. В случае

$$c_2 = \cdots = c_m = 0, \quad 1 \leqslant a_1 \leqslant \dots a_m < b_m \leqslant \cdots \leqslant b_1, \quad a_1 \leqslant c_1 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$$

имеет место представление

$$\begin{aligned} z^{b_1-1} \int_{[0,1]^m} & \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\cdots x_m)^{c_1}}\, dx_1 \cdots dx_m \\ &= A_0(z) + A_1(z)\operatorname{Li}_1(z) + \cdots + A_m(z)\operatorname{Li}_m(z), \end{aligned}$$

где $A_k(z)$ – многочлены от z с рациональными коэффициентами, причем $\deg A_i(z) \leqslant b_1 - a_i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $\deg A_0(z) \leqslant b_1 - a_1 - 1$ (см. [5]). При специальном выборе $c_1 = (2r+1)n + 2$, $a_i = rn + 1$, $b_i = (r+1)n + 2$, где r – некоторое целое число, $1 \leqslant 2r+1 \leqslant m$, это тождество использовалось Т. Ривоалем в работе [6] для доказательства бесконечности множества иррациональных чисел в последовательности $\zeta(2k+1)$, $k = 1, 2, \dots$.

Пример 4. Следующее тождество найдено С.А. Злобиным [7]. Если параметры a_i, b_i, c_i – целые положительные числа с условиями

$$a_i < b_i, \qquad \sum_{j=m-i+1}^{m} (b_j - a_j - c_j) \geqslant 0, \qquad b_i \leqslant a_{i-1} + c_i$$

при всех возможных значениях индекса i, то

$$z^{b-1} F(z) = A_0(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k(z) \operatorname{Le}_{\{1\}_k}(z),$$

где $b = \max b_j$ и $A_k(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами, степени которых оцениваются некоторыми величинами, зависящими от параметров a_i, b_i, c_i.

Пример 5. Злобину принадлежит общий результат (см. [8], [7]). Пусть a_i, b_i, c_i – неотрицательные целые числа с условиями

$$b_i > a_i > 0, \qquad \sum_{i=k}^{m} (b_i - a_i - c_i) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Обозначим $a = \min a_i$, $b = \max b_i$. В этих условиях функция $z^{b-1}F(z)$ может быть представлена в виде линейной формы от 1 и обобщенных полилогарифмов $\operatorname{Le}_{\overline{s}}(z)$, $\overline{s} = (s_1, \dots, s_l)$, где l не превосходит количества положительных чисел среди c_i, и выполняется неравенство $s_1 + \dots + s_l \leqslant m$. Коэффициенты этой линейной формы есть многочлены с рациональными коэффициентами, степень которых не превосходит $b - a - 1$.

Примеры 1–4 показывают, что последнее утверждение не всегда точно отражает реальное положение вещей. Вместе с тем, знание того, какие полилогарифмы действительно входят в линейную форму, а также того, каковы действительные величины степеней многочленов $A_j(z)$, весьма важно для теоретико-числовых приложений. Конечно, важны и арифметические характеристики многочленов – величина их коэффициентов и правильные оценки их общих знаменателей, но в настоящей статье мы не будем затрагивать арифметические вопросы.

Ниже будут установлены достаточно точные ограничения на параметры a_i, b_i, c_i, при которых интеграл (1) представим в виде линейной комбинации функций $\operatorname{Li}_{\{1\}_k}$.

1. Интегральное тождество Малера. Вероятно, первым частные интегралы вида (1) в связи с диофантовыми приближениями корней из рациональных чисел стал рассматривать в 1931 г. К. Малер (см. [9]). Впрочем, его интегралы отличались от (1) и могут быть получены из них заменой переменных $x_j = t_j/t_{j+1}$, $j = 1, \dots, m-1$, $x_m = t_m$; соответственно область интегрирования у Малера задавалась неравенствами $0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_m \leqslant 1$. В случае Малера интегралы (1) представлялись в виде линейных форм от биномиальных функций $(1-z)^{\omega_i}$ с показателями ω_i, не сравнимыми по модулю 1. Малер нашел также представление этих линейных форм в виде комплексных контурных интегралов. Формулы Малера воспроизведены в работе А. Бейкера [10], где они использовались для доказательства оценок снизу линейных форм с целыми коэффициентами от корней из алгебраических чисел. Аналогичные формулы для экспоненциальной функции вместо бинома можно найти в работе Малера [11].

В этом пункте будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\omega_0,\dots,\omega_m\in\mathbb{C}$ *и* $\rho_0,\dots,\rho_m$ *– целые положительные числа. Тогда для любого* $z\in\mathbb{C}$, $|\arg(1-z)|<\pi$, *справедливо тождество*

$$\frac{(-z)^{\rho_0+\dots+\rho_m-1}}{\prod_{j=0}^m\Gamma(\rho_j)}\int_{[0,1]^m}\prod_{j=1}^m\frac{x_j^{\rho_0+\dots+\rho_{j-1}-1}(1-x_j)^{\rho_j-1}}{(1-zx_j\cdots x_m)^{\rho_j+\omega_j-\omega_{j-1}}}\,dx_1\cdots dx_m$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{j=0}^m\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}(1-z)^{\zeta-\omega_m}\,d\zeta, \qquad (2)$$

где $(1-z)^\zeta=e^{\zeta\log(1-z)}$ *и* $\log(1-z)=\log|1-z|+i\arg(1-z)$, *другие комплексные степени* $1-z$ *определяются точно так же, а* C *– гладкий замкнутый контур, однократно обходящий в положительном направлении все точки* $\omega_j+\sigma$, $0\leqslant\sigma<\rho_j$, $\sigma\in\mathbb{Z}$. *В случае* $m=0$ *интеграл в левой части считается равным* 1.

Это утверждение в случае $\omega_h-\omega_k\notin\mathbb{Z}$ и с точностью до замены переменных в кратном интеграле по существу было доказано в 1931 г. Малером [9]. Ясно, что общий случай может быть получен с помощью аналитического продолжения по переменным ω_h. Малер доказал, что оба интеграла в левой и правой части (2) равны линейным формам от биномов $(1-z)^{\omega_h}$, коэффициенты при которых суть многочлены от z степени ρ_h-1, и эти линейные формы являются приближениями Паде для указанной совокупности биномов. Единственность приближения Паде означала совпадение этих линейных форм, а следовательно, и интегралов.

Оба интегральных представления использовались Малером для выяснения различных аналитических и арифметических свойств построенных линейных форм. Но в случае $\omega_j\in\mathbb{Z}$ применялся только комплексный интеграл.

Обозначим $v_j=\rho_j+\omega_j$, $j=0,1,\dots,m$. Можно считать, что интегралы, присутствующие в теореме 1, являются функциями параметров ω_j, v_j.

Следствие 1. *Кратный интеграл* (2) *не меняется при сдвиге всех параметров* ω_j *на одно и то же произвольное число. Будучи умноженным на* $(1-z)^{\omega_m}$, *он не меняется, как при любой перестановке параметров* ω_j, *так и при любой перестановке параметров* v_j, *при которой вновь полученные интегралы сходятся.*

Доказательство. Первое утверждение следует из определения кратного интеграла (2). Будучи умноженным на $(1-z)^{\omega_m}$ комплексный интеграл в (2), очевидно, симметричен относительно двух групп переменных v_j и ω_j. Это доказывает второе утверждение.

Заметим, что комплексный интеграл в правой части (2), умноженный на $(1-z)^{\omega_m}$, может быть представлен как G-функция Мейера

$$G^{0,m+1}_{m+1,m+1}\left(\begin{matrix}\omega_0+\rho_0,\dots,\omega_m+\rho_m\\ \omega_0,\quad\dots,\quad\omega_m\end{matrix}\;\middle|\;1-z\right)$$

(см. [12]). Такая форма записи в связи с построением приближений Эрмита–Паде для биномов и степеней логарифмов использовалась Х. Ягером (см. [13, части IV и VI]).

Предположим, что все параметры ω_j суть целые числа. В дальнейшем удобно использовать обозначения $\mathcal{T}_j=[\omega_j,\omega_j+\rho_j-1]$, $0\leqslant j\leqslant m$, для отрезков действительной прямой и $\mathcal{T}=\bigcup_{j=0}^m\mathcal{T}_j$. Пусть также для каждого $l\in\mathbb{Z}$ символ $d(l)$ обозначает количество отрезков $\mathcal{T}_j$, содержащих точку l.

Следствие 2. *Если все параметры $\omega_0,\dots,\omega_m$ суть целые числа, причем $\omega_j \geqslant \omega_m = 0$, $j = 0,1,\dots,m-1$, то кратный интеграл в* (2) *равен*

$$\sum_{k=0}^{d-1} A_k(z)\log^k(1-z), \qquad A_k(z)\in\mathbb{Q}[z],$$

где $d = \max_{l\in\mathcal{T}} d(l)$. При этом степень многочлена $A_k(z)$ не превосходит максимального из чисел l множества $\mathcal{T}$ с условием $d(l)\geqslant k+1$, а кратность, с которой этот многочлен обращается в нуль в точке $z=1$, не меньше минимального из чисел l с тем же условием.

Доказательство. Для рациональной функции

$$R(\zeta)=\prod_{j=0}^{m}\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}=\frac{1}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)\cdots(\zeta-\omega_j)}$$

справедливо представление

$$R(\zeta)=\prod_{j\in\mathcal{T}}\frac{1}{(\zeta-j)^{d(j)}}.$$

Согласно теореме о вычетах комплексный интеграл в правой части равенства (2) равен

$$\begin{aligned}
\sum_{l\in\mathcal{T}}\operatorname{Res}_{\zeta=l}\bigl(R(\zeta)(1-z)^{\zeta}\bigr)&=\sum_{l\in\mathcal{T}}\Biggl(\prod_{\substack{j\in\mathcal{T}\\ j\neq l}}(\zeta-j)^{-d(j)}(1-z)^{\zeta}\Biggr)^{(d(l)-1)}_{\zeta=l}\\
&=\sum_{l\in\mathcal{T}}\sum_{k=0}^{d(l)-1}\binom{d(l)-1}{k}(1-z)^{l}\log^k(1-z)\Biggl(\prod_{\substack{j\in\mathcal{T}\\ j\neq l}}(\zeta-j)^{-d(j)}\Biggr)^{(d(l)-1-k)}_{\zeta=l}\\
&=\sum_{k=0}^{d-1}A_k(z)\log^k(1-z),
\end{aligned}$$

где $d=\max_{l\in\mathcal{T}} d(l)$ и

$$A_k(z)=\sum_{\substack{l\in\mathcal{T}\\ d(l)\geqslant k+1}}\gamma_{l,k}(1-z)^{l}, \qquad \gamma_{l,k}\in\mathbb{Q}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Для доказательства теоремы 1 понадобятся две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть n – целое неотрицательное число, $f(z)$ – функция, непрерывная в окрестности точки $z=0$, и*

$$g(z)=z^{n+1}\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}f(zx)\,dx.$$

Тогда $g^{(n+1)}(z)=f(z)$.

Доказательство. При $n \geqslant 0$ справедливо представление

$$g(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} f(t)\,dt, \tag{3}$$

из которого следует нужное утверждение при $n = 0$. Дифференцируя (3) при $n \geqslant 1$, получаем равенство

$$g'(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt,$$

позволяющее индукцией по n вывести необходимое утверждение и в общем случае.

Пусть $a_i, b_i \in \mathbb{Z}, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$, причем $b_i > a_i > 0$. Определим для каждого целого r, $1 \leqslant r \leqslant m$, функцию

$$F_r(z) = \frac{z^{b_r-1}}{\prod_{j=1}^r \Gamma(b_j - a_j)} \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r \frac{x_j^{a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1 - z x_j \cdots x_r)^{c_j}}\, dx_1 \cdots dx_r \tag{4}$$

и положим также $F_0(z) = 1$. Здесь считается, что $z \in \mathbb{C}$, $|\arg(1-z)| < \pi$, и комплексные степени определяются с условием указанного ранее соглашения. Для краткости буквой D будем обозначать символ производной d/dz.

Лемма 2. *Во введенных выше обозначениях выполняется равенство*

$$D^{b_r-a_r} F_r(z) = \frac{z^{a_r-b_{r-1}}}{(1-z)^{c_r}} \cdot F_{r-1}(z), \qquad r = 1, \dots, m,$$

где считается $b_0 = 1$.

Доказательство. Из определения функций $F_j(z)$ находим тождество

$$F_r(z) = z^{b_r-a_r} \int_0^1 \frac{(1-x_r)^{b_r-a_r-1}}{(b_r-a_r-1)!} \frac{(zx_r)^{a_r-b_{r-1}}}{(1-zx_r)^{c_r}} F_{r-1}(zx_r)dx_r,$$

из которого в силу леммы 1 следует утверждаемое равенство.

Доказательство теоремы 1. Докажем тождество (2) индукцией по m. При $m = 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\zeta - \omega_0 - \rho_0 + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_0 + 1)}(1-z)^{\zeta-\omega_0}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1-z)^{\zeta-\omega_0}}{\prod_{\sigma=0}^{\rho_0-1}(\zeta-\omega_0-\sigma)}\,d\zeta$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\rho_0-1} \frac{(1-z)^\sigma(-1)^{\rho_0-1-\sigma}}{\sigma!(\rho_0-1-\sigma)!} = \frac{(-1)^{\rho_0-1}}{(\rho_0-1)!}\sum_{\sigma=0}^{\rho_0-1}\binom{\rho_0-1}{\sigma}(z-1)^\sigma = \frac{(-z)^{\rho_0-1}}{(\rho_0-1)!}.$$

Получившееся выражение совпадает с левой частью (2) при $m = 0$.

Пусть теперь $m \geqslant 1$ и для кратных интегралов размерности меньшей m утверждение теоремы доказано. Определим функции $F_r(z)$, как это указано ранее, выбрав параметры следующим образом:

$$a_j = \rho_0 + \dots + \rho_{j-1}, \quad b_j = \rho_0 + \dots + \rho_j, \quad c_j = \rho_j + \omega_j - \omega_{j-1}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Тогда, очевидно, левая часть равенства (2) имеет вид $(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_m-1}F_m(z)$.

Определим теперь функции

$$I_r(z)=\frac{(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_r-1}}{2\pi i}\int_C\prod_{j=0}^{r}\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}(1-z)^{\zeta-\omega_m}\,d\zeta$$

для $0\leqslant r<m$. Тогда равенство (2) принимает вид $F_m(z)=I_m(z)$.

Дифференцируя функцию $I_m(z)$ под знаком интеграла, находим

$$\begin{aligned}D^{\rho_m}I_m(z)&=\frac{(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_{m-1}-1}}{2\pi i}\int_C\prod_{j=0}^{m-1}\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}(1-z)^{\zeta-\omega_m-\rho_m}\,d\zeta\\&=\frac{1}{(1-z)^{\rho_m+\omega_m-\omega_{m-1}}}I_{m-1}(z).\end{aligned}$$

В точности такое же соотношение

$$D^{\rho_m}F_m(z)=\frac{1}{(1-z)^{\rho_m+\omega_m-\omega_{m-1}}}F_{m-1}(z)$$

получается, если к функциям $F_m(z)$ и $F_{m-1}(z)$ применить лемму 2. По предположению индукции выполняется равенство $F_{m-1}(z)=I_{m-1}(z)$, откуда следует $D^{\rho_m}F_m(z)=D^{\rho_m}I_m(z)$, т.е. разность $F_m(z)-I_m(z)$ есть многочлен степени меньшей ρ_m.

Согласно определению $F_m(z)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ord}_{z=0}F_m(z)\geqslant\rho_0+\dots+\rho_m-1.$$

Докажем, что и для функции $I_m(z)$ выполняется такая же оценка кратности нуля в начале координат. Если z достаточно мало (малость зависит от контура C), то

$$(1-z)^{\zeta-\omega_m}=e^{(\zeta-\omega_m)\log(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-\omega_m)^n}{n!}(\log(1-z))^n,$$

и последний ряд равномерно сходится на C. Поэтому

$$I_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log(1-z))^n}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_C(\zeta-\omega_m)^n\cdot\prod_{j=0}^{m}\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}\,d\zeta.\qquad(5)$$

Учитывая, что

$$(\zeta-\omega_m)^n\cdot\prod_{j=0}^{m}\frac{\Gamma(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}{\Gamma(\zeta-\omega_j+1)}=\frac{(\zeta-\omega_m)^n}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta-\omega_j)\cdots(\zeta-\omega_j-\rho_j+1)}$$

есть рациональная функция, имеющая в ∞ нуль порядка $\rho_0+\dots+\rho_m-n$, заключаем, что в сумме (5) все слагаемые с $n\leqslant\rho_0+\dots+\rho_m-2$ равны нулю. Это в силу равенства $\operatorname{ord}_{z=0}\log(1-z)=1$ завершает доказательство оценки для кратности нуля $I_m(z)$ и доказывает тем самым равенство $F_m(z)=I_m(z)$. Теорема 1 доказана.

2. Линейные формы от степеней логарифмов. Кратные интегралы в тождестве Малера имеют вид (1) при $b_j = a_{j+1}$. Ниже будет доказан аналог следствия 2 при менее ограничительных предположениях о параметрах a_i, b_i, c_i.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_0(z) = 1, \qquad f_k(z) = \frac{1}{k!}(-\log(1-z))^k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Эти функции связаны между собой соотношениями

$$f_k'(z) = \frac{1}{1-z} f_{k-1}(z). \tag{6}$$

Легко проверить, что $\mathrm{Li}_{\{1\}_k}(z) = f_k(z)$.

Теорема 2. *Пусть $a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m$ – такие целые числа, что*

$$1 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \dots \leqslant a_m < b_m, \qquad c_i \leqslant b_i - a_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Тогда в области $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, справедливо тождество

$$\frac{z^{b_m - 1}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)} \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i - 1}(1-x)^{b_i - a_i - 1}}{(1 - zx_i \cdots x_m)^{c_i}} \, dx_1 \cdots dx_m = \sum_{j=0}^d A_j(z) f_j(z),$$

где d не превосходит количества положительных чисел в наборе c_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, а многочлены $A_j(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $0 \leqslant j \leqslant d$, удовлетворяют условиям

$$\deg A_j(z) \leqslant b_m - \min_{0 \leqslant k \leqslant m} \biggl(a_k + \sum_{i=k+1}^m c_i\biggr) - 1, \qquad \operatorname{ord}_{z=1} A_j(z) \geqslant \sum_{i=m+1-j}^m (b_i - a_i - c_i). \tag{8}$$

Здесь предполагается, что a_0 и пустая сумма в последнем неравенстве равны 0. Неравенства $0 < a_j < b_j$ нужны для обеспечения сходимости кратного интеграла.

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть a, b, c, h – целые числа,*

$$0 < a < b, \quad c \leqslant b - a, \quad h \geqslant 0.$$

Тогда в области $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется тождество

$$\frac{z^{b-1}}{(b-a-1)!} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}}{(1-zx)^c} f_h(zx) \, dx = \sum_{k=0}^{h+1} A_k(z) f_k(z),$$

где $A_k(z) \in \mathbb{Q}[z]$, причем

$$\deg A_{h+1}(z) \leqslant b - a - 1, \qquad \deg A_k(z) \leqslant b - \min(a, c) - 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant h,$$
$$\operatorname{ord}_{z=1} A_k(z) \geqslant b - a - c, \quad 1 \leqslant k \leqslant h + 1.$$

При $c \leqslant 0$ многочлен $A_{h+1}(z)$ равен 0.

Для доказательства этого утверждения понадобятся две леммы.

Лемма 3. *При любом целом $r \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$f_k^{(r)}(z) = \frac{1}{(1-z)^r} \sum_{j=0}^{k} c(k,r,j) f_j(z),$$

где $c(k,r,j)$ – некоторые целые числа. При $r \geqslant 1$ суммирование можно вести только до $k-1$.

Доказательство. Лемма легко доказывается индукцией по r. При $r=0$ равенство, очевидно, выполняется. Шаг индукции проверяется с помощью (6) и простых вычислений:

$$\begin{aligned} f_k^{(r+1)}(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(1-z)^r} \sum_{j=0}^{k} c(k,r,j) f_j(z)\right) \\ &= \frac{1}{(1-z)^{r+1}} \sum_{j=0}^{k} (rc(k,r,j) + c(k,r,j+1)) f_j(z). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $c(k,r,k+1)=0$. Соотношение (9) доказывает лемму.

Доказательство предложения 1. В дальнейшем будем считать, что целые числа a, b, c, h удовлетворяют всем условиям предложения.

Определим два линейных пространства $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ над полем рациональных чисел. Пространство $\mathfrak{L}_1$ состоит из функций

$$\sum_{k=0}^{h} B_k(z) f_k(z), \qquad B_k(z) \in \mathbb{Q}[z], \quad \deg B_k(z) \leqslant \max(a,c) - 1,$$

а пространство $\mathfrak{L}_2$ из функций

$$\sum_{k=0}^{h+1} A_k(z) f_k(z), \qquad A_k(z) \in \mathbb{Q}[z],$$

$$\deg A_{h+1}(z) \leqslant b - a - 1, \qquad \deg A_k(z) \leqslant b - \min(a,c) - 1, \quad k = 0, \dots, h, \tag{10}$$

$$\operatorname{ord}_{z=1} A_j(z) \geqslant b - a - c, \quad j = 1, \dots, h+1, \tag{11}$$

$$\operatorname{ord}_{z=1} A_0(z) \geqslant b - a - \min(0,c). \tag{12}$$

Заметим, что при $c \leqslant 0$ многочлен $A_{h+1}(z)$ у каждого элемента из $\mathfrak{L}_2$ равен 0.

Функция $\log(1-z)$ трансцендентна, поэтому $\dim \mathfrak{L}_1 = (h+1)\max(a,c)$. Для того, чтобы вычислить размерность линейного пространства $\mathfrak{L}_2$, заметим, что совокупность многочленов $P \in \mathbb{Q}[z]$ с условиями $\deg P \leqslant u - 1$, $\operatorname{ord}_{z=1} P \geqslant v$, где u, v – целые числа, есть линейное пространство размерности $\max(0, u-v)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{L}_2 &= h\max(a,c) + \max(0, a - \min(a,c) + \min(0,c)) + \max(0,c) \\ &= h\max(a,c) + \max(\max(0,c), \max(a,c)) = (h+1)\max(a,c) = \dim \mathfrak{L}_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon f(z) \mapsto (1-z)^c f^{(b-a)}(z),$$

определенное на $b-a$ раз дифференцируемых функциях. Так как ядро отображения φ состоит из многочленов степени не выше $b-a-1$, а все многочлены из $\mathfrak{L}_2 \cap \mathbb{Q}[z]$ имеют в точке $z=1$ нуль кратности не меньше $b-a-\min(0,c)$, то $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \mathfrak{L}_2 = (0)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\varphi(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_1.$$

Поясним сначала, как из этой леммы следует предложение 1. Обозначим

$$G(z) = \frac{z^{b-1}}{(b-a-1)!}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}}{(1-zx)^c} f_h(zx)\,dx.$$

Согласно лемме 1 выполняется равенство

$$G^{(b-a)}(z) = \frac{z^{a-1}}{(1-z)^c} f_h(z).$$

Оно может быть также переписано в виде

$$\varphi(G(z)) = z^{a-1} f_h(z) \in \mathfrak{L}_1.$$

По лемме 4 найдется функция $f(z) \in \mathfrak{L}_2$, для которой

$$\varphi(f(z)) = z^{a-1} f_h(z)$$

и, значит, $G(z) - f(z) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Учитывая, что $\operatorname{Ker}(\varphi)$ состоит из многочленов степени не выше $b-a-1 \leqslant b - \min(a,c) - 1$, находим, что функция $G(z)$ представима в виде, утверждаемом предложением 1.

Доказательство леммы 4. Достаточно доказать включение $\varphi(\mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{L}_1$; нужное равенство следует из этого включения, равенства размерностей пространств $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ (см. (13)) и $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \mathfrak{L}_2 = (0)$.

В силу линейности отображения φ для доказательства включения достаточно проверить, что

$$\varphi((1-z)^k) \in \mathfrak{L}_1, \qquad b-a-\min(0,c) \leqslant k \leqslant b - \min(a,c) - 1, \tag{14}$$

$$\varphi((1-z)^k f_i(z)) \in \mathfrak{L}_1, \qquad b-a-c \leqslant k \leqslant b - \min(a,c) - 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant h, \tag{15}$$

$$\varphi((1-z)^k f_{h+1}(z)) \in \mathfrak{L}_1, \qquad b-a-c \leqslant k \leqslant b-a-1. \tag{16}$$

Включение (14) выполняется, поскольку

$$\varphi((1-z)^k) = (-1)^{b-a}\frac{k!}{(k-b+a)!}(1-z)^{k-(b-a-c)}$$

есть многочлен степени не выше $b - \min(a,c) - 1 - (b-a-c) = \max(a,c) - 1$.

Включения (15) и (16) также проверяются непосредственным вычислением. Применяя правило Лейбница, находим

$$\varphi((1-z)^k f_i(z)) = \sum_{r=0}^{b-a} (-1)^r \binom{b-a}{r} \frac{k!}{(k-r)!}(1-z)^{c+k-r} f_i^{(b-a-r)}(z), \tag{17}$$

причем в последней сумме также должно выполняться неравенство $r \leqslant k$. Применяя к производным функции $f_i(z)$ представление из леммы 3 и пользуясь в случае (15) неравенствами $b-a-c \leqslant k \leqslant b-\min(a,c)-1$, легко получаем, что правая часть (17) есть линейная комбинация функций $f_0(z), \dots, f_i(z)$, $i \leqslant h$, с коэффициентами – многочленами от z степени не выше $\max(a,c)-1$. Это доказывает включение (15).

В случае (16) должно выполняться неравенство $c \geqslant 1$. Кроме того, имеем $r \leqslant k \leqslant b-a-1$. Поэтому порядок производных функции $f_{h+1}(z)$ в сумме (17) будет не меньше 1. Значит, согласно лемме 3 правая часть (17) будет линейной комбинацией функций $f_0(z), \dots, f_h(z)$. Неравенства $b-a-c \leqslant k \leqslant b-a-1$, как и в предыдущем случае, показывают, что коэффициенты этой линейной комбинации будут многочленами степени не выше $c-1 \leqslant \max(a,c)-1$. Это доказывает включение (16).

Таким образом, лемма 4, а вместе с ней и предложение 1, доказаны.

Доказательство теоремы 2. Напомним, что левая часть тождества из теоремы 2 обозначалась ранее как $F_m(z)$. Для доказательства мы воспользуемся индукцией по m.

При $m=1$ согласно предложению 1 (при $a=a_1, b=b_1, c=c_1, h=0$) выполняется тождество
$$F_1(z) = A_0(z) + A_1(z) f_1(z),$$
где многочлены с рациональными коэффициентами $A_0(z), A_1(z)$ удовлетворяют условиям
$$\deg A_0(z) \leqslant b_1 - c_1 - 1, \quad \deg A_1(z) \leqslant b_1 - a_1 - 1, \quad \operatorname{ord}_{z=1} A_1(z) \geqslant b_1 - a_1 - c_1.$$
Отсюда следует (8) при $m=1$.

При $c_1 \leqslant 0$ согласно предложению 1 имеем $A_1(z)=0$; в этом случае $d=0$, что согласуется с утверждением теоремы 2. Итак, при $m=1$ утверждение теоремы выполняется.

Далее будем считать, что $m \geqslant 2$ и для интеграла $F_{m-1}(z)$ (см. (4)) утверждение справедливо. В силу (4) имеет место соотношение
$$F_m(z) = \frac{z^{b_m - b_{m-1}}}{\Gamma(b_m - a_m)} \int_0^1 \frac{x^{a_m - b_{m-1}} (1-x)^{b_m - a_m - 1}}{(1-zx)^{c_m}} F_{m-1}(zx)\, dx. \tag{18}$$
Согласно индуктивному предположению
$$F_{m-1}(z) = \sum_{h=0}^{q} B_h(z) f_h(z),$$
где q есть количество положительных чисел среди $c_1, \dots, c_{m-1}$, а многочлены с рациональными коэффициентами $B_h(z)$ удовлетворяют условиям
$$\deg B_h(z) \leqslant b_{m-1} - \min_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^{m-1} c_i \right) - 1, \tag{19}$$
$$\operatorname{ord}_{z=1} B_h(z) \geqslant \sum_{i=m-h}^{m-1} (b_i - a_i - c_i). \tag{20}$$

Другими словами, функция $F_{m-1}(z)$ представима как сумма слагаемых вида

$$(1-z)^k f_h(z), \tag{21}$$

где параметры h, k удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant h \leqslant q, \qquad \sum_{i=m-h}^{m-1}(b_i-a_i-c_i) \leqslant k \leqslant b_{m-1} - \min_{0\leqslant k\leqslant m-1}\left(a_k+\sum_{i=k+1}^{m-1}c_i\right)-1. \tag{22}$$

Докажем, что при любых параметрах h, k, удовлетворяющих (22), функция

$$H(z)=\frac{z^{b_m-b_{m-1}}}{\Gamma(b_m-a_m)}\int_0^1\frac{x^{a_m-b_{m-1}}(1-x)^{b_m-a_m-1}}{(1-zx)^{c_m-k}}f_h(zx)\,dx \tag{23}$$

представима в виде

$$H(z)=\sum_{j=0}^{h+1}C_j(z)f_j(z), \tag{24}$$

где многочлены $C_j(z)\in\mathbb{Q}[z]$ удовлетворяют условиям (8). Применим предложение 1 к интегралу (23), выбрав $a=a_m-b_{m-1}+1$, $b=b_m-b_{m-1}+1$, $c=c_m-k$. Согласно этому предложению имеет место тождество (24). Для многочлена $C_{h+1}(z)$ справедливо неравенство

$$\deg C_{h+1}(z)\leqslant b-a-1=b_m-a_m-1\leqslant b_m-\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(a_k+\sum_{i=k+1}^{m}c_i\right)-1. \tag{25}$$

Если $0\leqslant j\leqslant h$, то по предложению 1 и в соответствии с (22) имеем

$$\begin{aligned}\deg C_j(z)&\leqslant b-\min(a,c)-1=b_m-\min(a_m,c_m+b_{m-1}-k-1)-1\\&\leqslant b_m-\min\left(a_m,c_m+\min_{0\leqslant k\leqslant m-1}\left(a_k+\sum_{i=k+1}^{m-1}c_i\right)\right)-1\\&=b_m-\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(a_k+\sum_{i=k+1}^{m}c_i\right)-1.\end{aligned} \tag{26}$$

Далее, при $1\leqslant j\leqslant h+1$, пользуясь (22) и предложением 1, находим

$$\operatorname{ord}_{z=1}C_j(z)\geqslant b-a-c=b_m-a_m-c_m+k\geqslant\sum_{i=m-h}^{m}(b_i-a_i-c_i)\geqslant\sum_{i=m+1-j}^{m}(b_i-a_i-c_i). \tag{27}$$

Неравенства (25)–(27) означают справедливость (8) в тождестве из теоремы 2.

При $c_m>0$ неравенство $h\leqslant q$ означает, что $h+1$ не превосходит количества положительных среди чисел $c_1,\dots,c_m$. Если $c_m\leqslant 0$, то при любом k выполняется $c_m-k\leqslant 0$, так что согласно предложению 1 в равенстве (24) выполняется $C_{h+1}(z)=0$. Это значит, что параметр d в теореме не превосходит q. Доказательство теоремы 2 этим завершается.

Настоящие результаты были получены во время моего пребывания в Университете г. Кёльна. Этому университету, а также профессору Петеру Бундшу, я хотел бы выразить мою глубокую благодарность за гостеприимство и творческую атмосферу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Зудилин В. В. Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений // УМН. 2003. Т. 58. №1. С. 3–32.

[2] Уланский Е. А. Тождества для обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №4. С. 613–624.

[3] Сорокин В. Н. О теореме Апери // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. №3. С. 48–53.

[4] Сорокин В. Н. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. №12. С. 87–120.

[5] Нестеренко Ю. В. Интегральные тождества и конструкции совместных приближений к значениям дзета-функции Римана // Труды IV Международной конференции “Современные проблемы теории чисел и ее приложения” (г. Тула, 2001 г.). М.: Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 2002. С. 115–132.

[6] Rivoal T. La fonction zéta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270.

[7] Злобин С. А. Разложения кратных интегралов в линейные формы // Докл. РАН. 2004. Т. 398. №5. С. 595–598.

[8] Злобин С. А. Интегралы, представимые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №5. С. 782–787.

[9] Mahler K. Ein Beweis des Thue–Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen // Math. Ann. 1931. V. 105. P. 267–276.

[10] Baker A. Simultaneous rational approximations to certain algebraic numbers // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1967. V. 63. P. 693–702.

[11] Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1932. V. 166. P. 118–150.

[12] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

[13] Jager H. A multidimensional generalization of the Pade table // Indag. Math. 1964. V. 26. P. 193–249.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nester@orc.ru

Поступило
27.12.2004