В. С. Балаганский, Дифференцируемость по Фреше функции расстояния и структура множества,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 725–734

https://www.mathnet.ru/mzm4196

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО ФРЕШЕ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ И СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА

В. С. Балаганский

Исследуется вопрос о строении замкнутых множеств M в банаховом пространстве X при условии на множество точек, в которых функция расстояния $d(\cdot, M)$ недифференцируема по Фреше. Доказано, что в сильно выпуклом гладком пространстве замкнутое множество, у которого функция расстояния недифференцируема по Фреше на множестве мощности меньше мощности континуума, представимо в виде выпуклого замкнутого тела без объединения открытых попарно непересекающихся шаров, принадлежащих этому телу. В качестве следствия этого результата доказана выпуклость чебышевского множества в сильно выпуклом пространстве с нормой, дифференцируемой по Фреше, при условии, что множество точек разрыва метрической проекции имеет мощность меньше мощности континуума. Второе утверждение было ранее доказано (иным методом) автором [1] для гильбертова пространства, теперь же оно оказывается справедливым в пространствах $L_p(S, \Sigma, \mu)$ при $1 < p < \infty$.

Определения и обозначения. Всюду в статье X — вещественное банахово пространство, $M \subset X$ — непустое замкнутое множество, $C = C(M)$ — дополнение M, X^* — пространство, сопряженное к X; для $x, y \in X$, $xy = \| x - y \|$, $xM = d(x, M) = \inf\{xy\colon y \in M\}$, $V(x, r) = \{z \in X\colon xz \leqslant r\}$, $\overset{0}{V}(x, r) = \{z \in X\colon xz < r\}$, $S(x, r) = \{z \in X\colon xz = r\}$, $S =$

$= S(0, 1)$, $S^* = \{f \in X^*: \|f\| = 1\}$; $\overset{0}{M} = \operatorname{int} M$ — множество внутренних точек M; $\overline{N}$ — замыкание N; $\partial N = \overline{N} \setminus \overset{0}{N}$ — граница N; $\overline{\operatorname{co}} M$ — замкнутая выпуклая оболочка множества M, $\varphi(x) = xM$ — функция расстояния до множества M; $C^b = C^b(M) = \{x \in X: xM > b\}$, $Q^b = Q^b(M) = \{x \in X: \quad x M \geqslant b\}$, $\quad M_b = \{x \in X: xM \leqslant b\}$ — b-расширение M.

Метрической проекцией на множество M называется отображение P_M, ставящее в соответствие точке $x \in X$ множество $P_M(x) = \{z \in M: xz = xM\}$; если $P_M(x)$ непусто (соответственно одноточечно) для любого $x \in X$, то M называется *множеством существования* (соответственно *чебышевским множеством*). Положим $T_M = \{x \in X: P_M(x)$ одноточечно$\}$, $E_M = \{x \in X: P_M(x) \neq \varnothing\}$, $AK(M)$ — множество точек $x \in X$ таких, что соотношения $y_n \in M$, $\lim\limits_{n\to\infty} xy_n = xM$ влекут существование подпоследовательности y_{n_k}, сходящейся к элементу из M; $T'_M = T_M \cap AK(M)$.

Множество M называется *телом*, если $M = \overline{\overset{0}{M}}$. Выпуклое тело M называется *гладким*, если для любого $x \in \partial M$ существует единственная опорная к M в x гиперплоскость. Множество M называется *солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ найдется $y \in P_M(x)$, $y \in P_M((1 - \lambda) y + \lambda x)$ при $\lambda \geqslant 0$.

Пусть $G(x, h) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t}$ — первая вариация по направлению h функции расстояния; $\Gamma_M = \{x \in X: \forall h \in X \ \exists G(x, h)\}$ — множество точек пространства, в которых φ имеет первую вариацию по любому направлению; $G_M = \{x \in \Gamma_M: G(x, h) = f(h) \ \forall h \in X, \|h\| = 1, f \in X^*\}$ — множество точек, где φ имеет производную Гато f (φ дифференцируема по Гато); $F_M = \{x \in \Gamma_M$: предел $G(x, h)$ равномерен по $h \in X$, $\|h\| = 1$, и равен $f(h)$, где $f \in X^*\}$ — множество точек, где φ имеет производную Фреше f (дифференцируема по Фреше); производную f (Гато и Фреше) в точке x будем обозначать $d\varphi(x)$.

В статье встречаются следующие классы банаховых пространств (см. [2—5] и приведенную там литературу):

(Rf) — класс рефлексивных пространств;

(R) — класс строго выпуклых пространств (т. е. таких, что единичная сфера S не содержит отрезков);

(S) — класс гладких пространств (в каждой точке сферы существует единственная опорная гиперплоскость);

(UR) — класс равномерно выпуклых пространств (соотношения $x_n \in S$, $y_n \in S$, $\| x_n + y_n \| \to 2$ влекут $\| x_n - y_n \| \to 0$);

(LUR) — класс локально равномерно выпуклых пространств (соотношения $x \in S$, $y_n \in S$, $\| x + y_n \| \to 2$ влекут $y_n \to x$);

$(CLUR)$ — класс пространств, в которых соотношения $x \in S$, $y_n \in S$, $\| x + y_n \| \to 2$ влекут существование сходящейся подпоследовательности y_{n_k};

(D) — класс пространств, в которых соотношения $x_n \in S$, $f \in S^*$, $f(x_n) \to 1$ влекут сходимость последовательности x_n (сильно выпуклые пространства);

(CD) — класс пространств, в которых соотношения $x_n \in S$, $f \in S^*$, $f(x_n) \to 1$ влекут существование сходящейся подпоследовательности x_{n_k} (пространства Ефимова — Стечкина);

(F) — класс пространств с нормой, дифференцируемой по Фреше в каждой точке $x \in S$.

Известно следующее соотношение, доказанное В. Л. Шмульяном [6]:

$$X \in (D) \Leftrightarrow X^* \in (F).$$

В дальнейшем будем использовать следующие факты.

ТЕОРЕМА А. *Для* $X \in (D)$ *и* $M \subset X$ *множество* $X \setminus T'_M$ *имеет первую категорию.*

ТЕОРЕМА Б. *Для* $X \in (D)$ (*соответственно* $X \in (CD)$) *и* $M \subset X$ *выполняется включение* $F_M \subset T'_M$ (*соответственно* $F_M \subset AK(M)$).

ТЕОРЕМА В. *Для* $X \in (F)$ *и* $M \subset X$ *выполняется включение* $T'_M \setminus M \subset F_M$.

Теорема А является следствием результатов С. В. Конягина [3] о том, что в $X \in (D)$ для $M \subset X$ множество точек $x \in X$, у которых $\operatorname{card}(P_M(x)) \geqslant 2$ является множеством первой категории, и К.-С. Лау [7] о том, что в $X \in (CD)$ для $M \subset X$ множество $X \setminus AK(M)$ является множеством первой категории. Теоремы Б и В доказаны в [8].

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* $M \subset X$, $b > 0$. *Тогда* (а) *если* $zM = b$, $x \in P_M(z)$, *то* $z \in P_{Q^b}(x)$;

(б) *если* $x \notin Q^b$, $z \in P_{Q^b}(x)$, *то* $zM = b$;

(в) *если* $x \notin Q^b$, $z \in P_{Q^b}(x)$, $z \in G_M$, $d\varphi(z) = f \in X^* \setminus \{0\}$, $H = \{y \in X\colon f(y) = f(z)\}$, *то* $z \in P_H(x)$.

Доказательство. (а) Для любого $u \in Q^b$ справедливо $ux \geqslant uM \geqslant b = zM = zx$, следовательно, $z \in P_{Q^b}(x)$.

(б) Имеем $[x, z) \cap Q^b = \varnothing$, следовательно, $z \in \partial(Q^b)$ и $zM = b$.

(в) Допустим противное. Тогда найдется точка $y \in V(x, xz)$ такая, что гиперплоскость H строго разделяет x и y. Имеем $[z, y] \subset V(x, xz)$, $[z, x] \subset V(x, xz)$, $V(x, xz) \subset M_b$, $z \in G_M$, следовательно, $f(y - z) = \lim\limits_{t\to 0} [\varphi(z + t(y - z)) - \varphi(z)]/t \leqslant 0$ и $f(x - z) = \lim\limits_{t\to 0} [\varphi(z + t(x - z)) - \varphi(z)]/t \leqslant 0$, тогда $f(x) \leqslant f(z)$ и $f(y) \leqslant f(z)$, но H должно строго разделять x и y, противоречие.

Следующая лемма является следствием более общего утверждения о выпуклых функциях, приведенного, например, в [9, с. 29].

ЛЕММА 2. *Пусть* $M \subset X$, $C(M)$ (*или* M) *выпукло*, $x_0 \in C(M)$, $x_0M < \sup\limits_{x\in X} xM$. *Тогда, если функция* φ *имеет первую вариацию в точке* x_0, *то выпуклое тело* $\{x \in X\colon xM \geqslant x_0M\}$ (*соответственно* $\{x \in X\colon xM \leqslant x_0M\}$) *имеет в точке* x_0 *единственную опорную гиперплоскость.*

Замечание 1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, в $X = l_2$ для множества $M = \overline{X \setminus N_b}$, где $N = \overline{co}\,\{V(1, 0, 0, \ldots),\ 1/2) \cup \{x \in X\colon\ x_1 = 0,\ \sum_{n=2}^{\infty} nx_n^2 \leqslant 1\}\}$, $b = 1$, в точке 0 существует единственная опорная гиперплоскость к $\{x \in X\colon xM \geqslant 1\}$, но нет первой вариации по направлению $(1, 0, 0, \ldots)$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $X \in (D)$, $0 \leqslant c < b < \sup\{xM\colon x \in X\}$, $\partial(Q^b) \subset F_M$. *Тогда*

(а) *если* $x \notin \operatorname{int} Q^b$, $z \in P_{Q^b}(x)$, $zx \leqslant b$, *то* $x \in [z, y]$, *где* $y = P_M(z)$;

(б) *если* C^c *связно*, *то при* $c > 0$ $(\overline{C^c}) = (Q^b)_{b-c}$, $C^c = \operatorname{int}(Q^b)_{b-c}$, *а при* $c = 0$ $C^c = C \subset \operatorname{int}(Q^b)_b$;

(в) *если* C *связно*, $x \in F_M$, $0 < xM < b$, *то найдется* $z \in Q^b$ *такое, что* $P_M(z)$ *одноточечно и* $x \in [z, P_M(z)]$;

(г) *если* C *связно и выполняется одно из трех следующих условий*: $X \in (LUR)$ *и* M — *множество существования*,

$X \in (UR)$, *C выпукло, то*

$$C \setminus C^b \subset \{x \in X : \exists z \in T'_M \cap Q^b,\ x \in [z, P_M(z)]\}.$$

Доказательство. (а) Имеем $z \in P_{Q^b}(x) \subset \subset \partial(Q^b) \subset F_M$. По теореме Б $z \in T'_M$. Пусть $y = P_M(z)$. По лемме 1(а) и (б) $z \in P_{Q^b}(y)$. Очевидно, можно считать $x \notin Q^b$. Как установлено в доказательстве теоремы 10 [10], см. также [8], $\| d\varphi(z) \| = 1$, обозначим $d\varphi(z) = f \in \in X^* \setminus \{0\}$. По лемме 1(в) для гиперплоскости $H = \{v \in \in X : f(v) = f(z)\}$ $x, y \in P_H^{-1}(z)$. Из соотношений $X \in \in (D) \subset (R)$ следует, что z, x, y лежат на прямой $P_H^{-1}(z)$. Для любого $u \in (z, x] \cup (z, y]$ $u \notin Q^b$, значит, $\varphi(u) < < \varphi(z)$. Но $z \in F_M$, $d\varphi(z) \neq 0$, тогда случай $z \in (x, y]$ невозможен, следовательно, $x \in [y, z]$ ввиду $zx \leqslant b$.

(б) Докажем, что $(Q^b)_{b-c} \subset (\overline{C^c})$, а при $c > > 0$ $\operatorname{int}(Q^b)_{b-c} \subset C^c$. Известно, что $\forall N \subset X$ $\forall r > 0$ справедливо равенство

$$N_r = \overline{\{z \in X : zN < r\}}. \tag{1}$$

Из (1), неравенства $b \leqslant uQ^b + uM$ $\forall u \in X$ и того, что $b - c > 0$, получаем $(Q^b)_{b-c} = \overline{\{u \in X : uQ^b < b - c\}} \subset \subset \overline{\{u \in X : uM > c\}} = (\overline{C^c})$, $(Q^b)_{b-c} \subset (\overline{C^c})$. Отсюда в силу (1) получаем для $c > 0$, что

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(Q^b)_{b-c} \subset \operatorname{int}(\overline{C^c}) \subset \operatorname{int}\{z \in X : zM \geqslant c\} = \\ = \operatorname{int}\{X \setminus \{z \in X : zM < c\}\} = \\ = \operatorname{int}\{X \setminus \overline{\{z \in X : zM < c\}}\} = X \setminus M_c = C^c. \end{aligned}$$

Пусть W — граница замкнутого тела $(Q^b)_{b-c}$. Если $W = \varnothing$, то $(Q^b)_{b-c} = X$, и ввиду $(Q^b)_{b-c} \subset (\overline{C^c})$ имеем $(\overline{C^c}) = (Q^b)_{b-c}$. Пусть $x_0 \in W$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число такое, что $V(x_0, \varepsilon) \cap Q^b = \varnothing$. Так как $(Q^b)_{b-c}$ — тело, то найдется точка $x \in T'_{Q^b} \cap V(x_0, \varepsilon) \cap (Q^b)_{b-c}$. Пусть $z = P_{Q^b}(x)$; тогда $xz \leqslant b - c \leqslant b$, следовательно, по (а) $x \in [z, y]$, где $y = P_M(z)$. Имеем $xz = xQ^b \geqslant x_0Q^b - \varepsilon = b - c - \varepsilon$, $xM = xy = zy - xz \leqslant c + \varepsilon$, а так как $x_0 \in (Q^b)_{b-c} \subset Q^c$, то $x_0M = c$ и $W \subset M_c$. Отсюда $W \cap C^c = \varnothing$, поэтому

$$C^c = [(\operatorname{int}(Q^b)_{b-c} \cap C^c] \cup [C^c \setminus (Q^b)_{b-c}]. \tag{2}$$

В силу связности $C^c \subset Q^b \neq \varnothing$ из (2) получаем, что $C^c = (\mathrm{int}\,(Q^b)_{b-c}) \cap C^c$, $C^c \subset \mathrm{int}\,(Q^b)_{b-c}$. Учитывая, что обратное включение при $c > 0$ доказано ранее, получаем (б).

(в) По (б) $x \in C \subset \bar{C} \subset (Q^b)_b$, C открыто, следовательно, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $V(x, \varepsilon) \subset (Q^b)_b$. По теореме Б $x \in T'_M$. Пусть $y = P_M(x)$, $x_n \in T'_M \cap T'_{Q^b} \cap V(x, \varepsilon)$, $x_n \to x$. Обозначим $z_n = P_{Q^b}(x_n)$, $y_n = P_M(z_n)$. Так как $z_n x_n = x_n Q^b \leqslant b$, то по (а) $x_n \in [z_n, y_n]$, следовательно, $y_n = P_M(x_n)$. Имеем $x_n \to x$, $y_n \to y$, следовательно, $z_n \to z \in Q^b$. Очевидно, что $y = P_M(z)$, $x \in [z, y]$.

(г) По (б) $C \subset (Q^b)_b$. Пусть $x \in C \setminus C^b$. Если $x \in \partial(Q^b)$, то по теореме Б $x \in T'_M$ и все доказано. Считаем, что $x \notin Q^b$. В случае, когда C выпукло, Q^b будет выпуклым телом по лемме 2 [1]. Пусть $z = P_{Q^b}(x)$, по (а) $x \in [z, P_M(z)]$, по теореме Б $z \in T'_M$.

Пусть $X \in (LUR)$, M — множество существования, $y \in P_M(x)$. Выберем $x_n \to (x + y)/2 = u$, $x_n \in T'_M \cap T'_{Q^b} \cap C$, $z_n = P_{Q^b}(x_n)$, $y_n = P_M(z_n)$, так что в силу (а) $x_n \in [y_n, z_n]$, $y_n = P_M(x_n)$. Имеем $x_n y_n = x_n M \to uM = uy$, $|uy_n - uy| \leqslant |x_n y_n - uy| + x_n u \to 0$, $xy \leqslant xy_n \leqslant xu + uy_n \to xy$. Считая $x = 0$, $\|y\| = 1$ и обозначая $w_n = 2y_n - y$, получим, что $\|w_n\| = 2uy_n \to 1$, $\|w_n + y\|/2 = \|y_n\| = 1$, в силу $X \in (LUR)$ $w_n \to y$, $y_n \to y$, тогда $z_n \to z \in \partial(Q^b) \subset F_M$, $y \in P_M(z)$, $x \in [y, z]$, $z \in T'_M$.

В случае $X \in (UR)$ возьмем такие же x_n, z_n, y_n, как и в предыдущем случае, но потребуем, чтобы $x_n \to x$. Можно считать без потери общности, что $z_n y_n \to 1$, $x_n y_n \to h = xy$, $0 < h < 1$. Возьмем произвольно малое $\delta > 0$, найдется номер n_1 такой, что для любых $n, k \geqslant n_1$ $x_n x_k \leqslant \delta/2$. Имеем $0 \leqslant x_n y_k - x_n y_n \leqslant x_n x_k + |x_k y_k - x_n y_n| = x_n x_k + |x_n M - x_k M| \leqslant 2x_n x_k \leqslant \delta$ и далее, используя полученное неравенство, находим $z_n y_n \leqslant z_n y_k \leqslant z_n x_n + x_n y_k \leqslant z_n y_n + \delta$.

Так как δ произвольно мало, а в $X \in (UR)$, как показано в [11], см. также [2, с. 11], диаметр множества $V(x, xy + \delta) \setminus \overset{0}{V}(z, zy)$ при $\delta \to +0$ стремится к 0 равномерно по всем x, y, z, удовлетворяющим условиям $x \in [z, y]$, $zy = 1$, $xy = h$, то последовательности y_n, а следовательно, и z_n — сходящиеся. Как и в предыдущем случае, $z_n \to z \in T'_M \cap Q^b$, $x \in [z, P_M(z)]$.

ЛЕММА 4. *Пусть дополнение множества $M \subset X$ непусто, $b_0 = \sup_{x \in X} xM < \infty$; тогда $Q^{b_0} \cap E_M \cap \Gamma_M = \varnothing$, $Q^{b_0} \cap F_M = \varnothing$.*

Доказательство. В теоремах 9, 10 [10] фактически доказано, что для точки $x \in (E_M \cap \Gamma_M) \cup F_M$ найдется последовательность $v_n \to x$, $v_n \neq x$, с $(v_nM - xM)/v_nx \to 1$, что противоречит условию $x \in Q^{b_0}$ ввиду $v_nM \leqslant b_0 = xM$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $X \in (D)$, $M \subset X$, $C = X \setminus M$ связно,* card $(C \setminus F_M) < \mathfrak{c}$. *Тогда*

(а) *если $b_0 = \sup \{xM\colon x \in X\} < \infty$, то C — шар и $X \in (F)$;*

(б) *если $b_0 = \infty$ и $X \in (S)$, то M выпукло;*

(в) *если $b_0 = \infty$ и выполняется одно из трех условий: $X \in (UR)$, M — множество существования, C выпукло, то M — чебышевское солнце.*

Доказательство. Во всех случаях найдется последовательность b_n такая, что $0 < b_n < b_{n+1}$, $b_n \to b_0$, $\{x \in X\colon xM = b_n\} \subset F_M \cap C$ при $n = 1, 2, \ldots$ Для любого $x \in F_M \cap C$, $xM < b_0$, по лемме 3 (в) для $b_n > xM$ найдется $z_n \in \partial (Q^{b_n})$, $y = P_M(x) = P_M(z_n)$, $x \in [y, z]$.

(а) В этом случае $z_n \to z \in Q^{b_0} \neq \varnothing$, $x \in [z, P_M(z)]$, $z = P_{Q^{b_0}}(x)$ по лемме 1 (а).

Докажем, что Q^{b_0} связно. Допустим противное: $Q^{b_0} = N \cup K$, $N \cap K = \varnothing$, N и K замкнуты и непусты. Пусть $\mathscr{Y} = \{x \in C\colon xN = xK\}$, $\mathscr{N} = \{x \in C\colon xN < xK\}$, $\mathscr{K} = \{x \in C\colon xK < xN\}$. Множество $\mathscr{Y}$ замкнуто в C, $\mathscr{N}$ и $\mathscr{K}$ открыты, int $\mathscr{Y} = \varnothing$, в противном случае по теореме А найдется точка $z \in \mathscr{Y} \cap T'_{Q^{b_0}}$, следовательно, $zN = zK$ и $z \notin T'_{Q^{b_0}}$, и мы приходим к противоречию. Множество $C \setminus (\overline{\mathscr{N}} \cup \overline{\mathscr{K}}) \subset \mathscr{Y}$ открыто, int $\mathscr{Y} = \varnothing$, следовательно, $C \setminus (\overline{\mathscr{N}} \cup \overline{\mathscr{K}}) = \varnothing$ и $C \subset \overline{\mathscr{N}} \cup \overline{\mathscr{K}}$. Имеем $\mathscr{Y}_1 = \overline{\mathscr{N}} \cap \overline{\mathscr{K}} \cap C \neq \varnothing$, в противном случае $C = (C \setminus \overline{\mathscr{N}}) \cup (C \setminus \overline{\mathscr{K}})$, $(C \setminus \overline{\mathscr{N}}) \cap (C \setminus \overline{\mathscr{K}}) = \varnothing$, $C \setminus \overline{\mathscr{N}}$ и $C \setminus \overline{\mathscr{K}}$ открыты, противоречие со связностью C. Возьмем $x \in \mathscr{Y}_1$, $V(x, r) \subset C$, z, $y \in V(x, r)$, $z \in \mathscr{N}$, $y \in \mathscr{K}$, $V(z, \delta) \subset V(x, r)$, где $r > 0$, $\delta > 0$.

Тогда $\overline{co}\,(V(z, \delta) \cup \{y\}) \subset V(x, r) \subset C$, card $\{\overline{co}\,(V(z, \delta) \cup \{y\} \cap \mathscr{Y}_1\} \geqslant \mathfrak{c}$. По условию найдется некоторая точка $v \in \mathcal{Y}_1 \cap F_M$. По лемме 4 $Q^{b_0} \cap F_M = \varnothing$, следовательно, $vM < b_0$. По доказанному выше $P_{Q^{b_0}}(v) = u$ одноточечно и $v \in [u, P_M(u)]$. Можно считать без потери общности, что $u \in N$. Так как $\mathcal{K}$ открыто, а F_M плотно в C, то найдется последовательность $x_n \in \mathcal{K} \cap F_M$, $x_n \to v$. По доказанному выше $x_n \in [P_{Q^{b_0}}(x_n), P_M(P_{Q^{b_0}}(x_n))]$, $P_{Q^{b_0}}(x_n) \in K$ одноточечно. По теореме Б $P_M(x_n) \to P_M(v)$, следовательно, $P_{Q^{b_0}}(x_n) \to P_{Q^{b_0}}(v) = u \in N \cap K = \varnothing$, что невозможно.

Известно, что связное множество в банаховом пространстве или одноточечно, или имеет мощность не меньше $\mathfrak{c}$. По лемме 4(б) $Q^{b_0} \cap F_M = \varnothing$, следовательно, Q^{b_0} одноточечно, а так как F_M плотно в C, то C — шар и $X \in (F)$.

(б) Пусть $x \in C$ и $r > 0$ произвольны, $x_n \in F_M \cap C$, $x_n \to x$, $z_n \in Q^{b_n}$, $y_n = P_M(z_n)$, $x_n \in [z_n, y_n]$. Так как $x_n \to x$, то при $n > n_0$ $\exists v_n \in [z_n, y_n]$, $v_n y_n = v_n x_n + x_n y_n$, $v_n x = r$, $v_n M - x_n M \to r$. По определению, если для любых x и r существует последовательность v_n, удовлетворяющая двум последним условиям, то M есть γ-солнце, которое в гладком рефлексивном пространстве всегда выпукло [2, с. 38, следствие 3.5].

(в) В случаях $X \in (UR)$ и выпуклого C из леммы 3 следует, что и здесь M — множество существования. Возьмем $x \in C$, $x' \in [x, y] \cap F_M$, где $y \in P_M(x)$. По (в) леммы 3 найдутся $z_n \in Q^{b_n}$ такие, что $x' \in [z_n, P_M(z_n)]$ для $b_n > xM$. По условию $X \in (R)$, $x \in [z_n, P_M(z_n)]$ $P_M(z_n) = y_n = P_M(x)$ и $z_n \in \{P_M(x) + \lambda(x - P_M(x)) : \lambda \geqslant 0\}$, следовательно, M — чебышевское солнце.

В качестве следствия предыдущей теоремы и факта, что открытое множество представимо в виде объединения непересекающихся открытых связных компонент, получим следующую теорему (доказательство аналогично доказательству теоремы 3 [1]).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $X \in (D) \cap (S)$, $M \subset X$ — невыпуклое множество. Тогда $X \setminus F_M$ имеет мощность не меньше* $\mathfrak{c}$, *за исключением случая, когда $M = K \setminus \bigcup_{x \in C \setminus F_M} \overset{0}{V}_x$, где K — замкнутое выпуклое тело, $\{\overset{0}{V}_x\}$ — семейство (мощности меньше $\mathfrak{c}$) непересекающихся открытых шаров, содержащихся в K, с центрами в точках x.*

Следствие 1. *Пусть $X \in (D) \cap (F)$, $M \subset X$, $X \setminus M$ связно,* card $(X \setminus T'_M) < \mathfrak{c}$. *Тогда либо M выпукло, либо $X \setminus M$ — шар.*

Следствие вытекает из теорем B и 1.

В связи с теоремой A может представить интерес следующее утверждение, с помощью которого оценивается снизу мощность множества $X \setminus T'_M$.

Следствие 2. *Пусть $X \in (D) \cap (F)$, $M \subset X$ — невыпуклое множество. Тогда $X \setminus T'_M$ имеет мощность не меньше $\mathfrak{c}$, за исключением случая, когда M имеет вид $M = K \setminus \bigcup_{x \in X \setminus T_M} \overset{0}{V}_x$, где K — замкнутое выпуклое тело, $\{\overset{0}{V}_x\}$ — семейство непересекающихся открытых шаров (мощности меньше $\mathfrak{c}$), содержащихся в K.*

Следствие 2 доказывается применением теорем B и 2.

Следствие 3. *Пусть $X \in (D) \cap (F)$, $M \subset X$ — чебышевское множество. Если $\operatorname{card}(X \setminus T'_M) < \mathfrak{c}$, то M выпукло.*

Следствие 4. *Пусть $X \in (D) \cap (F)$, $M \subset X$ — чебышевское множество. Если множество точек разрыва метрической проекции на множество M имеет мощность меньше $\mathfrak{c}$, то M выпукло.*

Доказательство получаем из предыдущего следствия, факта (см. [12]), что в $X \in (LUR)$ для чебышевских множеств точки непрерывной метрической проекции P_M принадлежат множеству T'_M, и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если $X \in (D) \cap (F)$, то $X \in (LUR)$; если $X \in (CD) \cap (F)$, то $X \in (CLUR)$.*

Доказательство. Пусть $x_n \in S$, $x \in S$, $\| x_n + x \| \to 2$. Рассмотрим множество $M = X \setminus \overset{0}{V}(0, 2)$. Тогда для всех $z \in \overset{0}{V}(0, 2)$ $zM = 2 - \| z \|$, следовательно, в точке x дифференцируема по Фреше функция $d(\cdot, M)$. По теореме Б в первом случае $x \in T'_M$, а во втором случае $x \in AK(M)$. Тогда в силу соотношений $2x \in P_M(x)$, $xM = 1$, $\| x - (x + x_n) \| = 1$, $d(x + x_n, M) \to 0$ получаем, что в первом случае $x_n + x \to 2x$, $x_n \to x$, во втором случае существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} + x$, x_{n_k} также сходится.

Замечание. В теоремах 1, 2 условие $X \in (S)$ является существенным, без него утверждения теорем перестают быть верными. Например, в двумерном пространстве с единичным шаром $V = \{(x_1, x_2)\colon (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leqslant 8,\ (x_1 + 2)^2 + x_2^2 \leqslant 8\}$ для множества $M = \{(x_1, x_2)\colon x_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + 1}\}$.

В связи с доказанными утверждениями о выпуклости M отметим следующие результаты, принадлежащие Л. П. Власову, см. [10, теоремы 9, 10] и [2, теоремы 3.8—3.10]: если $X \in (CLUR) \cap (S)$, M — множество существования, $X \setminus M \subset \Gamma_M$ (или $X \setminus M \subset T'_M$), то M выпукло; если $X^* \in (R)$, $X \setminus M \subset F_M$ (или $X \setminus M \subset T'_M$), то M выпукло (позднее Фитцпатрик [8] опубликовал, в сущности, более слабые результаты). Условия на F_M, Γ_M, T'_M в настоящей работе ослаблены, но за счет ограничений на пространство.

В заключение заметим, что следствия 1—4 являются обобщениями соответствующих утверждений, ранее доказанных автором [1].

Институт математики
и механики Урал. Отд. АН СССР

Поступило
30.06.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Балаганский В. С. Аппроксимативные свойства множеств в гильбертовом пространстве // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 5. С. 785—800.
[2] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1971. Т. 28, вып. 6. С. 3—66.
[3] Конягин С. В. Аппроксимативные свойства замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризация сильно выпуклых пространств // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 2. С. 276—279.
[4] Cudia D. F. Rotundity. Proc. Symp. Pure Math. Providence. 1963. Vol. 7: Convexity. P. 73—97.
[5] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Киев: Вища школа, 1980.
[6] Шмульян В. Л. О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха // ДАН СССР. 1940. Т. 27, № 7. С. 643—648.
[7] Lau K.-S. On almost Chebyshev subsets in reflexive Banach spaces // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 27, № 5. P. 791—795.
[8] Fitzpatrick S. Metric projections and the differentiability of distance functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. V. 22, № 2. P. 291—312.
[9] Holmes R. B. Geometric functional analysis and applications // N. Y.: Springer, 1975.
[10] Власов Л. П. Несколько теорем о чебышевских множествах // Математические заметки. 1972. Т. 11, вып. 2. С. 135—144.
[11] Стечкин С. Б. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Math. pure et appl. 1963. V. 8. P. 5—18.
[12] Panda B. B., Kapoor O. P. Approximative compactness and continuity of metric projections // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 11, № 1. P. 47—55.