С. В. Климов, Симплектические многообразия, определяемые подгруппами группы струй диффеоморфизмов вещественной плоскости,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 151–152

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПОДГРУППАМИ ГРУППЫ СТРУЙ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

С. В. Климов

Рассмотрим пространство $P_{n,m}$ полиномиальных отображений $\mathbb{R}^n$ в себя, задаваемых вектором полиномов $p(t)=(p^{(1)}(t),p^{(2)}(t),\dots,p^{(n)}(t))$ вида

$$p^{(i)}(t)=t_i+\sum_{j_1+\dots+j_n\leqslant m}x^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}t_1^{j_1}\cdots t_n^{j_n}.$$

Общее количество коэффициентов в отображении $p(t)\in P_{n,m}$ равно $N=N(n,m)=n(C^n_{n+m}-n-1)$. Положим $p(t)=p_x(t)=p_x$, где $x\in\mathbb{R}^N$ – набор коэффициентов отображения p_x. Тогда если $p_x,p_y\in P_{n,m}$, то m-струя их композиции $p_y(p_x)$ является полиномиальным отображением того же вида. Следовательно, определена групповая операция $*\colon\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N\colon z=x*y$, где $p_z=p_y(p_x)$. Пусть $\Gamma_N\subset\mathbb{R}^N$ – стандартная целочисленная решетка. Тогда факторпространство относительно правых сдвигов $M^N=\mathbb{R}^N/\Gamma_N$ является замкнутым компактным N-мерным многообразием. Многообразия M^N были введены в [1], где показано, что при $n=1$ они дают дифференциально-геометрическую реализацию важной серии симплектических нильмногообразий из [2]. Симплектическая структура на M^N при $n=1$ была задана в [1] при помощи формы кривизны связности расслоения $M^{N+1}\to M^N$.

Основной целью настоящей работы является построение серий симплектических нильмногообразий, являющихся подмногообразиями многообразий M^N, которые, как оказалось, при $n\geqslant 2$, $m\geqslant 3$ не являются симплектическими.

Рассмотрим в M^N следующие подмногообразия. Пусть $A=(A^{(1)},\dots,A^{(n)})$ – набор множеств нижних индексов $(j_1,\dots,j_n)$. Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{P}_{n,m}$ группы $P_{n,m}$ подпространство $\mathfrak{P}_{n,m}(A)$, линейно порожденное векторами $\xi^{(k)}_{j_1,\dots,j_n}$, $(j_1,\dots,j_n)\in A^{(k)}$, $k=1,\dots,n$, где $\{\xi^{(k)}_{j_1,\dots,j_n}\}$ – канонический базис алгебры Ли левоинвариантных векторных полей на $P_{n,m}$. Мы будем рассматривать те наборы A, для которых подпространства $\mathfrak{P}_{n,m}(A)$ являются подалгебрами в $\mathfrak{P}_{n,m}$. Соответствующие им подгруппы в $P_{n,m}$ определяют многообразия $M(A)$.

Скажем, что многообразия $M(A_1),M(A_2),\dots,M(A_t),\dots$ образуют серию, если они соответствуют сколь угодно длинной цепочке множеств $A_1\subset\dots\subset A_t\subset\cdots$, при этом каждому A_i соответствует подалгебра $\mathfrak{P}_{n,m_i}(A)$ в $\mathfrak{P}_{n,m_i}$ для некоторого m_i.

Назовем серии, соответствующие цепочкам $A_1\subset A_2\subset\cdots$ и $\widehat{A}_1\subset\widehat{A}_2\subset\cdots$, эквивалентными, если найдутся такие s, t, что для всех $i\geqslant 1$ существует изоморфизм касательных алгебр $\phi_i\colon\mathfrak{P}_{n,m_{s+i}}(A_{s+i}\setminus A_s)\to\mathfrak{P}_{n,\widehat{m}_{t+i}}(\widehat{A}_{t+i}\setminus\widehat{A}_t)$.

Назовем типом многообразия $M(A)$ вектор $(a_1,\dots,a_{m-1})$, где a_i – количество мультииндексов $(j_1,\dots,j_n)$ в A таких, что $j_1+\dots+j_n=i+1$. Пусть в типе $M(A)$ ненулевыми компонентами являются $a_{i_1},\dots,a_{i_t}$, $i_1\leqslant\dots\leqslant i_t$. Обозначим через N_1 количество мультииндексов $(j_1,\dots,j_n)$ в A таких, что $d\omega^{(l)}_{j_1,\dots,j_n}=0$, а через N_k, $k=2,\dots,t$, – таких, что $j_1+\dots+j_n=i_k+1$, $(j_1,\dots,j_n)\in A^{(l)}$ и $d\omega^{(l)}_{j_1,\dots,j_n}\neq 0$. Здесь $\omega^{(l)}_{j_1,\dots,j_n}$ – каноническая базисная левоинвариантная форма на алгебре Ли $\mathfrak{M}(A)$.

Лемма 1. *Для симплектического многообразия $M(A)$ выполнены следующие неравенства*:

$$N_1\geqslant N_t,\quad N_1+N_2\geqslant N_t+N_{t-1},\quad \dots,\quad N_1+\dots+N_{[t/2]}\geqslant N_t+\dots+N_{t-[t/2]+1}.$$

Теорема 2. *При $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 3$ на многообразии M^N не существует симплектической формы.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1, так как для многообразий M^N, как легко видеть, $N_1 = 6$, $N_i = 2(i+2)$, $i \geqslant 2$.

Введем следующие множества индексов $A_t = A^{(1)} \cup A^{(2)}$ и соответствующие им 2-формы. Во всех случаях $j = 1, 2, \dots, t$; $k \in \mathbb{N}$ фиксировано.

1) $A^{(1)} = \{(1, jk), (i, jk-i+1)\}$, $A^{(2)} = \varnothing$; $d\omega^{(1)}_{i,(t+s+1)k-i+1}$.

2) $t-s$ четно.

$A^{(1)} = \{(2, jk-1), (0, jk+1)\}_{j \equiv 1 \bmod 2} \cup \{(1, jk)\}_{j \equiv 0 \bmod 2}$, $A^{(2)} = \{(0, jk+1)\}_{j \equiv 0 \bmod 2}$; $d\omega^{(1)}_{1,(t+s+1)k}$.

3) $A^{(1)} = \{(j(i-1)+1, j(k+1-i))\}$, $A^{(2)} = \{(j(i-1), j(k+1-i)+1)\}$; $d\omega^{(1)}_{(t+s+1)(i-1)+1,(t+s+1)(k+1-i)}$.

4) $A^{(1)} = \{(i, jk+1-i)\}_{j \equiv 0 \bmod p} \cup \{(i, jk+1-i), (1, jk)\}_{j \not\equiv 0 \bmod p}$, $A^{(2)} = \{(0, jk+1)\}_{j \equiv 0 \bmod p}$ (p фиксировано); $d\omega^{(1)}_{i,(t+s+1)k-i+1}$.

Далее везде $t-s$ нечетно.

5) $A^{(1)} = \{(i, (j-1)k/2+l-i+1)\}_{j \equiv 1 \bmod 2} \cup \{(1, jk/2)\}_{j \equiv 0 \bmod 2}$, $A^{(2)} = \varnothing$; $d\omega^{(1)}_{i,(t+s)k/2+l-i+1}$ (l фиксировано, $1 \leqslant l \leqslant k-1$).

6) $A^{(1)} = \{(i, (j-1)k/2+l-i+1)\}_{j \equiv 1 \bmod 2} \cup \{(1, jk/2)\}_{j \equiv 0 \bmod 2, j \not\equiv 0 \bmod 2p}$, $A^{(2)} = \{(0, jk/2+1)\}_{j \equiv 0 \bmod 2p}$ (p и l фиксированы, $1 \leqslant l \leqslant k-1$); $d\omega^{(1)}_{i,(t+s)k/2+l-i+1}$.

7) $A^{(1)} = \{(j(i-1)+1, j(k-i+1))\}$, $A^{(2)} = \varnothing$; $d\omega^{(1)}_{(t+s+1)(i-1)+1,(t+s+1)(k+1-i)}$.

Положим $A_0 = \varnothing$.

Теорема 3. 1) *При $n = 2$ нильмногообразия $M(A_t \setminus A_s)$, $s = 0, 1, \dots, t-1$, соответствующие приведенным выше множествам индексов, являются симплектическими и образуют серии; приведенные выше формы вида $d\omega^{(r)}_{p,q}$ являются симплектическими формами на $M(A_t \setminus A_s)$ и представляют собой формы кривизны связности расслоений*

$$M(A_t^{(r)} \setminus A_s^{(r)} \cup (p,q), A_t^{(3-r)} \setminus A_s^{(3-r)}) \to M(A_t \setminus A_s),$$

при этом $(p, q) \in A^{(r)}_{s+t+1}$.

2) *При $n = 2$ каждая нетривиальная серия симплектических нильмногообразий вида $M(A)$ эквивалентна одной из приведенных выше.*

Автор выражает благодарность В. М. Бухштаберу за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. М. Бухштабер // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 161–162. [**2**] I. K. Babenko, I. A. Taimanov. On nonformal simply connected symplectic manifolds // SFB 288, Preprint 358, 1998.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.09.2001