M. A. Lyalinov, Method of perturbations in vector electromagnetic problems of diffraction by a wedge, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 138–156

М. А. Лялинов

# МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ

## § 1. Введение

Задача дифракции плоской волны на клине является ключевой задачей в теории дифракции, так как асимптотика ее решения в дальней зоне позволяет построить коротковолновую асимптотику в тех случаях, когда точное решение неизвестно [1]. Фундаментальный результат для скалярной задачи дифракции в угловой области с импедансными граничными условиями был получен Г. Д. Малюжинцем [2]. В этой работе с использованием интегралов Зоммерфельда задача была сведена к системе функциональных уравнений для одной неизвестной функции и решена в замкнутой форме. В случае стандартного импедансного граничного условия электромагнитная задача дифракции может быть расщеплена на две скалярных задачи для ТМ и ТЕ поляризаций нормально падающей плоской волны и, следовательно, она решается точно. Если такое расщепление невозможно, решение становится более сложным. Задачи дифракции на клине с анизотропными поверхностными импедансами [3, 4] и дифракции наклонно падающей плоской волны на клине с покрытием [5] являются задачами такого типа. Каждая из задач может быть редуцирована к системе функциональных уравнений Малюжинца для пары неизвестных функций. Можно показать, что система функциональных уравнений преобразуется к матричной задаче Римана–Гильберта [6, 7], которая, вообще говоря, точно не решается. Мы не будем использовать такое преобразование; вместо этого система функциональных уравнений будет изучена непосредственно.

В последнее время был развит метод исследования функциональных уравнений [8], который основывается на теории сингулярных интегральных уравнений. Подход, применяемый в настоящей работе, отличается от приведенного в [8] и использует специфический характер рассматриваемых функциональных уравнений. В результате, мы получаем эффективное решение этих уравнений в форме рядов Неймана для слабой поверхностной анизотропии. Выведенные формулы позволяют построить равномерную по углу асимптотику дальнего поля [3]. Разрешимость задачи дифракции может быть изучена методами, предложенными в [9]. Мы исследуем дифракцию на клине [10], который является неограниченным рассеивателем. В этом случае подход, предложенный в настоящей работе, оказывается предпочтительным, так как специальный характер задачи эффективно используется.

В качестве важного примера мы рассматриваем задачу дифракции плоской волны, которая нормально падает на ребро клина с анизотропными поверхностными импедансами. Электромагнитное поле вне клина выражается через $E_z$ и $H_z$ компоненты, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и анизотропным импедансным граничным условиям на сторонах клина. В принципе, задача является двумерной, а смешивание поляризаций возникает из-за анизотропии поверхности. Функции $E_z$ и $H_z$ удовлетворяют условиям Майкснера и специальному условию на бесконечности. Классическое решение такой задачи единственно, и оно ищется в форме интегралов Зоммерфельда. Трансформанты Зоммерфельда, или спектральные функции, являются решениями системы функциональных уравнений Малюжинца. Исследование соответствующей системы функциональных уравнений сведением к системе линейных уравнений с ограниченным или компактным оператором является основным предметом исследования в данной работе. В случае слабой анизотропии, т.е. для специального соотношения элементов матрицы импедансов, выводится система уравнений со сжимающим оператором, и ее решение строится в форме сходящихся рядов Неймана.

## § 2. Постановка задачи и редукция к системе второго рода

Пусть вне угла с раскрытием $2\Phi$ (Рис. 1) введена полярная система координат $(r,\varphi)$. Предполагается, что полярная ось $OZ$ направлена вдоль ребра клина. Направление падения плоской волны

$$\begin{aligned} E_z^i &= D_1 \exp(-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)) \\ H_z^i &= D_2 \exp(-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)) \end{aligned} \tag{1}$$

ортогонально ребру клина. Электромагнитное поле выражается через компоненты $E_z$ и $H_z$, которые не зависят от $z$-координаты. Неизвестные $E_z$ и $H_z$ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta E_z + k^2 E_z &= 0, \\ \Delta H_z + k^2 H_z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и анизотропным импедансным граничным условиям

$$\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\left((-1)^{j+1}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\right)_{S_j} =$$
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left\{a^j_{11}\frac{i}{\omega\mu_0}\left((-1)^{j+1}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right) - a^j_{12}H_z\right\}_{S_j}, \quad j=1,2 \quad (3)$$

$$(E_z)_{S_j} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left\{a^j_{21}\frac{i}{\omega\mu_0}\left((-1)^{j+1}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}\right) - a^j_{22}H_z\right\}_{S_j}$$

на обеих сторонах $S_1$ и $S_2$ угда, где $\varepsilon_0$ и $\mu_0$ материальные постоянные вне угла, $\omega$ круговая частота, а элементы матрицы $\{a^j_{ik}\}$, $j=1,2$ определяются свойствами анизотропных покрытий клина [4]. Граничное условие (3) может быть переписано в более удобной форме

$$\begin{pmatrix} (-1)^{j+1}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} \\ (-1)^{j+1}\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} \end{pmatrix}_{S_j} = \begin{pmatrix} b^j_{11} & b^j_{12} \\ b^j_{21} & b^j_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix}_{S_j}, \quad j=1,2, \quad (4)$$

где матрица $B^j = \{b^j_{ik}\}^2_{i,k=1}$ условно называется матрицей анизотропного импеданса. Если $b_{12}=b_{21}=0$, рассматриваемая задача расщепляется на две независимых задачи для двух поляризаций, и классическое решение может быть построено в замкнутой форме. Равенство антидиагональных элементов матрицы $B^j$ нулю соответствует $a_{11}=a_{22}=0$ в граничном условии (3), то есть отсутствию анизотропии. Компоненты $E_z$ и $H_z$ должны удовлетворять условию Майкснера в вершине угла

$$E_z = Q_1 + O(r^\delta), \quad H_z = Q_2 + O(r^\delta), \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где $Q_1$, $Q_2$ и $\delta$ являются постоянными. Наконец, необходимо сформулировать условие на бесконечности ($r\to\infty$). Так как мы рассматриваем дифракцию плоской волны неограниченным рассеивателем, условие на бесконечности принимает вид

$$\begin{gathered}(E_z(r,\varphi) - E^i_z - E^g_z) \to 0, \\ (H_z(r,\varphi) - H^i_z - H^g_z) \to 0, \quad r\to\infty, \quad \operatorname{Im} k > 0,\end{gathered} \quad (6)$$

где $E^g_z$ и $H^g_z$ это плоские волны, отраженные от $S$ в соответствии с геометрической оптикой. Ниже мы покажем, что при $r\to\infty$ величины в условии (6) стремятся к нулю экспоненциально. Если

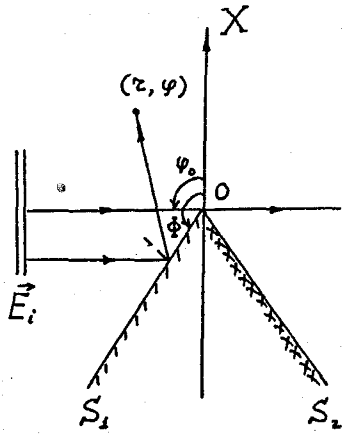


Рис. 1.

$\operatorname{Im} k = 0$, то решение задачи понимается в смысле принципа предельного поглощения.

Теперь мы обратимся к вопросу существования и единственности решения. Используя стандартный подход, основанный на формуле Грина, мы устанавливаем единственность классического решения.

**Предложение 1.** *Если мнимая часть матрицы анизотропного импеданса положительно определена*

$$\operatorname{Im} B^j > 0, \quad j = 1, 2 \tag{7}$$

*и, если классическое решение задачи* (1)–(6) *существует, то оно единственно.*

Естественно искать решение задачи (1)–(6) в форме интегралов Зоммерфельда

$$\begin{aligned} E_z(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\alpha+\varphi)e^{-ikr\cos\alpha}d\alpha \\ H_z(r,\varphi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\alpha+\varphi)e^{-ikr\cos\alpha}d\alpha, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\gamma$ известный контур Зоммерфельда (Рис. 2). Эти интегралы являются решениями уравнений Гельмгольца. Подставляя интегралы в граничные условия (3) и применяя теорему Малюжинца об обращении интегралов Зоммерфельда, мы получаем систему функциональных уравнений

$$
\begin{gathered}
(-1)^{j+1}\sin\alpha(f(\alpha-(-1)^j\Phi)+f(-\alpha-(-1)^j\Phi))+\\
+a^j_{12}(f(\alpha-(-1)^j\Phi)-f(-\alpha-(-1)^j\Phi))-\\
-(-1)^{j+1}a^j_{11}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\sin\alpha(g(\alpha-(-1)^j\Phi)-g(-\alpha-(-1)^j)\Phi))=0,\\
(-1)^{j+1}a^j_{21}\sin\alpha(g(\alpha-(-1)^j\Phi)+g(-\alpha-(-1)^j\Phi))+\\
+(g(\alpha-(-1)^j\Phi)-g(-\alpha-(-1)^j\Phi))-\\
-a^j_{22}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}(f(\alpha-(-1)^j\Phi)-f(-\alpha-(-1)^j)\Phi))=0. \qquad (9)
\end{gathered}
$$

Система функциональных уравнений (9) должна быть дополнена набором условий, определяющих класс функций. Эти условия должны обеспечить правильное поведение волнового поля в вершине угла и на бесконечности.

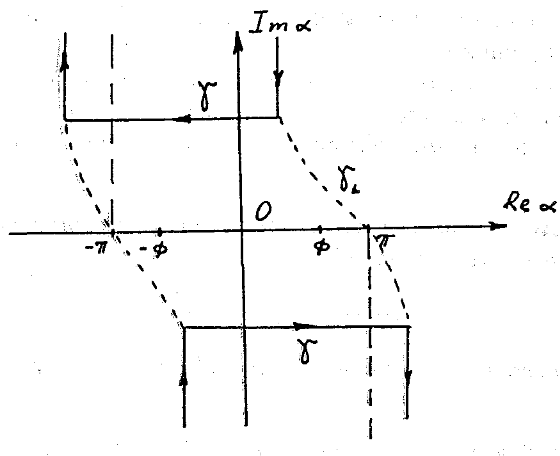


Рис. 2.

Решение ищется в классе функций $f$ и $g$, которые удовлетворяют следующим предположениям.

•Функции

$$f(\alpha)-D_2/(\alpha-\varphi_0), \quad g(\alpha)-D_1/(\alpha-\varphi_0) \qquad (10)$$

регулярны и ограничены в полосе $\overline{\Pi}=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\mathrm{Re}(\alpha)|\leqslant\Phi\}$ и продолжаются на всю комплексную плоскость как мероморфные функции с использованием функциональных уравнений (9);

•условия

$$
\begin{aligned}
&|f(\alpha) - f(\pm i\infty)| < \exp(-\delta|\operatorname{Im}(\alpha)|),\\
&|g(\alpha) - g(\pm i\infty)| < \exp(-\delta|\operatorname{Im}(\alpha)|), \quad \delta > 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

выполнены при $\alpha \to \pm i\infty + \varphi$ равномерно по $\varphi$, $|\varphi| < \pi + \Phi$;

•имеют место соотношения

$$
f(-i\infty) = -f(i\infty), \quad g(-i\infty) = -g(i\infty). \tag{12}
$$

В частности, условия (12) обеспечивают непрерывность волнового поля в вершине и определяют равенства $f(i\infty) = iH_z(0,\varphi)/2$, $g(i\infty) = iE_z(0,\varphi)/2$. Изучение разрешимости системы (9) в классе функций (10)–(12) является основным предметом последующего изложения.

Преобразуем систему функциональных уравнений (9), введя новые неизвестные функции $\xi(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$ по формулам

$$
f(\alpha) = \psi_f(\alpha)\sigma_{\varphi_0}(\alpha)\xi(\alpha), \quad g(\alpha) = \psi_g(\alpha)\sigma_{\varphi_0}(\alpha)\zeta(\alpha), \tag{13}
$$

где $\sigma_{\varphi_0}(\alpha) = \pi/(2\Phi)\cos(\pi\varphi_0/2\Phi)/[\sin(\pi\alpha/2\Phi) - \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)]$, функции $\psi_f(\alpha)$, $\psi_g(\alpha)$ регулярны в $\overline{\Pi}$, мероморфны в $\mathbb{C}$ и не имеют нулей и полюсов в $\overline{\Pi}$. Функции $\psi_f$ определена равенством

$$
\begin{aligned}
\psi_f(\alpha) = \psi_\Phi(\alpha + \Phi + \pi/2 - \Theta_1)\psi_\Phi(\alpha - \Phi - \pi/2 + \Theta_2)\times\\
\times\, \psi_\Phi(\alpha + \Phi - \pi/2 + \Theta_1)\psi_\Phi(\alpha - \Phi + \pi/2 - \Theta_2).
\end{aligned}
$$

Выражение для функции $\psi_g$ такое же как для $\psi_f$ с заменой $\Theta$ на $\chi$. Здесь мы используем обозначения

$$
\sin\Theta_j = a^j_{12}, \quad \sin\chi_j = a^j_{21}, \quad j = 1, 2,
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\Theta_j > 0, \quad \operatorname{Im}\chi_j > 0,\\
&\pi/2 > \operatorname{Re}\Theta_j > 0, \quad \pi/2 > \operatorname{Re}\chi_j > 0,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

а $\psi_\Phi$ функция Малюжинца, которая определена как решение функционального уравнения [2]

$$
\Psi_\Phi(\alpha + 2\Phi)/\Psi_\Phi(\alpha - 2\Phi) = \cot(\alpha/2 + \pi/4).
$$

Условия (14) согласованы с условиями (7). В частности, они означают наличие поглощения на обеих сторонах рассеивающего угла. Функция $\sigma_{\varphi_0}$ имеет единственный полюс в $\overline{\Pi}$. Замена переменных (13) дает возможность выделить набор сингулярностей и нулей мероморфных функций и преобразовать систему (9) к более удобной форме

$$\begin{gathered}
\xi(\alpha-(-1)^j\Phi)-\xi(-\alpha-(-1)^j\Phi)= \\
=k_1^j(\alpha)\left[\frac{\zeta(\alpha-(-1)^j\Phi)}{(\sin\alpha-(-1)^j\sin\chi_j)}+\frac{\zeta(-\alpha-(-1)^j\Phi)}{(-\sin\alpha-(-1)^j\sin\chi_j)}\right], \\
\zeta(\alpha-(-1)^j\Phi)-\zeta(-\alpha-(-1)^j\Phi)= \\
=k_2^j(\alpha)\left[\frac{\xi(\alpha-(-1)^j\Phi)}{(\sin\alpha-(-1)^j\sin\Theta_j)}+\frac{\xi(-\alpha-(-1)^j\Phi)}{(-\sin\alpha-(-1)^j\sin\Theta_j)}\right], \\
j=1,2,
\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$k_1^j(\alpha)=a_{11}^j\sin\alpha\, h_j(\alpha),\qquad k_2^j(\alpha)=(-1)^{j+1}a_{22}^j\sin\chi_j/h_j(\alpha),$$

$$h_j(\alpha)=\frac{\Psi_g(\alpha-(-1)^j\Phi)(\sin\alpha-(-1)^j\sin\chi_j)}{\Psi_f(\alpha-(-1)^j\Phi)(\sin\alpha-(-1)^j\sin\Theta_j)}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \tag{16}$$

Как следствие условий (10)–(12), функции $\xi$ и $\zeta$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}
\xi(i\infty)=\xi(-i\infty), \\
|\xi(\alpha)-\xi(i\infty)|<\operatorname{const}\exp(-\delta|\operatorname{Im}\alpha|),
\end{gathered} \tag{16'}$$

и $\xi(\alpha)$ регулярна и ограничена в $\overline{\Pi}$. Она может быть продолжена как мероморфная функция на $\mathbb{C}$. Функция $\zeta$ удовлетворяет тем же условиям, а кроме того, справедливы равенства

$$\xi_0\equiv\xi(\varphi_0)=D_2/\Psi_f(\varphi_0),\qquad \zeta_0\equiv\zeta(\varphi_0)=D_1/\Psi_g(\varphi_0), \tag{17}$$

которые следуют из условий (10). Соотношения (17) и (13) позволяют легко получить, что подинтегральные выражения в (8) воспроизводят выражения для падающей волны $E_z^i$ и $H_z^i$ в (1) с помощью теоремы о вычетах.

Заметим, что, благодаря неравенствам (14), функции $\zeta(\alpha)$ и $\xi(\alpha)$ ограничены в $\overline{\Pi}_\varepsilon=\{\alpha\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}\alpha|\leqslant\Phi+\varepsilon\}$ и не имеют там ни нулей, ни полюсов. Число $\varepsilon>0$ достаточно мало. Обозначим множество функций, которые регулярны в $\Pi_\varepsilon$, непрерывны вплоть до границы полосы и удовлетворяют условиям (16′) через $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, где $\delta>0$. Далее мы покажем, что $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ является банаховым пространством.

Используем модифицированное преобразование Фурье в форме $S$-интегралов [11, 12] для редукции системы функциональных уравнений (15) с условиями (17) к системе линейных уравнений второго рода. А именно, справедливо следующее предложение.

**Предложение 2.** *Для того, чтобы пара функций из пространства $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ была решением системы (15) с условиями (17), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе линейных уравнений*

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & K_1\\ K_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_0\\ \zeta_0\end{pmatrix}, \tag{18}$$

*где $K_1$ и $K_2$ линейные операторы в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, определенные равенствами*

$$\begin{aligned}(K_1t)(z)&=\sum_{m=1}^{2}\frac{i}{8\Phi}\int_{i\mathbb{R}}d\tau\Big\{(-1)^{m+1}k_1^m(\tau)(\sigma_m(\tau,z)-\sigma_m(\tau,\varphi_0))\times\\ &\times\left(\frac{t(\tau-(-1)^m\Phi)}{\sin\tau-(-1)^m\sin\chi_m}+\frac{t(-\tau-(-1)^m\Phi)}{-\sin\tau-(-1)^m\sin\chi_m}\right)\Big\},\\ (K_2t)(z)&=\sum_{m=1}^{2}\frac{i}{8\Phi}\int_{i\mathbb{R}}d\tau\Big\{(-1)^{m+1}k_2^m(\tau)(\sigma_m(\tau,z)-\sigma_m(\tau,\varphi_0))\times\\ &\times\left(\frac{t(\tau-(-1)^m\Phi)}{\sin\tau-(-1)^m\sin\Theta_m}-\frac{t(-\tau-(-1)^m\Phi)}{-\sin\tau-(-1)^m\sin\Theta_m}\right)\Big\},\end{aligned} \tag{19}$$

$$\sigma_m(\tau,z)=\sin\mu\tau/[\cos\mu\tau+(-1)^m\sin\mu z],\qquad \mu=\pi/(2\Phi)$$

*при $|\operatorname{Re}z|<\Phi$. Если $\Phi\leqslant|\operatorname{Re}z|\leqslant\Phi+\varepsilon$, тогда для продолжения выражений (19) из $\Pi$ в более широкую полосу $\Pi_\varepsilon$ мы используем процедуру продолжения $S$-интегралов [11, 12]. Интегрирование в (19) проводится вдоль мнимой оси.*

**Замечание.** Любое решение системы (15) может быть мероморфно продолжено из $\Pi$ в $\mathbb{C}$ с использованием функциональных уравнений, что эквивалентно продолжению с помощью $S$-интегралов [12].

Доказательство Предложения 2 элементарно. Оно основано на применении подхода, использующего решение системы функциональных уравнений для одной неизвестной функции [11, 12]. В принципе, система (18) выводится обращением [3] разностного оператора в левой части первой и второй пары уравнений (15).

Мы изучим возможность преобразования системы уравнений (18) к системе второго рода с компактным оператором, а также построение решения в виде рядов Неймана в случае специального соотношения параметров задачи.

## § 3. Вспомогательные предложения

Для изучения системы уравнений (18) получим ряд вспомогательных утверждений. Рассмотрим множество функций $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, определенное выше.

**Лемма 1.** *Множество функций $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ является банаховым пространством с нормой*

$$\|\xi\|_\delta = \sup_{z\in\Pi_\varepsilon} |\xi(z)| + \sup_{z\in\Pi_\varepsilon} |(\xi(z)-\xi(i\infty))\nu_\delta(z)|, \tag{20}$$

*где $\nu_\delta(z)$ весовая функция.*

По определению $\nu_\delta(z)$ весовая функция, если она регулярна в полосе $\Pi_\varepsilon$, не имеет ни нулей, ни полюсов в $\overline{\Pi}_\varepsilon$ и удовлетворяет оценке

$$|\nu_\delta(z)| \sim \mathrm{const}\exp(\delta|\operatorname{Im} z|), \qquad |\operatorname{Im} z| \to \infty.$$

В частности, если $\mu = \pi/2\Phi > \delta > 0$, функция $\nu_\delta(z) = \cos(\delta z)$ может быть выбрана в качестве весовой.

Лемма 1 доказывается с использованием полноты пространства $A(\Pi_\varepsilon)$, которое состоит из функций регулярных и ограниченных в $\overline{\Pi}_\varepsilon$ с равномерной нормой $\|\xi\| = \sup_{\Pi_\varepsilon} |\xi(z)|$, $\xi(i\infty) = \xi(-i\infty)$.

Для изучения системы уравнений нам необходим критерий компактности в весовом пространстве $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$. Чтобы получить такой критерий, мы докажем критерий компактности множества в $A(\Pi_\varepsilon)$.

**Предложение 3.** *Множество компактно в $A(\Pi_\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Действительно непрерывность множества функций, определенных в полосе, это стандартная равностепенная непрерывность в смысле теоремы Арцелла [13] для любой пары конечных точек $z_1$, $z_2$. Пусть $z_2 = i\infty$, тогда по определению множества $M \subset A(\Pi_\varepsilon)$ является равностепенно непрерывным на бесконечности, если для любого $\varkappa > 0$ существует константа $R > 0$, такая что для любых $z$, $|z| > R$ выполнено неравенство

$$|\xi(z) - \xi(i\infty)| < \varkappa$$

для всех $\xi \in M$.

Критерий компактности в $A(\Pi_\varepsilon)$ следует из теоремы Арцелла [13]. Чтобы показать это, мы используем следующую идею: Если множество $F$ замкнутое подпространство банахова пространства

$E$, то, для того чтобы сформулировать критерий компактности в $F$, можно сформулировать критерий компактности в $E$. Множество компактно в $F$, если оно компактно в $E$, т.е. существует конечная (или компактная) $\varkappa$-сеть, состоящая из элементов пространства $E$.

Сначала мы рассмотрим функции, определенные в круге $D \subset \mathbb{C}$ единичного радиуса. Введем пространство $C_A(\bar{D})$ функций, которые непрерывны на границе $\partial D$ круга и регулярно продолжимы в круг, с нормой

$$||\xi|| = \sup_{z\in\bar{D}} |\xi(z)| = \max_{z\in\partial D} |\xi(z)|.$$

Пространство $C_A(\bar{D})$ может рассматриваться как замкнутое подпространство пространства $C(\partial D)$ функций непрерывных на окружности. Действительно, если последовательность $\{\xi_n\} \subset C_A(\bar{D})$ равномерно сходится к $\xi$, тогда для любого $|z| < 1$ мы имеем

$$\xi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\xi_n(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha,$$

а для $|z| > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\xi_n(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\xi(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = 0$$

для $|z| > 1$ и $\xi(z)$ допускает продолжение с окружности $\partial D$ в круг $D$ как регулярная функция. Так как в пространстве $C_A(\partial D)$ выполнена теорема Арцелла [13], этот критерий компактности справедлив для пространства $C_A(\bar{D})$. Соответствующий критерий для функций, определенных в полосе $\Pi_\varepsilon$, выводится применением конформного отображения полосы на круг. Это завершает доказательство.

Назовем множество $M \subset A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ "равностепенно непрерывным на бесконечности с весом", если для любого $\varkappa > 0$ существует константа $R > 0$, такая что для любого $z$, $|z| > R$ справедливо неравенство

$$|(\xi(z) - \xi(i\infty))\nu_\delta(z)| < \varkappa$$

для всех $\xi \in M$. Теперь мы можем сформулировать требуемый критерий компактности в весовом пространстве $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$.

**Предложение 4.** *Для того чтобы множество было компактно в пространстве $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было компактно в $A(\Pi_\varepsilon)$ и равностепенно непрерывно на бесконечности с весом.*

**Достаточность.** Пусть множество $F$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно как множество в $A(\Pi_\varepsilon)$. Тогда для любой ограниченной последовательности $\{\xi_n\} \subset F \subset A(\Pi_\varepsilon)$ можно выбрать подпоследовательность Коши, которую мы обозначаем тем же символом $\xi_n$. Эта подпоследовательность является последовательностью Коши в смысле сходимости в $A(\Pi_\varepsilon)$, т.е.

$$\|\xi_m - \xi_n\| = \sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon} |\xi_m(z) - \xi_n(z)| \to 0, \quad m, n \to \infty. \tag{21}$$

Чтобы убедиться, что эта подпоследовательность является последовательностью Коши в смысле сходимости в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, оценим величину

$$\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon} |[(\xi_n(z) - \xi_n(i\infty)) - (\xi_m(z) - \xi_m(i\infty))]\nu_\delta(z)| \leqslant$$
$$\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\leqslant R} |[(\xi_n(z) - \xi_m(i\infty)) - (\xi_n(z) - \xi_m(i\infty))]\nu_\delta(z)| +$$
$$+ \sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\geqslant R} |(\xi_n(z) - \xi_n(i\infty))\nu_\delta(z)| +$$
$$+ \sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon |z|\geqslant R} |(\xi_m(z) - \xi_m(i\infty))\nu_\delta(z)|.$$

Теперь мы используем равностепенную непрерывность на бесконечности с весом. Для любого $\varkappa > 0$ выберем $R > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\geqslant R} |(\xi_n(z) - \xi_n(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant \varkappa/4, \\ &\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\geqslant R} |(\xi_m(z) - \xi_m(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant \varkappa/4 \end{aligned} \tag{22}$$

для любых $\xi_n$, $\xi_m \in F$. Так как $R$ уже выбрано, имеем

$$\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\leqslant R} |(\xi_n(z) - \xi_n(i\infty))\nu_\delta(z) - (\xi_n(i\infty) - \xi_m(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant$$
$$\leqslant C_R \sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\leqslant R} |(\xi_n(z) - \xi_m(z)| + C_R|(\xi_n(i\infty) - \xi_m(i\infty)|,$$

где $C_R = \sup\limits_{z\in\bar\Pi_\varepsilon |z|\leqslant R} |\nu_\delta(z)|$. В соответствии с соотношением (21), выбирая $m, n$ достаточно большими, для любого $\varkappa > 0$ из последнего неравенства получим оценку

$$\sup_{z\in\bar\Pi_\varepsilon, |z|\leqslant R} |(\xi_n(z) - \xi_m(z))\nu_\delta(z) - (\xi_n(i\infty) - \xi_m(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant \varkappa/2.$$

Наконец, принимая во внимание оценки (22), имеем

$$\sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon} |[(\xi_n(z)-\xi_m(z))-(\xi_n(i\infty)-\xi_m(i\infty))]\nu_\delta(z)| < \varkappa,$$

и, следоваетльно, из соотношения (21) следует, что

$$\|\xi_m-\xi_m\|_\delta \to 0, \quad n,m\to\infty.$$

**Необходимость.** Если множество $F$ компактно в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, то оно компактно в более слабой норме, и, значит, в $A(\Pi_\varepsilon)$. В частности, это означает компактность вложения $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ в $A(\Pi_\varepsilon)$. Остается проверить, что $F$ является равностепенно непрерывным на бесконечности с весом. Это может быть сделано таким же образом как в доказательстве теоремы Арцелла. Так как $F$ компактно, то для любого $\varkappa>0$ существует конечная $\varkappa/3$-сеть $\{\xi_i(z)\}_{i=1}^N$, такая, что существуют постоянные $R_i$, $i=1,\ldots,N$ и справедливы неравенства

$$\sup_{|z|\geqslant R_i} |(\xi_i(z)-\xi_i(z))-(\xi_i(i\infty)))\nu_\delta(z)| < \varkappa/3, \quad i=1,2,\ldots,N. \tag{23}$$

Заметим, что подпространство $A_{\delta_1}(\Pi_\varepsilon)$ плотно в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ при $\delta_1>\delta$, и, следовательно, $\{\xi_i(z)\}_{i=1}^N$ может быть выбрано из $A_{\delta_1}(\Pi_\varepsilon)$.

Положим $R=\max\limits_i R_i$. Для любого элемента $\xi\in F$ существует функция $\xi_i$ такая, что

$$\begin{aligned}\|\xi-\xi_i\|_\delta &= \sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon} |(\xi(z)-\xi_i(z))|+\\ &+\sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon} |[(\xi(z)-\xi(i\infty))-(\xi_i(z)-\xi_i(i\infty))]\nu_\delta(z)| \leqslant \varkappa/3.\end{aligned} \tag{24}$$

Используя неравенства (23) и (24), мы выводим

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon\,|z|>R} &|(\xi(z)-\xi(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant\\ &\leqslant \sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon\,|z|>R} |(\xi(z)-\xi_i(z))\nu_\delta(z)|+\\ &+\sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon\,|z|>R} |[(\xi(z)-\xi(i\infty))-(\xi_i(z)-\xi_i(i\infty))\nu_\delta(z)|+\\ &+\sup_{z\in\bar{\Pi}_\varepsilon\,|z|>R} |(\xi_i(z)-\xi_i(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant \varkappa/3+\varkappa/3+\varkappa/3=\varkappa,\end{aligned}$$

что завершает доказательство Предложения 4.

## § 4. Метод возмущений и уравнения с компактным оператором

Обратимся к описанию свойств операторов $K_1$ и $K_2$ и редукции системы (18) к системе с компактными операторами.

**Предложение 5.** *Операторы $K_1$ и $K_2$ являются ограниченными операторами при $\delta < \mu = \pi/2\Phi$, и справедливы оценки*

$$\|K_j t\|_\delta \leqslant C\|t\|_\delta, \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

*где константы $C_j = C_j(\Phi, \Theta, \chi, a_{11}, a_{22}, \varphi_0, \delta)$ зависят от параметров задачи.*

Доказательство Предложения 5 оказывается достаточно громоздким и, поэтому для краткости мы рассмотрим только оценку для $K_1$. Вычисления для оператора $K_2$ являются похожими. В соответствии с двумя слагаемыми в определении (19) для $K_1$ мы представим функцию $(K_1 t)(z)$ в виде

$$(K_1 t)(z) = (K_1^1 t)(z) + (K_1^2 t)(z). \tag{26}$$

Как следует из функциональных уравнений (15) и уравнений (18) мероморфные продолжение $(K_1^j t)(z)$, определенное в полосе $\Pi$ равенством (19), на полосу $\Pi_\varepsilon$ получается с использованием соотношений

$$\begin{gathered}(K_1^j t)((-1)^{j+1} z - (-1)^j \Phi) = (K_1^j t)((-1)^j z - (-1)^j \Phi) - \\ -(-1)^j k_1^j(z) \left[\frac{t((-1)^{j+1} z - (-1)^j \Phi)}{-\sin z - (-1)^j \sin \chi_j} + \frac{t((-1)^j z - (-1)^j \Phi)}{-\sin z - (-1)^j \sin \chi_j}\right], \\ j = 1, 2.\end{gathered} \tag{27}$$

Соотношения (27) могут быть выведены с помощью $S$-интегралов [12]. Так как операторы $K_1^1$ и $K_1^2$ в (26) одного типа, мы докажем оценку только для оператора $K_1^1$. Оценим величину

$$\begin{gathered}\sup_{z \in \Pi_\varepsilon} |((K_1^1 t)(z) - (K_1^1 t)(i\infty))\nu_\delta(z)| = \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} |((k_1^1 t)(z)(-ix - \varepsilon + \Phi) - (K_1^1 t)(i\infty))\nu_\delta(+ix + \varepsilon + \Phi) + \\ + k_1^1(ix + \varepsilon)\left[\frac{t(ix + \varepsilon - \Phi)}{\sin(ix + \varepsilon) + \sin \chi_1} + \frac{t(-ix - \varepsilon - \Phi)}{-\sin(ix + \varepsilon) + \sin \chi_1}\right] \times \\ \times \nu_\delta(ix + \varepsilon + \Phi) + ((K_1^1 t)(ix - \varepsilon - \Phi) - (K_1^1 t)(i\infty))\nu_\delta(ix - \varepsilon - \Phi)|.\end{gathered} \tag{28}$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части (28), прибавим и вычтем $t(i\infty)$ в подинтегральном выражении $(K_1^1 t)(z)$. Имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |((K_1^1 t)(\Phi-\varepsilon-ix) - (K_1^1 t)(i\infty))\nu_\delta(\Phi+\varepsilon+ix)| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{i}{8\Phi} \int_{i\mathbb{R}} \frac{\sin\mu\tau\,\nu_\delta(ix+\Phi+\varepsilon)}{\cos\mu\tau - \sin\mu(ix-\Phi-\varepsilon)} k_1^1(\tau) \times\right.$$

$$\left.\times\left\{\left[\frac{t(\tau+\Phi)-t(i\infty)}{\sin\tau+\sin\chi_1} + \frac{t(-\tau+\Phi)-t(i\infty)}{-\sin\tau+\sin\chi_1}\right] - \frac{2\sin\chi_1 t(i\infty)}{\sin^2\tau-\sin^2\chi_1}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1^1 \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} dw \frac{|\operatorname{sh}\mu w|}{[(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon\operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\operatorname{sh}^2\mu x]^{1/2}} \times\right.$$

$$\times \frac{|\nu_\delta(ix+\Phi+\varepsilon)|}{|\nu_\delta(iw)|}\left(\frac{|\operatorname{sh}w|}{|\operatorname{sh}w - i\sin\chi_1|} + \frac{|\operatorname{sh}w|}{|\operatorname{sh}w+i\sin\chi_1|}\right)\times$$

$$\times \sup_{z\in\partial\Pi_\varepsilon} |(t(z)-t(i\infty))\nu_\delta(z)| + C_1^2|\sin\chi_1|\times$$

$$\times \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} dw \frac{|\operatorname{sh}\mu w|}{[(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon\operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\operatorname{sh}^2\mu x]^{1/2}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{|\nu_\delta(ix+\Phi+\varepsilon)|}{|\operatorname{sh}^2 w - \sin^2\chi_1|}\right\} \times t(i\infty), \qquad \mu = \pi/2\Phi. \tag{29}$$

В последнем неравенстве (29) мы использовали оценку

$$|k_1^1(\tau)| \leqslant \mathrm{const}\,|\operatorname{sh}w|, \qquad \tau = iw,$$

и тождество

$$|\cos\mu\tau - \sin\mu(ix-\Phi-\varepsilon)| =$$
$$= [(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon\operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\operatorname{sh}^2\mu x]^{1/2}.$$

Для проведения дальнейших оценок докажем следующий результат.

**Лемма 2.** *Величины*

$$J_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} dw \frac{|\operatorname{sh}\mu w|\,|\nu_\delta(ix+\Phi+\varepsilon)|/|\nu_\delta(iw)|}{[(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon\operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\operatorname{sh}^2\mu x^{1/2}} \right\},$$

$$J_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} dw \frac{|\operatorname{sh}\mu w|\,|\nu_\delta(ix+\Phi+\varepsilon)|/|\operatorname{sh}w + i\sin\chi_1|}{[(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon\operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\operatorname{sh}^2\mu x]^{1/2}} \right\}$$

*ограничены, если* $\pi/2 > \operatorname{Re}\chi_1 > 0$, $\mu > \delta > 0$.

Для доказательства Леммы 2 используем следующие оценки для весовой функции

$$d_0 + d_1 \exp(\delta|w|) \leqslant |\nu_\delta(iw)| \leqslant d_2 \exp(\delta|w|), \quad w \in \mathbb{R},$$
$$|\nu_\delta(ix + \Phi + \varepsilon)| \leqslant C \exp(\delta|x|) \leqslant 2C \mathrm{ch}\,(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$J_1 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} dw C \frac{|\mathrm{sh}\,\mu w| \exp(\delta|x|)/(d_0 + d_1 \exp(\delta|w|))}{[(\mathrm{ch}\,\mu w - \cos\mu\varepsilon\, \mathrm{ch}\,\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\, \mathrm{sh}\,^2\mu x]^{1/2}} \right\} =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_0^\infty dw 2C \frac{|\mathrm{sh}\,\mu w| \exp(\mu|x|)^\gamma)/(d_0 + d_1 \exp(\mu|w|))^\gamma)}{[(\mathrm{ch}\,\mu w - \cos\mu\varepsilon \cos\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon\, \mathrm{sh}\,^2\mu x]^{1/2}} \right\}$$
$$\gamma = \delta/\mu.$$

Принимая во внимание неравенства

$$\exp(\mu|x|) \leqslant 2\mathrm{ch}\,(\mu x), \qquad \mathrm{ch}\,(\mu w) \leqslant 2\exp(\mu|w|)$$

и вводя новые переменные $p = \mathrm{ch}\,(\mu w)$ и $q = \mathrm{ch}\,(\mu x)$, мы приходим к оценке

$$J_1 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \int_1^\infty dp\, 2C/\mu \frac{(q(x))^\gamma/(d_0 + d_1(p/2)^\gamma)}{[(p - \cos\mu\varepsilon q(x))^2 + \sin\mu\varepsilon\,(q^2(x) - 1)]^{1/2}} \right\} =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left( \int_1^\infty + \int_{1/q(x)}^1 \right) d\tau\, 2C/\mu \frac{(q(x))^\gamma/(d_0 + d_1(q\tau/2)^\gamma)}{[(\tau - \cos\mu\varepsilon)^2 + \sin^2\mu\varepsilon(1 - q^{-2}(x))]^{1/2}} \right\}.$$

В последнем выражении слагаемое, соответствующее интегрированию по полубесконечному интервалу $[1, \infty)$, является явно ограниченным. Ограниченность второго слагаемого для любого $x \in \mathbb{R}$ следует из ограниченности интеграла

$$\int_{1/q(x)}^1 d\tau \frac{[q(x)]^\gamma}{d_0 + d_1(q\tau/2)^\gamma}$$

для $q \geqslant 1$, $\gamma = \delta/\mu < 1$. Оценка для $J_2$ выводится аналогично.

Используя Лемму 2 из неравенства (29), мы получаем оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |((K_1^1 t)(\Phi - \varepsilon - ix) - (K_1^1 t)(i\infty))\nu_\delta(\Phi + \varepsilon + ix)| \leqslant \mathrm{const}\, \|t\|_\delta. \quad (30)$$

Второе и третье слагаемое в правой части (28) оцениваются величиной const $\|t\|_\delta$ похожим способом. Используя неравенство

$$\sup_{z\in\Pi_\epsilon}|(K_1^1t)(z)| \leqslant \sup_{z\in\Pi_\epsilon}|(K_1^1t)(z)-(K_1^1t)(i\infty)|+|(K_1^1t)(i\infty)|,$$

оцениваем его правую часть величиной const $\|t\|_\delta$ аналогично тому, как это было сделано для вывода (30). Складывая полученную оценку с оценкой для

$$\sup_{z\in\Pi_\epsilon}|((K_1^1t)(z)-(K_1^1t)(i\infty))\nu_\delta(z)|$$

окончательно имеем

$$\|K_1^1t\|_\delta \leqslant Q_1^1\|t\|_\delta.$$

Выпажение для $K_1^2t$ оценивается аналогично, что завершает доказательство Предложения 5.

Предложение 5 лежит в основе применения метода возмущений для решения системы (18) в случае малой анизотропии. Действительно, в силу того, что операторы $K_{1,2}$ пропорциональны диагональным членам $a_{11}^j$, $a_{22}^j$ матрицы $\{a_{ik}^j\}$ (точнее говоря отношению диагональных к антидиагональным элементам матрицы $\{a_{ik}^j\}$), если анизотропия достаточно мала, то в оценках (25) $C_1<1$, $C_2<1$, и решение уравнений (18) может быть построено в форме рядов Неймана [3]

$$\xi(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\xi_m(\alpha),\qquad \zeta(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\zeta_m(\alpha),$$
$$\xi_m(\alpha)=(K_1\zeta_{m-1})(\alpha),\qquad \zeta_m(\alpha)=(K_2\xi_{m-1})(\alpha),\qquad m\geqslant 1,$$

где $\|K_1\|<1$, $\|K_2\|<1$. На основе старших членов ряда Неймана в работе [3] получена равномерная по углу асимптотика дальнего поля. Подсчитано выражение для волны примесной поляризации, возникающей при взаимодействии падающей волны заданной поляризации с анизотропной поверхностью клина. Аналогичный подход применен в более сложной задаче дифракции наклонно падающей плоской волны на клине с тонким покрытием [5].

Обсудим кратко вопрос о возможности преобразования системы уравнений (18) к системе с компактным оператором. Представим функции $k_1^m(\tau)$, $k_2^m(\tau)$ в форме

$$\begin{aligned}
&k_1^m(\tau)=a_{11}^m h_m(i\infty)\sin\tau+s_1^m(\tau),\\
&k_2^m(\tau)=a_{22}^m(-1)^{m+1}\sin\chi_m/h_m(i\infty)+s_2^m(\tau),\\
&s_1^m(\tau)=k_1^m(\tau)-a_{11}^m h_m(i\infty)\sin\tau=O(1/\cos\mu\tau),\\
&s_2^m(\tau)=k_2^m(\tau)-a_{22}^m(-1)^{m+1}\sin\chi_m/h_m(i\infty)=O(1/\cos\mu\tau).
\end{aligned}\tag{31}$$

В представлении (31) выделена главная часть функций на бесконечности, поправочные части $s_1^m$, $s_2^m$ быстро убывают на бесконечности. В соответствии с расщеплением (31) преобразуем систему уравнений (18) следующим образом

$$\begin{pmatrix} I & -H_1 \\ -H_2 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_0^1 \\ S_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где $K_1 = H_1 + S_0^1$, $K_2 = H_2 + S_0^2$. Система (32) переписывается в виде

$$Hw = S_0 w + w_0, \tag{33}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} I & -H_1 \\ -H_2 & I \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 0 & S_0^1 \\ S_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что операторы $H_1$, $H_2$ того же типа, что и $K_1$, $K_2$, и как легко показать они ограничены в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, $\delta < \mu$. Для операторов $S_0^1$, $S_0^2$ справедливо следующее утверждение.

**Предложение 6.** *Операторы $S_0^1$ и $S_0^2$ компактны в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ при $\delta < \mu$, и ограничены при $\delta = \mu$.*

Доказательство Предложения 6 основывается на критерии компактности в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$. Необходимо проверить, что оператор $S_0^1$ отображает ограниченное множество $F$ на компактное множество $G \subset A(\Pi_\varepsilon)$, и $G$ является равностепенно непрерывным на бесконечности с весом. Компактность $G$ в $A(\Pi_\varepsilon)$ следует из ограниченности $S_0^1$ в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$ и оценки

$$|(S_0^1 t)(z + \Delta z) - (S_0^1 t)(z)| \leqslant C_0(D)|\Delta z|\,\|t\|_\delta,$$

которое выполнено для любых близких $z$ и $z + \Delta z$ из компактной подобласти $D \subset \Pi_\varepsilon$. Эта оценка легко выводится с использованием регулярности $(S_0^1 t)(z)$ в любой подобласти полосы $\Pi_\varepsilon$ и обеспечивает равностепенную непрерывность для любых конечных точек $z$ и $z + \Delta z$ и для всех $t \in F$.

Равностепенная непрерывность $G$ на бесконечности с весом следует из оценки

$$\sup_{z\in\Pi_\varepsilon, |z|>R} |((S_0^1 t)(z) - (S_0^1 t)(i\infty))\nu_\delta(z)| \leqslant Q \sup_{|x|>R} ([q(x)]^{\gamma-1})\|t\|_\delta, \tag{34}$$

где $q(x) = \operatorname{ch}(\mu x)$, $\gamma = \delta/\mu < 1$. Доказательство неравенства (34) проводится также, как оценка (25), и основывается на вспомогательном неравенстве

$$J_3 = Q_0 \sup_{|x|>R} \left\{ \int_0^\infty dw \frac{\operatorname{sh}\mu w/\operatorname{ch}\mu w}{[(\operatorname{ch}\mu w - \cos\mu\varepsilon \operatorname{ch}\mu x)^2 + \sin^2\mu\varepsilon \operatorname{sh}^2\mu x]^{1/2}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{|\nu_\delta(ix+\phi+\varepsilon)|}{|\nu_\delta(iw)|} \left( \frac{1}{|\operatorname{sh} w - i\sin\chi_1|} + \frac{1}{|\operatorname{sh} w + i\sin\chi_1|} \right) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant Q_1 \sup_{|x|>R} \left\{ \int_1^\infty dp \frac{[q(x)]^{\gamma-1}/p^{1+1/\mu}/(d_0 + d_1(p/2)^\gamma)}{[(p/q(x) - \cos\mu\varepsilon)^2 + \sin^2\mu\varepsilon(1 - q^{-2}(x))]^{1/2}} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant Q \sup_{|x|>R} [q(x)]^{\gamma-1}.$$

Компактность $S_0^2$ доказывается аналогичным способом.

Если оператор $H$ ограниченно обратим, то уравнение (33) переписывается в виде

$$w = H^{-1}S_0 w + H^{-1}w_0, \tag{35}$$

где $H^{-1}S_0$ компактный оператор в $A_\delta(\Pi_\varepsilon)$, $\delta < \mu$. Таким образом, получение уравнения (35) с компактным оператором основывается на ограниченной обратимости оператора $H$. Ограниченная обратимость $H$ может быть легко установлена в случае малой анизотропии, т.е. когда диагональные члены матрицы $\{a_{ik}^j\}$ достаточно малы по сравнению с антидиагональными членами. В этом случае $\|H_i\| < 1$, $i = 1, 2$ и, следовательно, $H^{-1}$ существует и ограничен. Легко доказать существование ограниченного обратного к $H$ и в случае существенного превалирования диагональных членов матрицы $\{a_{ik}^j\}$ над антидиагональными, т.е. для очень сильной анизотропии. Если же все элементы матрицы $\{a_{ik}^j\}$ одного порядка (этот случай можно называть "резонансным"), то исследование обратимости $H$ становится более сложным. Обсуждение этого случая, проведение соответствующих оценок выходит за рамки данной статьи и будет представлено в одной из следующих публикаций.

## Литература


1. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, *Геометрическая теория дифракции.* Москва, Связь, 1978.
2. Г. Д. Малюжинец, *Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами.* — ДАН СССР **121** No. **3** (1958), 436–439.
3. M. A. Lyalinov, *On one approach to an electromagnetic diffraction problem in a wedge shaped region.* — J. Phys. A.: Math. Gen. **27** (1994), L183–189.

4. Е. П. Курушин, Е. И. Нефедов, А. Т. Фиалковский, *Дифракция электромагнитных волн анизотропными структурами.* Москва, Наука, 1975.
5. М. А. Лялинов, Л. Г. Вардапетян, *Дифракция плоской электромагнитной волны на клине с диэлектрическим покрытием при наклонном падении на ребро.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 72.
6. T. B. A. Senior, *Commun. Pure. Appl. Math.* vol. 12, 1959, pp. 337.
7. Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* Москва, Наука, 1970.
8. Б. В. Будаев, — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 57.
9. С. А. Назаров, Б. А. Пламеновский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей.* Москва, Наука, 1991.
10. W. E. Williams, — Proc. Roy. Soc. London **252** (1959), 376.
11. А. А. Тужилин, *Дифференциальные уравнения.* т. 7, 1971, с. 1276.
12. А. А. Тужилин, *Дифференциальные Уравнения.* т. 9, 1973, с. 1875.
13. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, Наука, 1981.

Lyalinov M. A. Perturbation method in electromagnetic vector problems of diffraction by a wedge

Electromagnetic vector diffraction problems in a wedge shaped region are reduced to a system of coupled functional equations by means of Sommerfeld integrals. Perturbation method is applied to solve the system of functional equations and convergence of the series is studied. The system of functional equations is reduced to linear equations with contracting operators. The solution is presented in the form of Neumann series. Reduction to a system with a compact operator is also studied.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 октября 1995 г.