

УДК 517.977

# Некоторые геометрические свойства множеств успешной разрешимости в игровых задачах наведения<sup>1</sup>

©2008 г. Ю. В. Авербух<sup>2</sup>

Поступило в марте 2008 г.

Работа посвящена изучению свойств решения в игровой задаче сближения-уклонения. Исследуются такие свойства множества успешной разрешимости, как связность сечений и непрерывная зависимость сечений от времени. Получено достаточное условие связности сечений и непрерывной зависимости сечений от времени.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию свойств решения игровой задачи наведения на замкнутое множество при наличии фазовых ограничений (см. [1, 2]). Подобные задачи имеют много приложений (в частности, инженерные и экономические). Построение строгой теории игровых задач управления связано с работами Н.Н. Красовского, А.И. Субботина и многих других исследователей. В работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина была предложена позиционная формализация этих задач и получена теорема об альтернативе, описывающей структуру их решения [2]. Как следует из теоремы об альтернативе, все множество позиций делится на две части — множество успешной разрешимости задачи наведения и множество успешной разрешимости задачи уклонения. Также известен вид оптимальной позиционной стратегии; оптимальной является стратегия, экстремальная к множеству успешной разрешимости задачи наведения. Таким образом, под решением можно понимать множество успешной разрешимости задачи наведения. Исследованию свойств этого множества и посвящена настоящая работа.

В работе исследуются такие свойства множества успешной разрешимости, как связность сечений и непрерывная зависимость сечений от времени. В работе [3] было показано, что в общем случае нелинейной дифференциальной игры наведения возможны несвязность сечений и разрывная зависимость сечений от времени. А именно было показано, что в некоторой дифференциальной игре на плоскости, рассматриваемой на отрезке  $[0, 1]$ , множество успешной разрешимости в игре наведения на точку  $t = 1$ ,  $x_1 = x_2 = 0$  имеет вид

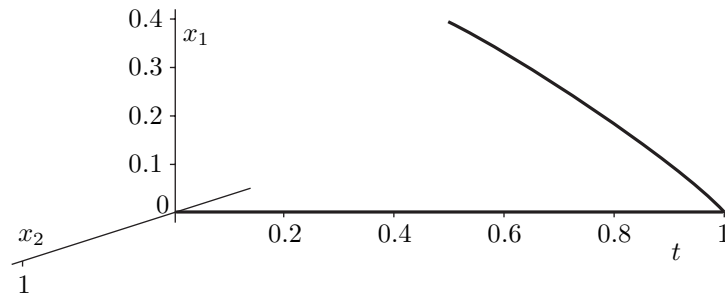
$$\mathcal{W} = \{(t, x_1, x_2) : t \in [0, 1], x_1 = x_2 = 0\} \cup \{(t, x_1, x_2) : t \in [1/2, 1], x_1 = 1 - \exp(t - 1), x_2 = 0\}$$

(см. рисунок).

В настоящей работе исследуются достаточные условия, при которых сечения множества успешной разрешимости задачи первого игрока (задачи наведения) в дифференциальной игре непрерывно зависят от времени и являются связными при связности целевого множества. В работе получено достаточное условие связности сечений и непрерывной зависимости сечений от времени. Полученное условие аналогично теоремам сравнения. Приведены также конкретизации этого условия.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00414, 07-01-96088).

<sup>2</sup>Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия.  
E-mail: ayv@imm.uran.ru



Множество  $\mathcal{W}$

## 2. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы рассматриваем конфликтно управляемые системы вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Предполагается, что первый игрок, распоряжающийся управлением  $u$ , стремится привести систему на множество  $M$  внутри множества  $N$ ,  $M \subset N \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ ; второй игрок, распоряжаясь управлением  $v$ , стремится не допустить этого. Задачу первого игрока в дальнейшем будем называть задачей  $(M, N)$ -наведения. Накладываются следующие условия: множества  $P$  и  $Q$  являются компактами в конечномерном арифметическом пространстве, функция  $f$  непрерывна по совокупности переменных, локально липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет по ней условию подлинейного роста. Также будем предполагать, что выполнено условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса):

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle$$

для всех  $s \in \mathbb{R}^n$  и  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ .

Определим функцию  $H(t, x, s)$  по правилу

$$H(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Следуя формализации, предложенной Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [2], мы рассмотрим игру в классе позиционных стратегий. В качестве стратегии первого игрока мы рассматриваем произвольную функцию  $U: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$ , в качестве стратегии второго игрока — произвольную функцию  $V: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow Q$ . Пошаговое движение в силу позиционной стратегии  $U(t, x)$  из позиции  $(t_*, x_*)$  определяется следующим образом [2]: пусть  $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$  — разбиение отрезка  $[t_*, \vartheta_0]$ ,  $v[\cdot]$  — измеримое управление второго игрока; ломаной Эйлера  $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$  называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[t^k] + \int_{t^k}^t f(\theta, x_\Delta[\theta], u^k, v[\theta]) d\theta$$

на отрезках  $[t^k, t^{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, r-1}$ ; здесь  $u^k = U(t^k, x_\Delta[t^k])$ ,  $x_\Delta[t^0] = x_*$ . Мы рассматриваем конструктивные движения — пределы пошаговых движений при стремлении мелкости разбиения к нулю. Обозначим множество конструктивных движений, выходящих из позиции  $(t_*, x_*)$ , под действием стратегии  $U$  через  $X[t_*, x_*, U]$ . Отметим, что при упомянутых условиях из теоремы Арцела следует, что множество  $X[t_*, x_*, U]$  непусто для любой начальной позиции  $(t_*, x_*)$  и

любой стратегии  $U$  (в связи с этим см. [2]). Аналогично определяются движения в силу стратегии второго игрока и движения в силу стратегий обоих игроков [2]. Таким образом, задача первого игрока состоит в том, чтобы привести любое конструктивное движение, выходящее из данной позиции  $(t_*, x_*)$ , на целевое множество; задача второго игрока состоит в том, чтобы хотя бы одно конструктивное движение уклонить от целевого множества.

В описанной ситуации справедлива теорема об альтернативе, установленная Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным [2]. В частности, из нее следует эквивалентность понятий множества успешной разрешимости задачи наведения (множества всех точек, из которых разрешима задача первого игрока) и максимального  $u$ -стабильного моста. Множество  $W$  называется стабильным в задаче  $(M, N)$ -наведения, если  $W \subset N$  и для каждой позиции  $(t_*, x_*) \in W$  и каждого  $v_* \in Q$  существует решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad (2)$$

выходящее из позиции  $(t_*, x_*)$ , со свойством:  $(\tau, y(\tau)) \in M$  для некоторого  $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$  и  $(t, y(t)) \in W$  при всех  $t \in [t_*, \tau]$ . Также из теоремы об альтернативе следует, что оптимальная стратегия является экстремальной к максимальному  $u$ -стабильному мосту. Стратегия называется экстремальной к множеству  $W$ , если

$$U(t_*, x_*) \in \text{Arg min} \left\{ \max_{v \in Q} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v) \rangle : u \in P \right\},$$

где

$$w_* \in \text{Arg min} \{ \|w - x_*\| : (t_*, w) \in W \}.$$

Далее максимальный стабильный мост (множество успешной разрешимости) в задаче  $(M, N)$ -наведения обозначаем через  $\mathfrak{M}$ .

Сечением множества  $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  при  $t \in [t_0, \vartheta_0]$  называется множество

$$E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in E\}.$$

Пусть  $z : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — некоторая непрерывная функция, локально липшицева по фазовой переменной, удовлетворяющая по ней условию подлинейного роста. Решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = z(t, x)$$

с начальными условиями  $z(t_*) = x_*$ , определенное на всем промежутке  $[t_0, \vartheta_0]$ , будем обозначать через  $\phi_z(\cdot, t_*, x_*)$ . Для каждой позиции  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  обозначим  $\psi_z(t_*, x_*) \triangleq \phi_z(t_0, t_*, x_*)$ .

Будем называть множество  $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$   $z$ -невозрастающим по сечениям, если

$$(\bar{x} \in E[t_*]) \Rightarrow (\phi_z(t_*, t^*, \bar{x}) \in E[t_*] \quad \forall t_* \in [t_0, t^*]).$$

В случае, когда  $z(t, x) \equiv 0$ , будем говорить, что множество  $E$  не возрастает по сечениям.

### 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть  $d(x, A)$  — расстояние от точки  $x \in \mathbb{R}^n$  до множества  $A \subset \mathbb{R}^n$ , определяемое евклидовой нормой  $\|\cdot\|$ . Мы рассматриваем сечение множества  $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  как многозначное отображение  $t \mapsto E[t]$ . Следуя [4, 5], обозначим

$$\limsup_{t \rightarrow t_*} E[t] \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \liminf_{t \rightarrow t_*} d(y, E[t]) = 0 \right\},$$

$$\liminf_{t \rightarrow t_*} E[t] \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{t \rightarrow t_*} d(y, E[t]) = 0 \right\}.$$

Рассмотренные множества называются верхним и нижним пределом многозначного отображения соответственно (см. [4, 5]). Имеет место включение

$$\liminf_{t \rightarrow t_*} E[t] \subset \limsup_{t \rightarrow t_*} E[t]. \quad (3)$$

Если  $E_1$  и  $E_2$  — множества в пространстве позиций такие, что  $E_1 \subset E_2 \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ , то для каждого  $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$  справедливо включение

$$\liminf_{t \rightarrow t_*} E_1[t] \subset \liminf_{t \rightarrow t_*} E_2[t]. \quad (4)$$

Аналогично вводятся правый (левый) верхний и нижний пределы многозначного отображения. Также для правых (левых) пределов справедливы неравенства (3) и (4). Многозначное отображение называется полунепрерывным сверху, если выполняется включение

$$\limsup_{t \rightarrow t_*} E[t] \subset E[t_*] \quad \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0];$$

полунепрерывным снизу, если выполняется включение

$$E[t_*] \subset \liminf_{t \rightarrow t_*} E[t] \quad \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0].$$

Многозначное отображение непрерывно, если полунепрерывно сверху и снизу [5]. Аналогично вводятся понятия полунепрерывности сверху (снизу) и непрерывности справа и слева соответственно. Отметим, что если  $E$  — замкнутое множество, то отображение  $t \mapsto E[t]$  всегда полунепрерывно сверху. Таким образом, для замкнутых множеств полунепрерывность снизу и непрерывность эквивалентны.

Условия непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости и их связности формулируются в следующем утверждении.

**Теорема (основная).** Пусть существует непрерывная функция  $z(\cdot, \cdot): [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая по второй переменной условиям локальной липшицевости и подлинейного роста, такая, что  $N$  есть  $z$ -невозрастающее по сечениям множество и  $H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x) \rangle$  для всех  $(t, x) \in N$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

- 1) если отображение  $t \mapsto M[t]$  непрерывно справа, то отображение  $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$  непрерывно;
- 2) если  $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$  и  $M$  линейно связно, то и множества  $\mathfrak{W}[t]$ ,  $t \in [t_0, \vartheta_0]$ , — линейно связные множества.

Доказательство теоремы будет дано в разд. 5. Отметим два важных частных случая, когда заключения теоремы выполнены.

**Следствие 1.** Пусть  $N$  не возрастает по сечениям и  $H(t, x, s) \leq 0$  для всех  $(t, x) \in N$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

- 1) если отображение  $t \mapsto M[t]$  непрерывно справа, то отображение  $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$  непрерывно;
- 2) если  $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$  и  $M$  линейно связно, то и множества  $\mathfrak{W}[t]$ ,  $t \in [t_0, \vartheta_0]$ , — линейно связные множества.

**Следствие 2.** Пусть функция динамики  $f$  представляется в виде

$$f(t, x, u, v) = g(t, x) + h(t, u, v)$$

для некоторых функций  $g: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $h: [t_0, \vartheta_0] \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ , причем выполнено условие седловой точки в маленькой игре

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, h(t, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, h(t, u, v) \rangle \quad \forall t \in [t_0, \vartheta_0], \quad \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть также  $N$  есть  $g$ -невозрастающее по сечениям множество и

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, h(t, u, v) \rangle \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \vartheta_0], \quad \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

- 1) если отображение  $t \mapsto M[t]$  непрерывно справа, то отображение  $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$  непрерывно;
- 2) если  $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$  и  $M$  линейно связно, то и множества  $\mathfrak{W}[t]$ ,  $t \in [t_0, \vartheta_0]$ , — линейно связные множества.

Доказательства следствий 1 и 2 будут даны также в разд. 5.

#### 4. ОДНО СВОЙСТВО СТАБИЛЬНЫХ ДОРОЖЕК

Следующее утверждение дает условия, при которых целая кривая принадлежит множеству успешной разрешимости в задаче  $(M, N)$ -наведения. Оно основано на теореме Н.Н. Красовского и А.И. Субботина о стабильной дорожке [2].

**Лемма 1.** Пусть  $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$ ,  $t_* \in [t_0, t^*]$ . Пусть существует абсолютно непрерывная функция  $w(\cdot): [t_*, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что

- 1)  $w(t^*) = x_*$ ;
- 2)  $(t, w(t)) \in N$  для всех  $t \in [t_*, t^*]$ ;
- 3)  $H(t, w(t), s) \leq \langle s, \dot{w}(t) \rangle$  для почти всех  $t \in [t_*, t^*]$  и всех  $s \in \mathbb{R}^n$ .

Тогда  $(t, w(t)) \in \mathfrak{W}$  для всех  $t \in [t_*, t^*]$ .

Отметим в виде следствий результаты, справедливые в случае неположительности гамильтониана.

**Следствие 3.** Пусть  $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$ ,  $t_* \in [t_0, t^*]$ . Если  $(t, x_*) \in N$  при всех  $t \in [t_*, t^*]$  и  $H(t, x_*, s) \leq 0$  для всех  $s \in \mathbb{R}^n$  и  $t \in [t_*, t^*]$ , то  $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$  для всех  $t \in [t_*, t^*]$ .

**Следствие 4.** Пусть  $N$  не возрастает по сечениям и  $H(t, x, s) \leq 0$  для всех  $(t, x) \in N$  и  $s \in \mathbb{R}^n$ ; тогда  $\mathfrak{W}$  не возрастает по сечениям.

Доказательство обоих следствий будет дано после доказательства леммы 1.

**Доказательство леммы 1.** Рассмотрим вначале задачу  $(\{(t^*, x_*)\}, N)$ -наведения. Обозначим множество успешной разрешимости в этой задаче через  $\widehat{W}$ . По теореме об альтернативе множество  $\widehat{W}$  является максимальным  $u$ -стабильным мостом в задаче  $(\{(t^*, x_*)\}, N)$ -наведения. Покажем, что  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\}$  является стабильной дорожкой в рассматриваемой сейчас задаче.

Согласно формуле (48.3) из [2]  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\}$  является стабильной дорожкой, если для почти всех  $t \in [t_*, t^*]$

$$\dot{w}(t) \in \mathcal{H}(t, w(t)),$$

где

$$\mathcal{H}(t, x) \triangleq \bigcap_{v \in Q} \text{co}\{f(t, x, u, v): u \in P\}.$$

Также согласно [2, лемма 48.1] вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  принадлежит множеству  $\mathcal{H}(t, x)$  тогда и только тогда, когда  $H(t, x, s) \leq \langle s, h \rangle$  для всех  $s \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, по предположению имеем, что  $\dot{w}(t) \in \mathcal{H}(t, w(t))$  для почти всех  $t \in [t_*, t^*]$ . Тогда  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\}$  является стабильной дорожкой для системы (1). Поскольку  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\} \subset N$ , по теореме 48.1 из [2] имеем  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\} \subset \widehat{W}$ .

Докажем, что множество  $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$  является  $u$ -стабильным мостом в задаче  $(M, N)$ -наведения. В самом деле,  $M \subset \mathfrak{W} \cup \widehat{W} \subset N$ . Пусть теперь  $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ . Если  $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in \mathfrak{W}$ , то по определению  $\mathfrak{W}$  для каждого  $v_* \in Q$  существует решение дифференциального включения (2) с начальными данными  $y(\widehat{t}) = \widehat{x}$ , содержащееся в  $\mathfrak{W}$  вплоть до встречи с  $M$ . Пусть  $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in \widehat{W}$ . Зафиксируем  $v_* \in Q$ . По определению  $\widehat{W}$  существует решение включения (2)  $y_1(\cdot)$  со свойствами:  $y_1(\widehat{t}) = \widehat{x}$ ,  $y_1(t) \in \widehat{W}$  для всех  $t \in [\widehat{t}, t^*]$ ,  $y_1(t^*) = x_*$ . Поскольку  $\mathfrak{W}$  является максимальным  $u$ -стабильным мостом в задаче  $(M, N)$ -наведения, существует функция  $y_2(\cdot)$ , являющаяся решением дифференциального включения (2), со свойствами:  $y_2(t^*) = x_*$ ,  $(\xi^*, y_2(\xi^*)) \in M$  для некоторого  $\xi^* \in [t^*, \vartheta_0]$  и  $(t, y_2(t)) \in \mathfrak{W}$  для всех  $t \in [t^*, \xi^*]$ . Определим функцию  $y^*(\cdot): [\widehat{t}, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$y^*(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [\widehat{t}, t^*], \\ y_2(t), & t \in [t^*, \vartheta_0]. \end{cases}$$

Функция  $y^*(\cdot)$  абсолютно непрерывна, является решением дифференциального включения (2) при фиксированном  $v_*$ ,  $(\xi^*, y^*(\xi^*)) \in M$ ,  $(t, y^*(t)) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ ,  $t \in [\widehat{t}, \xi^*]$ . Таким образом, для каждого  $(\widehat{t}, \widehat{x})$  и  $v_* \in Q$  существует решение дифференциального включения (2), выходящее из  $(\widehat{t}, \widehat{x})$  и содержащееся в  $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$  вплоть до встречи с  $M$ .

Поскольку множество  $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$  является  $u$ -стабильным мостом в задаче  $(M, N)$ -наведения, а множество  $\mathfrak{W}$  по определению есть наибольший стабильный мост, имеем  $\widehat{W} \subset \mathfrak{W}$ . Следовательно,  $\{(t, w(t)): t \in [t_*, t^*]\} \subset \widehat{W} \subset \mathfrak{W}$ .  $\square$

**Доказательство следствия 3.** В самом деле, рассмотрим  $w(t) = x_*$ ,  $t \in [t_*, t^*]$ . Тогда для этой функции  $w(\cdot)$  справедливы предположения леммы 1. Таким образом,  $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$ .  $\square$

**Доказательство следствия 4.** В самом деле, пусть  $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$ . Тогда в силу условия невозрастания множества  $N$  для всех  $t \in [t_0, t^*]$  справедливо включение  $(t, x_*) \in N$ . Также по условию  $H(t, x_*, s) \leq 0$  для всех  $t \in [t_0, t^*]$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ . Согласно следствию 3 имеем  $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$  для всех  $t \in [t_0, t^*]$ . Таким образом, множество  $\mathfrak{W}$  не убывает по сечениям.  $\square$

## 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА УСПЕШНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Настоящий раздел посвящен доказательству утверждений, сформулированных в разд. 3.

При доказательстве теоремы используется следующая

**Лемма 2.** Пусть выполнены предположения теоремы, и пусть также  $(t_*, x_*) \in \mathfrak{W}$ . Тогда

$$(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in \mathfrak{W} \quad \forall t \in [t_0, t_*]. \quad (5)$$

**Доказательство.** В силу того что  $N$  —  $z$ -невозрастающее по сечениям множество, имеем

$$(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in N \quad \forall t \in [t_0, t_*].$$

Также для почти всех  $t \in [t_0, t_*]$

$$\dot{\phi}_z(t, t_*, x_*) = z(t, \phi_z(t, t_*, x_*)),$$

а по предположению теоремы для всех  $(t, x) \in N$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$

$$H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x) \rangle.$$

Тогда из леммы 1 следует, что выполнено включение (5).  $\square$

**Доказательство основной теоремы.** Рассмотрим вначале утверждение 1). Пусть  $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ .

Докажем, что выполнены включения

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \rightarrow t_*+0} \mathfrak{W}[t], \quad (6)$$

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \rightarrow t_*-0} \mathfrak{W}[t]. \quad (7)$$

Пусть  $x \in \mathfrak{W}[t_*]$ . Если  $x \in M[t_*]$ , то, поскольку отображение  $t \mapsto M[t]$  полунепрерывно снизу справа, имеем

$$x \in \liminf_{t \rightarrow t_*+0} M[t]. \quad (8)$$

Поскольку  $M \subset \mathfrak{W}$ , из свойства монотонности нижнего предела (см. (4)) и включения (8) следует, что

$$x \in \liminf_{t \rightarrow t_*+0} \mathfrak{W}[t] \quad \forall x \in M[t_*]. \quad (9)$$

Если  $x \in \mathfrak{W}[t_*] \setminus M[t_*]$ , то, поскольку  $\mathfrak{W}$  —  $u$ -стабильный мост в задаче  $(M, N)$ -наведения, существует решение дифференциального включения (2) такое, что  $y(t_*) = x$ ,  $y(\tau) \in M[\tau]$  для некоторого  $\tau \in (t_*, \vartheta_0]$  и  $y(t) \in \mathfrak{W}[t]$ ,  $t \in [t_*, \tau]$ . Также  $\|y(t) - x\| \leq K(t - t_*)$  для любого  $t \in [t_*, \tau]$  (здесь  $K$  — некоторая величина, зависящая от позиции  $(t_*, x)$ ). Отсюда имеем оценку  $d(x, \mathfrak{W}[t]) \leq K(t - t_*)$ . Следовательно,

$$x \in \liminf_{t \rightarrow t_*+0} \mathfrak{W}[t] \quad \forall x \in \mathfrak{W}[t_*] \setminus M[t_*].$$

Из этого включения и включения (9) следует, что включение (6) выполнено.

Докажем теперь включение (7). Пусть  $x_* \in \mathfrak{W}[t_*]$ . По лемме 2 имеем  $(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in \mathfrak{W}$  при всех  $t \in [t_0, t_*]$ . Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow t_*-0} \phi_z(t, t_*, x_*) = x_*,$$

закключаем, что имеет место включение

$$x_* \in \liminf_{t \rightarrow t_*-0} \mathfrak{W}[t].$$

Таким образом, включение (7) также выполняется.

Включения (6) и (7) справедливы для любого  $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ . Отсюда получаем, что многозначное отображение  $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$  полунепрерывно снизу на отрезке  $[t_0, \vartheta_0]$ . Так как множество  $\mathfrak{W}$  замкнуто, отображение  $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$  непрерывно на отрезке  $[t_0, \vartheta_0]$ .

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть  $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ ,  $x_1, x_2 \in \mathfrak{W}[t_*]$ . Выберем  $v_* \in Q$ . Поскольку множество  $\mathfrak{W}$   $u$ -стабильно, существуют решения  $y_1(\cdot)$  и  $y_2(\cdot)$  дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co}\{f(t, y(t), u, v_*): u \in P\}$$

с начальными данными  $y_1(t_*) = x_1$  и  $y_2(t_*) = x_2$  такие, что  $(\vartheta_0, y_i(\vartheta_0)) \in M$ ,  $y_i(t) \in \mathfrak{W}[t]$ ,  $t \in [t_*, \vartheta_0]$ . Поскольку  $M$  — связное множество, существует кривая  $\{(\vartheta_0, \zeta_0(\lambda)): \lambda \in [0, 1]\} \subset M$ , соединяющая точки  $(\vartheta_0, y_1(\vartheta_0))$  и  $(\vartheta_0, y_2(\vartheta_0))$ . Рассмотрим кривую  $\{(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)): \lambda \in [0, 3]\}$  в пространстве  $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ :

$$(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \triangleq \begin{cases} (t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*), y_1(t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*))), & \lambda \in [0, 1], \\ (\vartheta_0, (\lambda - 1)\zeta_0), & \lambda \in [1, 2], \\ (\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0), y_2(\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0))), & \lambda \in [2, 3]. \end{cases}$$

Эта непрерывная кривая соединяет точки  $(t_*, x_1)$  и  $(t_*, x_2)$  в пространстве  $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ . При этом  $(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \in \mathfrak{W}$  по построению. Также  $\xi(\lambda) \geq t_*$ ,  $\lambda \in [0, 3]$ . Следовательно, по лемме 2 имеем

$$\phi_z(t_*, \xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \in \mathfrak{W}[t_*], \quad \lambda \in [0, 3].$$

Поскольку  $\xi(0) = \xi(2) = t_*$ ,  $\zeta(0) = x_1$ ,  $\zeta(2) = x_2$  и  $\phi_z(t_*, t_*, x) = x$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ , непрерывная кривая  $\{\phi_z(t_*, \xi(\lambda), \zeta(\lambda)) : \lambda \in [0, 3]\}$  соединяет точки  $x_1$  и  $x_2$ . Таким образом, утверждение 2) доказано.  $\square$

**Доказательство следствия 1.** Полагаем в теореме  $z(t, x) = 0$  при всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Доказательство следствия 2.** Полагаем в теореме  $z(t, x) = g(t, x)$  при всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ .  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Авербух Ю.В. К вопросу о структуре множества позиционного поглощения в игровой задаче наведения // Проблемы управления и информатики. 2006. № 3. С. 5–9.
4. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
5. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.