Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы

А. И. Мальцев (Москва)

Абстрактная группа G называется нильпотентной, если ее нижний центральный ряд $G = G^1 \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$ через конечное число шагов достигает единичной подгруппы *. Магнус (W. Magnus, [10]) показал, что если G — свободная группа, то хотя все группы ее нижнего центрального ряда и отличны от единицы, их пересечение все же оказывается равным единице. Эта теорема послужила поводом к следующему обобщению понятия нильпотентности:

Группа G называется обобщенно нильпотентной или N-группой, если пересечение подгрупп ее нижнего центрального ряда равно единице **. N-группы тесно связаны с нильпотентными группами. Действительно, пусть $\{H_\alpha\}$ — некоторая система групп. Мы скажем, что группа G аппроксимируема группами $\{H_\alpha\}$, если для каждого отличного от единицы элемента g из G существует такое гомоморфное отображение G в одну из групп H_α, при котором образ g в H_α отличен от единицы. Ясно, что обобщенно нильпотентные группы могут быть определены как группы, аппроксимирующиеся нильпотентными группами.

Аналогичные понятия могут быть установлены также для колец и алгебр. Кольцо O называется нильпотентным, если в цепочке его степеней $O \supset O^2 \supset O^3 \supset \ldots \supset O^n \supset \ldots$ через конечное число шагов встречается нуль. Кольцо O называется обобщенно нильпотентным или N-кольцом, если нулю равно пересечение всех его конечных степеней. Зависимость между обобщенно нильпотентными алгебрами и группами становится явной, если воспользоваться присоединенным умножением.

Соотношение

$$a \circ b = a + b + ab.$$

определяет для элементов кольца O новую операцию $\circ$, которая на-

---

* G^{i+1} есть подгруппа, порожденная коммутаторами $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$, где $g \in G$, $h \in G^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Иногда приходится пользоваться понятием убывающего центрального ряда: цепочка подгрупп

$$G \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$$

называется убывающим центральным рядом группы G, если для всех $g \in G$, $h \in G^i$ коммутаторы (g, h) содержатся в G^{i+1} $(i = 1, 2, \ldots)$ (см. А. Г. Курош [7]).

** См., например, Р. Бэр (R. Baer) [3].

зывается присоединенным умножением в O^*. Присоединенное умножение ассоциативно; роль единицы в нем играет нуль кольца O, а взаимно обратными являются элементы a, b, связанные в O равенствами $a+b+ab=b+a+ba=0$. Присоединенно обратимые элементы кольца O образуют относительно присоединенного умножения группу $\mathfrak{G}(O)$, которую мы условимся называть присоединенной. Если O имеет единицу e, то соответствие $e+a\to a$ отображает изоморфно мультипликативную группу обыкновенных обратимых элементов O на $\mathfrak{G}(O)$ и присоединенное умножение в этом случае не дает ничего нового. Если же O единицы не содержит, то рассмотрение присоединенной группы часто оказывается полезным.

Применяя понятие присоединенного умножения к обобщенно нильпотентным алгебрам, мы сразу замечаем, что присоединенные группы N-алгебр, а также все их подгруппы являются N-группами. Отсюда возникает вопрос об условиях, при которых заданная N-группа изоморфна подгруппе присоединенной группы некоторой N-алгебры. Нахождение необходимых и достаточных условий такой вложимости является основной задачей настоящей работы. Чтобы сформулировать их, введем следующие определения:

Элемент g некоторой N-группы G называется ее обобщенным p-элементом (p — простое), если для каждого i найдется такое f, что $g^{p^f}\in G^i$. Аналогично, элемент g из G называется периодическим в G, если для каждого i найдется такое целое число $n>0$, что $g^n\in G^i$. Наконец, мы скажем, что $g\neq 1$ имеет бесконечную p-высоту в G, если для любых i и f найдутся элементы $x\in G$ и $a\in G^i$, удовлетворяющие соотношению $x^{p^f}=ga$.

Мы доказываем следующую теорему:

Для того чтобы N-*группа* G *могла быть изоморфно вложена в присоединенную группу некоторой* N-*алгебры над полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы* G *не содержала периодических элементов; чтобы* N-*группа* G *могла быть изоморфно вложена в присоединенную группу* N-*алгебры над полем характеристики* $p>0$, *необходимо и достаточно, чтобы* G *не содержала элементов бесконечной* p-*высоты.*

В качестве приложения рассматривается вопрос об условиях, при которых свободное произведение N-групп будет N-группой. Упомянутая выше теорема Магнуса показывает, что свободное произведение бесконечных циклических групп есть N-группа. Обобщая эту теорему, Д. И. Фукс-Рабинович [6] высказал утверждение, что свободные произведения произвольных абелевых групп также являются N-группами. Отсюда возникло предположение, что вообще все свободные произведения N-групп будут N-группами. Однако и первое, и второе оказывается неверным.**

---

* С различными целями эту операцию ввели приблизительно в одно время разные лица (см., например, [5], [11], [13]). По существу, этой же операцией пользовался, не вводя ее явно, и И. Д. Адо [1].

** Доказательство Д. И. Фукс-Рабиновича, неверное в общем случае, однако проходит, если заданные абелевы группы не содержат элементов конечного порядка.

В § 3 даются необходимые, а также достаточные условия для того, чтобы свободное произведение N-групп было N-группой. Если перемножаемые группы нильпотентны, то необходимые условия являются вместе с тем и достаточными. Именно, свободное произведение нильпотентных групп тогда и только тогда является N-группой, если либо все эти группы не содержат элементов конечного порядка, либо для некоторого фиксированного простого числа p ни одна из них не содержит элементов бесконечной p-высоты.

Естественным обобщением N-групп являются группы, у которых нижний центральный ряд достигает единицы на каком-нибудь, может быть, и трансфинитном месте. В обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [9] такие группы предложено называть ZD-группами. Наименьшее трансфинитное число α, для которого $G^{\alpha}=1$, удобно называть классом этой группы. Используя присоединенные группы аналогично определяемых ZD-алгебр, мы показываем, что для каждого трансфинитного числа α ZD-группы класса α действительно существуют. Тем самым вопрос XVIII указанного обзора решается положительно. Рассматривая вместо нижнего центрального ряда убывающий ряд коммутантов группы, можно поставить аналогичный вопрос и относительно существования групп с произвольно длинным рядом коммутантов (вопрос XII обзора Куроша-Черникова). Присоединенные группы надлежаще выбранных алгебр дают положительный ответ и на этот вопрос. Свойства свободного произведения двух циклических групп второго порядка показывают, что на вопросы XXIX и XXXI упомянутого обзора должен быть дан отрицательный ответ.

Предварительные результаты, содержащиеся в пп. 1, 2, не являются новыми и могут быть найдены, например, в работах И. Д. Адо [1] и В. Андрунакиевича [2]. Основные понятия и теоремы абстрактной теории групп, используемые в настоящей статье, изложены в книге А. Г. Куроша [7].

§ 1. Присоединенные группы

1. Предварительные замечания. Рассмотрим некоторое ассоциативное кольцо O. Как уже было сказано, операция

$$a \circ b = a + b + ab$$

называется присоединенным умножением в O. Совокупность элементов $a \in O$, для которых в O существует x, удовлетворяющий соотношению

$$a + x + ax = x + a + xa = 0, \tag{1}$$

является относительно присоединенного умножения группой — присоединенной группой $\mathfrak{G}(O)$ кольца O. Из (1) видно, что совокупность элементов какого-либо подкольца O_1 из O, обратимых в O_1, есть подгруппа группы $\mathfrak{G}(O)$. Если O_1 — двусторонний идеал O, то не-

посредственная проверка показывает, что $\mathfrak{G}(O_1)$ будет нормальным делителем в $\mathfrak{G}(O)$.

Покажем, что *фактор-группа* $\mathfrak{G}(O)/\mathfrak{G}(O_1)$ *изоморфна соответствующей подгруппе присоединенной группы кольца вычетов* O/O_1.

В самом деле, если g и g_1 принадлежат одному и тому же смежному классу $\mathfrak{G}(O)$ по $\mathfrak{G}(O_1)$, то $g_1 = g \circ a$, где a — обратимый элемент O_1. Но $g \circ a = g + a + ga$, следовательно, $g_1 - g = a + ga \in O_1$. Обратно, если g_1 и g сравнимы по идеалу O_1 и x — присоединенно обратный для g, то

$$g_1 = g + a, \quad g + x + gx = 0 \quad (a \in O_1),$$

$$g^{-1} \circ g_1 = x + g + a + gx + ax = a + ax \in O_1,$$

т. е. g_1 и g сравнимы по $\mathfrak{G}(O_1)$, что и требовалось доказать.

Заметим еще, что если в кольце O произведение любых двух элементов равно нулю, то присоединенное умножение совпадает со сложением и присоединенная группа $\mathfrak{G}(O)$ изоморфна аддитивной группе O.

2. Прямые суммы. Рассмотрим систему $\{O_\alpha\}$ колец или алгебр над одним и тем же полем. Как известно, прямой суммой ΣO_α называется кольцо O, элементами которого являются всевозможные системы $\{a_\alpha\}$ элементов $a_\alpha \in O_\alpha$ при условии, что только конечное число элементов в каждой системе отлично от нуля. Складываются и умножаются эти системы по правилам:

$$\{a_\alpha\} + \{b_\alpha\} = \{a_\alpha + b_\alpha\}, \quad \{a_\alpha\}\{b_\alpha\} = \{a_\alpha b_\alpha\},$$

Если O_α — алгебры над полем P, то полагают также

$$\lambda\{a_\alpha\} = \{\lambda a_\alpha\}, \quad \lambda \in P.$$

Если в этом определении отбросить требование конечности числа ненулевых элементов в системах $\{a_\alpha\}$, то получим определение полной прямой суммы колец или алгебр. Прямое и полное прямое произведения групп строятся совершенно аналогично и напоминать их определения мы не будем. Отметим тот очевидный факт, что *присоединенные группы прямой и полной прямой суммы колец распадаются соответственно в прямое и полное прямое произведение присоединенных групп этих колец.*

Полные прямые произведения для нас будут важны вследствие своей связи с понятием аппроксимируемости групп. Пусть $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$ — произвольная система групп. Группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируема группами системы $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$, если для каждого $g \neq 1$ из $\mathfrak{G}$ существует такое гомоморфное отображение $\mathfrak{G}$ в одну из групп этой системы, при котором образ g отличен от единицы. Покажем, что $\mathfrak{G}$ *тогда и только тогда аппроксимируема системой* $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$, *если* $\mathfrak{G}$ *изоморфна подгруппе полного прямого произведения групп* $\mathfrak{H}_\beta$, *каждая из которых изоморфна какой-либо группе системы* $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{G}$ аппроксимируема группами $\{\mathfrak{G}_\alpha\}$. Согласно условию, каждому элементу $g \neq 1$, $g \in \mathfrak{G}$, отвечает гомоморфное отображение $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_{\alpha_g}$, при котором образ g отличен от единицы. Обозначим через $\mathfrak{H}_g$ группу, изоморфную $\mathfrak{G}_{\alpha_g}$, и фиксируем гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}_g$, при котором образ g отличен от единицы. Если $a \in \mathfrak{G}$, то пусть a_g означает образ a в $\mathfrak{H}_g$. Рассмотрим полное прямое произведение $\mathfrak{H}$ групп $\mathfrak{H}_g$. Соответствие $a \to \{a_g\}$ является гомоморфным отображением $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}$. Так как для $a \neq 1$ $a_a \neq 1$, то это отображение изоморфно. Наоборот, допустим, что $\mathfrak{G}$ есть подгруппа полного прямого произведения $\mathfrak{H}$ некоторых групп $\mathfrak{H}_\beta$. Каждый элемент $\mathfrak{G}$ есть система $\{h_\beta\}$. Отображения $\{h_\beta\} \to h_\beta$ представляют собою систему гомоморфизмов, обладающую всеми необходимыми свойствами для того, чтобы $\mathfrak{G}$ аппроксимировалась группами $\{\mathfrak{H}_\beta\}$.

3. Свободные произведения. Свободным произведением алгебр A_α над одним и тем же полем P называется алгебра A над полем P, образованная по следующему правилу. В каждой из алгебр A_α выбирается база $e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots$, и из элементов этих баз составляются «слова» вида:

$$e_{i_1}^{\alpha_1} e_{i_2}^{\alpha_2} \ldots e_{i_s}^{\alpha_s}, \text{ где } \alpha_i \neq \alpha_j, \ i \neq j; \ i, j = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots$$

Эти «слова», по определению, дают базу A. Чтобы два слова $e_{i_1}^{\alpha_1} \ldots e_{i_s}^{\alpha_s}$ и $e_{j_1}^{\beta_1} \ldots e_{j_r}^{\beta_r}$ перемножить, пишут их одно за другим. Если $\alpha_s \neq \beta_1$, то получится снова «слово», которое и называется произведением двух первых. Если $\alpha_s = \beta_1$, то в новой последовательности пару элементов $e_{i_s}^{\alpha_s} e_{j_1}^{\beta_1}$ из одной и той же алгебры A_{α_s} заменяют их произведением; это произведение выражают через базу A_{α_s} и всю последовательность заменяют суммой с помощью дистрибутивного закона. Если и в получившейся сумме снова встречаются последовательности, у которых рядом стоят элементы одной и той же алгебры, то такие элементы снова перемножают и т. д. Алгебра A, полученная таким образом, на самом деле не зависит от выбора базисов в A_α. Линейные комбинации элементов $e_1^\alpha, e_2^\alpha, \ldots$ содержатся в A и дают подалгебру, изоморфную A_α.

Присоединенная группа свободного произведения A алгебр A_α содержит свободное произведение присоединенных групп этих алгебр в качестве своей подгруппы.

Действительно, алгебра A содержит все A_α в качестве своих подалгебр. Поэтому присоединенные группы $\mathfrak{G}_\alpha$ алгебр A_α являются подгруппами присоединенной группы $\mathfrak{G}$ алгебры A. Обозначим через $\mathfrak{H}$ подгруппу из $\mathfrak{G}$, порожденную элементами всех $\mathfrak{G}_\alpha$. Нужно показать, что $\mathfrak{H}$ есть свободное произведение групп $\mathfrak{G}_\alpha$. Для этого достаточно обнаружить, что два нетождественных произведения $g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \ldots \circ g_{\alpha_r}$ и $g_{\beta_1} \circ g_{\beta_2} \circ \ldots \circ g_{\beta_s}$ не могут быть равны, если рядом стоящие множители каждого из них не принадлежат одной и той же подгруппе $\mathfrak{G}_\alpha$.

Пусть $g_{\alpha_i} = \lambda_{i1} e_{i_1}^{\alpha_i} + \lambda_{i2} e_{i_2}^{\alpha_i} + \cdots + \lambda_{ip} e_{i_p}^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Выполняя присоединенное умножение этих элементов, получим:

$$g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \ldots \circ g_{\alpha_r} = \left(\sum \lambda_{1m} e_{1_m}^{\alpha_1}\right)\left(\sum \lambda_{2m} e_{2_m}^{\alpha_2}\right) \ldots \left(\sum \lambda_{rm} e_{r_m}^{\alpha_r}\right) + \cdots,$$

где опущены члены, выражающиеся через слова меньшей длины. При перемножении сумм, стоящих в правой части равенства, никаких подобных членов получиться не может. Поэтому, зная результат умножения, мы сможем восстановить и сомножители с точностью до коэффициентов пропорциональности из P. Итак, если

$$g_{\alpha_1} \circ g_{\alpha_2} \circ \ldots \circ g_{\alpha_r} = g_{\beta_1} \circ g_{\beta_2} \circ \ldots \circ g_{\beta_s}, \tag{2}$$

$$\text{то} \quad r = s, \quad g_{\beta_i} = \lambda_i g_{\alpha_i}, \quad \text{где} \quad \lambda_i \in P, \quad \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Производя в (2) присоединенное умножение и сравнивая члены длины $r-1$, начинающиеся элементами базы A_{α_2}, получим:

$$\lambda_2 \ldots \lambda_r = 1, \quad \text{т. е.} \quad \lambda_1 = 1, \quad g_{\alpha_1} = g_{\beta_1}.$$

Умножив обе части соотношения (2) на присоединенно обратный элемент для g_{α_1}, мы сведем его к равенству:

$$g_{\alpha_2} \circ \ldots \circ g_{\alpha_r} = g_{\beta_2} \circ \ldots \circ g_{\beta_r},$$

откуда получим последовательно: $1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$, что и требовалось доказать.

4. Обобщенно нильпотентные алгебры. Если O — какое-либо кольцо, то через O^n $(n = 1, 2, \ldots)$ обозначают подкольцо, составленное из сумм всевозможных произведений по n сомножителей из кольца O. Ясно, что O^n есть двусторонний идеал в O. Кольцо O называется обобщенно нильпотентным или N-кольцом, если пересечение всех его степеней равно нулю. Каждое подкольцо N-кольца, очевидно, само является N-кольцом. Также ясно, что прямая и полная прямая суммы N-колец являются N-кольцами. Наконец, *свободное произведение* N-*алгебр также является* N-*алгеброй.*

В самом деле, рассмотрим сначала какую-нибудь нильпотентную алгебру B. Обозначим через $e^1_\alpha, e^1_\beta, \ldots$ элементы B, образы которых в B/B^2 составляют базу этой алгебры. Пусть $e^2_\alpha, e^2_\beta, \ldots$ — элементы B^2, образы которых в B^2/B^3 составляют базу B^2/B^3, и т. д. Совокупность $\{e^i_\lambda\}$ будет особой базой алгебры B, которую мы будем называть специальной. Весом произвольного элемента $e \in B$ условимся называть наименьшее число i, для которого $e \overline{\in} B^i$. Рассмотрим систему нильпотентных алгебр $\{A_\alpha\}$ и их свободное произведение A. Выберем в каждой алгебре A_α специальную базу. Всевозможные слова, составленные из элементов этих баз, дадут базу алгебры A. Сумму весов элементов, составляющих слово, назовем весом этого слова. Так как в каждой алгебре A_α произведение двух базисных элементов линейно выражается через базисные элементы строго большего веса, то то же самое можно сказать и о произведении базисных элементов алгебры A. Обозначим через $A^{(n)}$ совокупность элементов A, являющихся линейными комбинациями базисных элементов, имеющих вес не меньше n. Пересечение всех $A^{(n)}$, очевидно, есть нуль. С другой стороны, $A^n \subset A^{(n)}$, и, таким образом, пересечение алгебр A^n также есть нуль.

Мы доказали, что свободное произведение нильпотентных алгебр есть N-алгебра. Общий случай произведения N-алгебр легко сво-

дится к указанному. В самом деле, пусть $\{A_\alpha\}$ — система N-алгебр. Весом элемента $a_\alpha \in A_\alpha$ условимся опять называть число i, для которого $a_\alpha \in A_\alpha^i$, $a \overline{\in} A_\alpha^{i+1}$. Если a — элемент свободного произведения A алгебр A_α, то мы скажем, что вес a не меньше s, если a можно представить в виде $\Sigma a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_m}$, где $a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$ и сумма весов сомножителей $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_m}$ в каждом члене не меньше s. Ясно, что новое определение веса совпадает со старым в случае, когда алгебры A_α нильпотентны. Обозначая через $A^{(\lambda)}$ совокупность элементов алгебры A, вес которых не меньше λ, мы будем иметь при любом $a \in A$ включения $aA^{(\lambda)} \subset A^{(\lambda+1)}$ и $A^{(\lambda)}a \subset A^{(\lambda+1)}$, откуда $A^\lambda \subset A^{(\lambda)}$. Остается только доказать, что всякий ненулевой элемент a алгебры A имеет конечный вес. Пусть $a = \Sigma \xi e_{i_1}^{\alpha_1} \ldots e_{i_t}^{\alpha_t}$, где e_i^α — элементы какого-нибудь базиса алгебры A_α. Так как сумма — конечная, то для каждого фиксированного α члены суммы содержат явно лишь конечное число элементов $e_{j_1}^\alpha, \ldots, e_{j_k}^\alpha$ базиса алгебры A_α. Выберем такое натуральное число n_α, чтобы образы $\overline{e}_{j_1}^\alpha, \ldots, \overline{e}_{j_k}^\alpha$ элементов $e_{j_1}^\alpha, \ldots, e_{j_k}^\alpha$ в алгебре вычетов $\overline{A}_\alpha = A_\alpha / A_\alpha^{n_\alpha}$ были линейно независимы. Гомоморфизмы $A_\alpha \to \overline{A}_\alpha$ естественным образом распространяются в гомоморфизм $A \to \overline{A}$, где $\overline{A}$ — свободное произведение алгебр $\overline{A}_\alpha$. Образ элемента a в алгебре $\overline{A}$ имеет представление $\overline{a} = \Sigma \xi \overline{e}_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \overline{e}_{i_t}^{\alpha_t}$ и поэтому отличен от нуля. В силу принятых определений, вес образа $\overline{a}$ не может быть меньше веса элемента a. Так как $\overline{a}$ — отличный от нуля элемент свободного произведения нильпотентных алгебр, то по доказанному выше вес $\overline{a}$ конечен; поэтому конечен и вес a.

Рассмотрим нижний центральный ряд какой-нибудь группы

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^n \supset \ldots$$

Если пересечение всех его членов $\mathfrak{G}^n$ есть единица группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ называется обобщенно нильпотентной или N-группой. Очевидно, всякая подгруппа N-группы, а также прямое и полное прямое произведения N-групп являются снова N-группами. Вопрос о том, будет ли свободное произведение N-групп снова N-группой, — более тонкий. Мы рассмотрим его в § 3.

Следующее предложение устанавливает простую связь между N-группами и N-алгебрами:

Присоединенная группа всякой N-*алгебры* A *является* N-*группой. Если основное поле алгебры* A *имеет простую характеристику* $p > 0$, *то ее присоединенная группа* $\mathfrak{G}$ *содержит убывающий центральный ряд, все факторы которого имеют только элементы порядка* p, *а пересечение всех членов равно* 1. *Если же основное поле имеет характеристику нуль, то* $\mathfrak{G}$ *содержит аналогичный убывающий центральный ряд, все фактор-группы которого имеют лишь элементы бесконечного порядка.*

Для доказательства обозначим через $\mathfrak{G}_n$ присоединенную группу алгебры A^n. Согласно п. 1 $\mathfrak{G}_n$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, а фактор-группа $\mathfrak{G}_{n-1}/\mathfrak{G}_n$ содержится в присоединенной группе алгебры вычетов A^{n-1}/A^n. Так как в A^{n-1}/A^n произведение любых двух эле-

ментов равно нулю, то $\mathfrak{G}(A^{n-1}/A^n)$ изоморфна аддитивной группе алгебры A^{n-1}/A^n. Если характеристика поля есть $p>0$, то $pa=0$ и, следовательно, все элементы A^{n-1}/A^n, а вместе с ними и элементы $\mathfrak{G}_n$ имеют порядок p. Если же $p=0$, то элементы $\mathfrak{G}(A^{n-1}/A^n)$ имеют бесконечный порядок. По условию, пересечение идеалов A^n равно нулю; поэтому пересечение групп $\mathfrak{G}_n$ равно их единице. Остается показать, что коммутаторы вида $(g, g_i)=g^{-1}\circ g_i^{-1}\circ g\circ g_i$, $g\in\mathfrak{G}$, $g_i\in\mathfrak{G}_i$, содержатся в $\mathfrak{G}_{i+1}$. Выписывая этот коммутатор подробно, получим:

$$(g, g_i)=g^{-1}+g_i^{-1}+g^{-1}g_i^{-1}+g+g_i+gg_i+ \\ +(g^{-1}+g_i^{-1}+g^{-1}g_i^{-1})(g+g_i+gg_i). \tag{3}$$

Раскрывая здесь скобки и пользуясь соотношениями:

$$g^{-1}+g+g^{-1}g=0, \quad g_i^{-1}+g_i+g_i^{-1}g_i=0,$$

мы видим, что все оставшиеся после приведения члены в правой части соотношения (3) будут произведениями элементов A на элементы A^i, т. е. входят в A^{i+1}. Так как и присоединенно обратный элемент (g_i, g) по тем же причинам входит в A^i, то $(g, g_i)\in\mathfrak{G}_{i+1}$ и, значит, $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{G}_2\supset\mathfrak{G}_3\supset\ldots$ есть убывающий центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ связаны с $\mathfrak{G}_i$ включениями $\mathfrak{G}_i\supset\mathfrak{G}^i$. Поскольку $\bigcap\mathfrak{G}_i=1$, то $\bigcap\mathfrak{G}^i=1$, т. е. $\mathfrak{G}$ есть N-группа.

Итак, присоединенные группы N-алгебр, а также все их подгруппы являются N-группами. Вопрос о том, какие из N-групп изоморфны подгруппам присоединенных групп N-алгебр, рассматривается в следующем параграфе.

§ 2. Условия вложимости

5. Обобщенно периодические элементы. Рассмотрим нижний центральный ряд какой-либо N-группы:

$$\mathfrak{G}\supset\mathfrak{G}^2\supset\mathfrak{G}^3\supset\ldots\supset\mathfrak{G}^n\supset\ldots$$

По условию, пересечение всех его членов равно 1. Элемент $g\in\mathfrak{G}$ мы будем называть обобщенно периодическим, если образ g в каждой фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ имеет конечный порядок. Аналогично, элемент g мы будем называть обобщенным p-элементом, если образ g в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ имеет порядок, равный степени простого числа p. Для краткости слово *обобщенный* мы будем опускать и говорить просто о периодических и p-элементах N-групп. Так как в нильпотентных группах элементы конечного порядка, а также p-элементы образуют нормальные делители, то нормальными делителями N-групп будут и совокупности обобщенных периодических, а также p элементов этих групп. Понятия периодических и p-элементов инвариантны относительно перехода от подгрупп к группе, т. е. если g есть периодический или p-элемент какой-либо подгруппы N-группы $\mathfrak{G}$, то таким же он будет и в самой группе $\mathfrak{G}$.

В каждую N-группу $\mathfrak{G}$ можно естественным образом ввести топологию, принимая члены нижнего центрального ряда $\mathfrak{G}$ за полную си-

стему окрестностей единицы. На языке этой топологии всякий p-элемент g группы $\mathfrak{G}$ обладает тем свойством, что последовательность его степеней $g, g^p, g^{p^2}, \ldots$ сходится к единице. Обратно, если последовательность $g, g^p, g^{p^2}, \ldots$ сходится к единице, то это значит, что для каждой окрестности $\mathfrak{G}^i$ найдется такое f, что g^{p^f} будет входить в $\mathfrak{G}^i$, т. е. g будет p-элементом. Таким образом, в указанной топологии обобщенные p-элементы N-группы совпадают с ее топологическими p-элементами, как они определены, например, в работе А. Г. Куроша [8].

6. Элементы бесконечной p-высоты. По аналогии с абелевыми группами мы будем говорить, что элемент g N-группы $\mathfrak{G}$ имеет в этой группе бесконечную p-высоту, если для каждого i и каждого f в группе $\mathfrak{G}$ найдется элемент x, удовлетворяющий равенству:

$$x^{p^f} = ga_i \quad (a_i \in \mathfrak{G}^i). \tag{4}$$

Иными словами, элемент g имеет бесконечную p-высоту, если для каждого f найдутся сколь угодно близкие в смысле упомянутой топологии элементы, из которых может быть извлечен корень степени p^f. Обозначив образы элементов x, g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ соответственно через $\bar{x}$, $\bar{g}$, мы сможем переписать равенство (4) в равносильной форме: $\bar{x}^{p^f} = \bar{g}$; таким образом, элементами бесконечной p-высоты группы $\mathfrak{G}$ будут те и только те ее элементы, из образов которых в каждой фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ можно извлечь корень любой степени вида p^f.

Пусть g — некоторый p-элемент группы $\mathfrak{G}$, q — простое число, отличное от p. Образ g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ имеет конечный порядок p^f. Для каждого натурального l сравнение

$$xq^l \equiv 1 \pmod{p^f} \tag{5}$$

имеет решение в целых числах. Но из (5) следует, что $(\bar{g}^x)^{q^l} = \bar{g}$, где $\bar{g}$ — образ g в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. Следовательно, каждый обобщенный p-элемент является элементом бесконечной высоты по всякому простому числу q, отличному от p.

Лемма 1. *Если a, b — элементы нильпотентной группы $\mathfrak{G}$, $(k+1)$-й член $\mathfrak{G}^{k+1}$ нижнего центрального ряда которой равен единице, и если $a^{n^s} = 1$, то элемент a перестановочен с $b^{n^{s(k-1)}}$.*

При $k = 1$ лемма тривиальна, так как группа $\mathfrak{G}$ в этом случае абелева. Далее, применяем индукцию, считая лемму верной для групп с меньшей длиной центрального ряда. Пусть образы элементов a, b в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^k = \bar{\mathfrak{G}}$ суть $\bar{a}$, $\bar{b}$. Так как $\bar{a}^{n^s} = 1$, $\bar{\mathfrak{G}}^k = 1$, то

$$\bar{a}\,\bar{b}^{n^{s(k-2)}} = \bar{b}^{n^{s(k-2)}}\bar{a} \text{ или } ab^{n^{s(k-2)}} = b^{n^{s(k-2)}}az,$$

где z — центральный элемент группы $\mathfrak{G}$. Из последнего соотношения непосредственно следует:

$$a^t b^{n^{s(k-2)}} = b^{n^{s(k-2)}} a^t z^t, \tag{6}$$

$$a\left(b^{n^{s(k-2)}}\right)^t = \left(b^{n^{s(k-2)}}\right)^t a z^t. \tag{7}$$

Полагая $t = n^s$, мы из (6), ввиду соотношения $a^{n^s} = 1$, найдем: $z^{n^s} = 1$. Но тогда (7) обратится в требуемое равенство: $ab^{n^{s(k-1)}} = b^{n^{s(k-1)}}a$.

Теорема 1. *Элементы бесконечной p-высоты N-группы $\mathfrak{G}$ перестановочны со всеми ее p-элементами. В частности, каждый q-элемент $\mathfrak{G}$ перестановочен с каждым p-элементом, где q — любое простое число, отличное от p.*

Пусть g — произвольный p-элемент, а h — элемент бесконечной p-высоты N-группы $\mathfrak{G}$. Если g и h не коммутируют, то $(g, h) \neq 1$. Рассмотрим настолько большое число i, что $(g, h) \overline{\in} \mathfrak{G}^i$. Обозначим через $\bar{g}$ и $\bar{h}$ образы элементов g, h в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. По условию, найдется такое f, что

$$\bar{g}^{p^f} = \bar{1}, \tag{8}$$

а с другой стороны, найдется такой элемент x, образ которого $\bar{x}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$ удовлетворяет соотношению:

$$\bar{x}^{p^{f(i-1)}} = \bar{h}. \tag{9}$$

Согласно лемме 1, из равенств (8) и (9) следует перестановочность $\bar{g}$ и $\bar{h}$, т. е. $(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, $(g, h) \in \mathfrak{G}^i$, что противоречит выбору i. Первая часть теоремы доказана. Так как всякий q элемент при $q \neq p$ имеет бесконечную p-высоту, то вторая часть также доказана.

Теперь мы сформулируем необходимые условия для того, чтобы заданная N группа допускала изоморфное вложение в присоединенную группу некоторой N-алгебры. В последующих пунктах будет доказано, что эти условия являются и достаточными.

Теорема 2а. *Присоединенная группа N-алгебры над полем характеристики нуль и все ее подгруппы не содержат обобщенно периодических элементов; присоединенная группа N-алгебры над полем характеристики $p > 0$ и все ее подгруппы не содержат элементов бесконечной p-высоты.*

Пусть A — некоторая N-алгебра над полем характеристики нуль. В п. 4 показано, что присоединенная группа $\mathfrak{G}$ этой алгебры содержит убывающий центральный ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_n \supset \ldots$, все фактор-группы которого не содержат элементов конечного порядка, причем $\bigcap \mathfrak{G}_i = 1$. Предположим, вопреки доказываемому, что $\mathfrak{G}$ содержит обобщенно периодический элемент $g \neq 1$. Выберем такое i, что $g \overline{\in} \mathfrak{G}^i$. Согласно предположению, найдется f, при котором g^f содержится в $\mathfrak{G}^i$. Так как $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}^i$, то тем более, g^f входит в $\mathfrak{G}_i$. Следовательно, образ элемента g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ будет отличным от единицы периодическим элементом. Однако это невозможно, так как фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ периодических элементов не содержат. Поскольку обобщенно периодические элементы любой подгруппы $\mathfrak{G}$ являются обобщенно периодическими и в $\mathfrak{G}$, то первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что A есть N-алгебра над полем характеристики $p > 0$ и $\mathfrak{G}$ — присоединенная группа. Согласно п. 4, группа $\mathfrak{G}$ содержит убывающий центральный ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_2 \supset \mathfrak{G}_3 \supset \ldots$, все фак-

тор-группы которого содержат только элементы порядка p и $\bigcap \mathfrak{G}_i = 1$. Допустим, что в $\mathfrak{G}$ имеется элемент $g \neq 1$ бесконечной p-высоты. Выбираем снова такое i, что $g \bar{\in} \mathfrak{G}_i$. По условию, в группе $\mathfrak{G}$ найдется элемент x, для которого

$$\bar{x}^{p^{i-1}} = \bar{g}, \tag{10}$$

где $\bar{x}$, $\bar{g}$ — образы элементов x, g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^i$. Так как $\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{G}^i$, то из (10) следует, что

$$\bar{\bar{x}}^{p^{i-1}} = \bar{\bar{g}}, \tag{11}$$

где $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{g}}$ — образы элементов x, g в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$. Все элементы фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_3, \ldots, \mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$ имеют порядок p, поэтому элементы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ удовлетворяют соотношению: $\bar{\bar{y}}^{p^{i-1}} = \bar{\bar{1}}$. Таким образом из равенства (11) следует: $\bar{\bar{g}} = \bar{\bar{1}}$ или $g \in \mathfrak{G}_i$, что противоречит выбору числа i. Мы доказали, что $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечной p-высоты. Элементы бесконечной высоты любой погруппы $\mathfrak{G}$ имеют бесконечную p-высоту и в $\mathfrak{G}$. Поэтому никакая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечной p-высоты.

7. Достаточность условий в случае $p > 0$. Мы хотим показать, что условия, формулированные в теореме 2а, достаточны для вложимости заданной группы в присоединенную группу N-алгебры. Рассмотрим сначала случай простой характеристики p. Пусть $\mathfrak{H}$ — какая-либо N-группа, не содержащая элементов бесконечной p-высоты. Следовательно, $\mathfrak{H}$ аппроксимируема нильпотентными группами $\mathfrak{H}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), причем эти группы также не содержат элементов бесконечной высоты.* Если нам удастся каждую группу $\mathfrak{H}_i$ вложить в присоединенную группу некоторой нильпотентной алгебры A_i над простым полем характеристики p, то полное прямое произведение групп $\mathfrak{H}_i$, а в месте с ним и его подгруппа $\mathfrak{H}$ будут вложены в присоединенную группу полной прямой суммы алгебр, изоморфных A^i. Но полная прямая сумма N-алгебр есть N-алгебра; тем самым группа $\mathfrak{H}$ окажется вложенной в присоединенную группу N-алгебры. Следовательно, интересующая нас задача равносильна доказательству того, что нильпотентная группа без элементов бесконечной p-высоты может быть вложена в присоединенную группу N-алгебры. Чтобы свести дело к еще более простому случаю, мы воспользуемся следующей леммой**:

Лемма 2. *Для каждой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ существует такая целочисленная функция $\varphi(s)$, стремящаяся к бесконеч-*

* Пусть $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^2 \supset \ldots$ — центральный ряд $\mathfrak{H}$. Совокупность элементов $\mathfrak{H}$, образы которых в $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^n$ имеют бесконечную p-высоту, обозначим через $\mathfrak{P}_n$. Согласно лемме 2, $\mathfrak{P}_n$ — нормальный делитель $\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{H}/\mathfrak{P}_n$ элементов бесконечной высоты не содержит. Пересечение $\mathfrak{P} = \bigcap \mathfrak{P}_n$ есть совокупность элементов группы $\mathfrak{H}$, имеющих в $\mathfrak{H}$ бесконечную p-высоту. По условию $\mathfrak{P} = 1$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ аппроксимируется группами $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}/\mathfrak{P}_n$, которые ввиду включения $\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{H}^n$ являются нильпотентными.

** Доказательство см. в работе [12], стр. 204.

ности при неограниченном возрастании s, что при произвольном p произведение любого числа p^s-х степеней элементов $\mathfrak{G}$ будет являться $p^{\varphi(s)}$-ой степенью некоторого ее элемента.

Пусть $\mathfrak{H}$ — заданная нильпотентная группа, не содержащая элементов бесконечной p-высоты. Тогда для каждого элемента $h \in \mathfrak{H}$ найдется такое число f, что уравнение

$$x^{p^f} = h \tag{12}$$

не имеет решений в $\mathfrak{H}$. Выберем s настолько большим, что $\varphi(s) > f$, где $\varphi(s)$ — функция из леммы 2. Обозначим через $\mathfrak{H}_s$ подгруппу, порожденную p^s-ми степенями всех элементов $\mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{H}_s$ — нормальный делитель $\mathfrak{H}$, и порядки всех элементов фактор-группы $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$ делят p^s. Из (12), в силу леммы 2, следует, что h не может содержаться в $\mathfrak{H}_s$, и, следовательно, образ его в фактор-группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$ отличен от единицы. Ввиду произвольности h, это означает, что $\mathfrak{H}$ аппроксимируема группами $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Повторяя изложенные выше рассуждения, убеждаемся, что группа $\mathfrak{H}$ будет вложена в присоединенную группу N-алгебры, если удастся вложить в присоединенные группы N-алгебр фактор-группы $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$. Рассмотрим одну из них $F = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_s$. Для каждого элемента $a \in F$ имеет место равенство $a^{p^s} = 1$. Отсюда, как легко видеть, следует, что F содержит конечный убывающий центральный ряд

$$F \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_{n+1} = 1, \tag{13}$$

обладающий тем свойством, что все элементы его фактор-групп F_i/F_{i+1} имеют порядок p. Следовательно, каждая фактор-группа F_i/F_{i+1} есть прямое произведение циклических групп порядка p. Обозначим через $e_{i\alpha}$ те элементы группы F_i, образы которых в F_i/F_{i+1} являются независимыми образующими этой фактор-группы. Индексы α мы условимся брать из упорядоченных множеств. Тогда каждый элемент F будет допускать единственную запись вида

$$a = e_{1\alpha_1}^{i_1} \ldots e_{1\alpha_l}^{i_l} \, e_{2\beta_1}^{j_1} \ldots e_{2\beta_m}^{j_m} \ldots e_{n\gamma_1}^{k_1} \ldots e_{n\gamma_r}^{k_r}, \tag{14}$$

где показатели $i, j, \ldots, k$ суть неотрицательные целые числа, меньшие p, а вторые индексы внутри каждой группы растут.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ групповую алгебру группы F, взятую над простым полем характеристики p. Таким образом элементами $\mathfrak{A}$ являются всевозможные конечные линейные комбинации элементов F. Пусть $\overline{\mathfrak{A}}$ — подалгебра тех линейных комбинаций, сумма коэффициентов которых равна нулю. Покажем, что $\overline{\mathfrak{A}}$ есть N-алгебра. Для этого введем обозначение: $\overline{a} = e - a$, где $a \in F$. Мы имеем:

$$\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a} + \overline{b} \quad (a, b \in F). \tag{15}$$

Элементы вида $\overline{a}$, где $a \in F$, образуют, очевидно, базу алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$. Формулы (14), (15) показывают, что каждый элемент $\overline{\mathfrak{A}}$ может быть

представлен в виде линейной комбинации одночленов

$$\bar{e}^{i_1}_{1\alpha_1} \ldots \bar{e}^{i_l}_{1\alpha_l} \; \bar{e}^{j_1}_{2\beta_1} \ldots \bar{e}^{j_m}_{2\beta_m} \ldots \bar{e}^{k_1}_{n\gamma_1} \ldots \bar{e}^{k_r}_{n\gamma_r}, \tag{16}$$

причем это представление единственно *.

Число

$$i_1 + \cdots + i_l + p(j_1 + \cdots + j_m) + \cdots + p^{n-1}(k_1 + \cdots + k_r)$$

условимся называть весом одночлена (16). Весом линейной комбинации одночленов мы будем называть вес ее наинизшего члена. Покажем, что *вес произведения двух одночленов не меньше суммы весов этих одночленов.*

Действительно, чтобы произведение двух одночленов вида (16) представить линейной комбинацией одночленов того же вида, достаточно пользоваться следующими правилами. Рассмотрим какой-либо одночлен общего вида

$$\bar{e}^{j_1}_{i_1\alpha_1} \; \bar{e}^{j_2}_{i_2\alpha_2} \ldots \bar{e}^{j_u}_{i_u\alpha_u} \quad (0 \leqslant j_m < p). \tag{17}$$

Если в этом одночлене стоят рядом степени одного и того же базисного элемента, например, $\bar{e}^{j_m}_{i\alpha}$ $\bar{e}^{j_{m+1}}_{i\alpha}$ и $j_m + j_{m+1} < p$, то заменяем эту пару выражением $\bar{e}^{j_m+j_{m+1}}_{i\alpha}$. Общий вес при этом не изменится. Если же $j_m + j_{m+1} = j + p$, то произведение $\bar{e}^{j_m}_{i\alpha}$ $\bar{e}^{j_{m+1}}_{i\alpha}$ представляем в виде $\bar{e}^{j}_{i\alpha}$ $\bar{e}^{p}_{i\alpha}$. Так как $\bar{e}^{p}_{i\alpha}$ входит в более высокие члены центрального ряда (13), то $\bar{e}^{p}_{i\alpha}$ можно будет заменить суммой одночленов, принадлежащих этим более высоким членам. Общий вес при этом не уменьшится. Пусть теперь рядом стоящие элементы $\bar{e}^{j_m}_{i_m\alpha_m}$ $\bar{e}^{j_{m+1}}_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}$ таковы, что в нормальной форме (16) их порядок должен был бы быть обратным. Тогда комбинацию $\bar{e}_{i_m\alpha_m}$ $\bar{e}_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}$ заменяем следующим выражением:

$$\bar{e}_\beta \, \bar{e}_\alpha = \bar{e}_\alpha \, \bar{e}_\beta + \bar{e}_\alpha \bar{e}_\beta \overline{(e_\beta, e_\alpha)} + \bar{e}_\alpha \overline{(e_\beta, e_\alpha)} + \bar{e}_\beta \overline{(e_\beta, e_\alpha)} + \overline{(e_\beta, e_\alpha)}, \tag{18}$$

где $e_\alpha = e_{i_m\alpha_m}$, $e_\beta = e_{i_{m+1}\alpha_{m+1}}$, $(e_\beta, e_\alpha) = e_\beta^{-1} e_\alpha^{-1} \, e_\beta \, e_\alpha$. Поскольку (13) является центральным рядом группы F, то коммутатор (e_β, e_α) будет содержаться в члене более высокого номера, чем e_α и e_β. Поэтому веса членов, стоящих в равенстве (18) справа, не меньше веса $\bar{e}_\beta \bar{e}_\alpha$. Применяя наши правила, мы сможем каждое произведение вида (17) выразить через произведения, имеющие больший порядок, и вес членов при этом не уменьшится.

Остается показать, что через конечное число шагов все члены приобретут нормальную форму (16). Это очевидно, так как все наши преобразования не выведут за пределы групповой алгебры, по-

* В самом деле, любое конечное число таких одночленов лежит внутри подалгебры $\mathfrak{A}_0$, порожденной конечной подгруппой F_0 из F. Число одночленов вида (16) с элементами e из F_0 совпадает с общим числом элементов F_0, отличных от единицы, т. е. с числом элементов базы алгебры $\overline{\mathfrak{A}}_0$. Следовательно, одночлены (16) линейно независимы.

строенной на *конечной* группе, порожденной элементами заданного одночлена.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}_i$ совокупность членов алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$, вес которых не меньше i. Пересечение всех $\overline{\mathfrak{A}}_i$ есть нуль. С другой стороны, из только что доказанного утверждения о весе произведения следует, что $\overline{\mathfrak{A}}^i \subset \mathfrak{A}_i$. Таким образом, $\overline{\mathfrak{A}}$ есть N-алгебра. Соответствие

$$a \to \bar{a}, \quad ab \to \bar{a}\bar{b} = \overline{ab} + \bar{a} + \bar{b}$$

дает изоморфное вложение группы F в присоединенную группу алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$. Следовательно, достаточность условий теоремы 2а в случае простой характеристики доказана.

Из приведенных рассуждений легко вытекает следующее, несколько более сильное предложение:

Если p^s-е степени всех элементов группы F равны 1 *и F имеет нижний центральный ряд длины $k+1$, то F вложима в присоединенную группу нильпотентной алгебры $\mathfrak{B}$ над полем характеристики p, причем $\mathfrak{B}^l = 0$, $l = p^{ks} + 1$.*

В качестве алгебры $\mathfrak{B}$ можно взять алгебру вычетов построенной выше алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ по идеалу $\overline{\mathfrak{A}}_l$. Нильпотентность алгебры $\overline{\mathfrak{A}}$ в случае конечной группы F была доказана ранее И. Д. Адо [1].

8. Достаточность в случае нулевой характеристики. Пусть $\mathfrak{H}$ — N-группа, не имеющая обобщенно периодических элементов. Рассмотрим ее нижний центральный ряд

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^2 \supset \mathfrak{H}^3 \supset \cdots.$$

Совокупность $\mathfrak{P}_i$ элементов $\mathfrak{H}$, образы которых в фактор-группе $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^i$ имеют конечный порядок, есть нормальный делитель группы $\mathfrak{H}$. Фактор-группы $F_i = \mathfrak{H}/\mathfrak{P}_i$ нильпотентны, не содержат элементов конечного порядка и вполне аппроксимируют группу $\mathfrak{H}$. Если мы вложим каждую группу F_i в присоединенную группу N-алгебры над полем рациональных чисел, то, в силу п. 4, группа $\mathfrak{H}$ также окажется вложенной в присоединенную группу N-алгебры над полем рациональных чисел. Поэтому рассмотрим одну из групп F_i, пусть F. Группа F нильпотентна и не содержит элементов конечного порядка. Поэтому F можно вложить в полную нильпотентную группу F^* (см. [12]). Обозначим через $\boldsymbol{F}$ нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел, отвечающую группе F^*. Если для элементов $\boldsymbol{F}$ ввести операцию умножения $\times$ по формуле Хаусдорфа-Кэмпбелла:

$$a \times b = a + b + \frac{1}{2}[ab] + \cdots, \tag{19}$$

то получится как раз группа F^*. Согласно Биркгофу (G. Birkhoff, [4]), существует такая ассоциативная нильпотентная алгебра A над полем рациональных чисел, что $\boldsymbol{F}$ изоморфна подалгебре Ли из A_l*. Алгебра

* A_l есть алгебра Ли, образованная элементами алгебры A с теми же операциями скалярного умножения и сложения, что и в A, и с операцией коммутирования: $[ab] = ab - ba$.

A_l нильпотентна, поэтому, вводя для ее элементов умножение $\times$ по формуле (19), мы получим нильпотентную группу $\mathfrak{A}$, содержащую в себе группу F^*. Но $\mathfrak{A}$ изоморфна присоединенной группе алгебры A*. Следовательно, группы F^* и F изоморфны подгруппам присоединенной группы нильпотентной алгебры над полем рациональных чисел, что нам и требовалось доказать. Итак, имеем следующую теорему:

Теорема 2. *Для того чтобы* N-*группа* $\mathfrak{G}$ *была изоморфна подгруппе присоединенной группы некоторой* N-*алгебры над полем простой характеристики* p, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{G}$ *не содержала элементов бесконечной* p-*высоты. Чтобы* $\mathfrak{G}$ *была изоморфна подгруппе присоединенной группы* N-*алгебры над полем характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{G}$ *не содержала обобщенно периодических элементов.*

Необходимость утверждается теоремой 2а, а достаточность только что была показана.

§ 3. Группы с нижним центральным рядом

9. Свободные произведения N-групп. В качестве приложения предыдущих результатов рассмотрим вопрос о том, при каких условиях свободное произведение заданных групп будет N-группой. Так как заданные группы являются подгруппами их свободного произведения, то необходимо, чтобы эти группы сами были N-группами. Из п. 4 и теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для того чтобы свободное произведение* N-*групп было* N-*группой, достаточно, чтобы эти группы были вложимы в присоединенные группы* N-*алгебр над полями одной и той же характеристики.*

Иными словами, если заданные группы не содержат обобщенно периодических элементов или если все они не содержат элементов бесконечной p-высоты при некотором фиксированном простом p, то свободное произведение этих групп есть N-группа.

Доказательство — непосредственное. Действительно, поскольку все заданные группы являются подгруппами присоединенных групп N-алгебр над одним и тем же полем, то свободное произведение их содержится в присоединенной группе свободного произведения N-алгебр. Свободное произведение N-алгебр есть N-алгебра. Поэтому свободное произведение заданных групп есть N-группа.

---

* Присоединяя к алгебре A единицу e, мы получим новую ассоциативную алгебру B, все элементы которой однозначно представляются в виде $\lambda e + a$, $a \in A$. Элементы $e+a$ образуют группу $\mathfrak{B}$, которая, в силу соответствия $e + a \to a$, изоморфна присоединенной группе алгебры A. Всякий элемент $e + a$ допускает запись вида $e + a = \exp u$ $(u \in A)$, так как в качестве u можно взять $\ln(e + a) = a - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{3} a^3 - \cdots$. Формула (19) построена так, что равенство $(e + a) \times (e + b) = e + c$ равносильно соотношению $\exp u \cdot \exp v = \exp w$, где $u = \ln(e + a)$, $v = \ln(e + b)$, $w = \ln(e + c)$. Следовательно, соответствие $a \to \ln(e + a)$ есть изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т. е. между $\mathfrak{A}$ и присоединенной группой алгебры A.

Необходимые условия мы сформулируем в следующей форме:

Теорема 4. *Если свободное произведение* N-*групп есть* N-*группа, то либо все заданные группы вложимы в присоединенные группы* N-*алгебр над полями одной и той же простой характеристики, либо каждая из них не содержит обобщенных* p-*элементов ни при каком* p.

Допустим, наоборот, что какая-либо из заданных групп $\mathfrak{G}_i$ содержит обобщенный p-элемент g, и при этом группы $\{\mathfrak{G}_i\}$ не допускают вложения в присоединенные группы N-алгебр над полями характеристики p. Следовательно, по крайней мере одна группа $\mathfrak{G}_j$ содержит элемент h бесконечной p-высоты. Если свободное произведение $\mathfrak{G}$ групп $\{\mathfrak{G}_i\}$ является N-группой, то $\mathfrak{G}$ будет обобщенным p-элементом, а h — элементом бесконечной p-высоты и в $\mathfrak{G}$. Согласно теореме 1, g и h должны быть перестановочны. Это может быть только тогда, когда g и h принадлежат к одной и той же группе $\mathfrak{G}_i$. Преобразуем g каким-нибудь элементом $x \neq 1$, взятым из группы $\mathfrak{G}_k$, отличной от $\mathfrak{G}_i$. Элемент $x^{-1}gx$ снова будет обобщенным p-элементом в $\mathfrak{G}$ и, значит, должен быть перестановочен с h, что противоречит определению свободного произведения. Теорема доказана.

Совпадают или нет указанные необходимые и достаточные условия в общем случае, нам неизвестно. Однако, если заданные группы таковы, что в них из отсутствия обобщенных p-элементов по всем p вытекает отсутствие обобщенных периодических элементов, то необходимые условия теоремы 4 эквивалентны достаточным условиям теоремы 3. Например, пусть перемножаются нильпотентные группы. В нильпотентных группах, как известно, подгруппа периодических элементов распадается в прямое произведение p-подгрупп. Поэтому *для того чтобы свободное произведение нильпотентных групп было* N-*группой, необходимо и достаточно, чтобы либо все эти группы не содержали элементов бесконечной* p-*высоты при некотором* p, *либо чтобы ни одна из групп не содержала элементов конечного порядка.*

Можно заметить также, что достаточные условия теоремы 3 будут и необходимыми, если одна из перемножаемых групп, например, содержит элемент, имеющий бесконечную высоту по каждому p.

10. Примеры. В работе Д. И. Фукс-Рабиновича [6] утверждается, что свободное произведение произвольных абелевых групп является N-группой. В такой общей форме это утверждение неверно, так как теорема 4 показывает, что свободное произведение циклической группы второго порядка на циклическую группу третьего порядка N-группой не будет. Указанное выше следствие из теорем 3 и 4 дает необходимые и достаточные условия, для того чтобы свободное произведение абелевых групп было N-группой.

Рассмотрим еще свободное произведение $\mathfrak{A}$ двух циклических групп второго порядка с образующими a и b. Согласно теореме 3, $\mathfrak{A}$ есть N-группа. Непосредственный подсчет показывает, что все истинные фактор-группы $\mathfrak{A}$ являются конечными, разрешимыми, но не обязательно нильпотентными группами. Таким образом, $\mathfrak{A}$, по терми-

нологии обзора Куроша-Черникова [9], является одновременно Z- и $\overline{RJ}$-группой. Существование у $\mathfrak{A}$ конечных, не нильпотентных фактор-групп показывает, что $\mathfrak{A}$ не есть $\overline{Z}$-группа. Следовательно, из свойств Z и $\overline{RJ}$ свойство $\overline{Z}$ не вытекает, и вопрос XXIX указанного обзора решается отрицательно. Также отрицательно решается и вопрос XXXI этого обзора. Действительно, $\mathfrak{A}$ есть Z-группа. В то же время элементы $\mathfrak{A}$, порядок которых есть степень двух, не образуют подгруппы, так как ab имеет в $\mathfrak{A}$ бесконечный порядок.

11. Группы с трансфинитным нижним центральным рядом. Система подгрупп

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}^2 \supset \mathfrak{G}^3 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^\omega \supset \mathfrak{G}^{\omega+1} \supset \ldots$$

группы $\mathfrak{G}$ называется ее нижним (трансфинитным) центральным рядом, если $\mathfrak{G}^{\alpha+1}$ порождается коммутаторами вида (g, g_α), $g \in \mathfrak{G}$, $g_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$, а $\mathfrak{G}^\alpha$ для α предельного есть пересечение всех предыдущих подгрупп. Если при некотором α $\mathfrak{G}^\alpha = 1$, то $\mathfrak{G}$ называется группой с убывающим центральным рядом или, согласно Курошу-Черникову [9], ZD-группой. Наименьшее α, при котором $\mathfrak{G}^\alpha = 1$, называется классом $\mathfrak{G}$. Определение трансфинитного центрального ряда использовалось несколькими авторами. Однако существование ZD-групп произвольных классов установлено не было (см. обзор Куроша-Черникова [9], проблема XVIII). Мы хотим показать, что ZD-группы любых классов фактически существуют. Для этого сначала удобнее ввести аналогичные понятия для алгебр.

Система подалгебр

$$A \supset A^2 \supset A^3 \supset \ldots \supset A^\omega \supset A^{\omega+1} \supset \ldots$$

называется нижним центральным рядом для A, если $A^{\alpha+1}$ есть подалгебра, порожденная произведениями вида aa^α и $a^\alpha a$, $a \in A$, $a^\alpha \in A^\alpha$, а A^α с предельным α есть пересечение предыдущих. Если при некотором α $A^\alpha = 0$, то A называется алгеброй с нижним центральным рядом или ZD-алгеброй. Наименьшее α, удовлетворяющее равенству $A^\alpha = 0$, называется классом ZD-алгебры.

Рассуждения п. 4 показывают, что *присоединенная группа ZD-алгебры класса α есть ZD-группа класса не выше α*. Однако фактически класс присоединенной группы может быть меньше класса ZD-алгебры. Поэтому гарантировать совпадение классов алгебры и присоединенной группы можно для сравнительно узких категорий алгебр.

Алгебру A мы будем называть косой, если в A существует базис e_α, обладающий следующими свойствами: a) произведение любых двух базисных элементов есть либо нуль, либо базисный элемент; b) если $e_\alpha e_\beta \neq 0$, то $e_\beta e_\alpha = 0$. Базис с этими свойствами мы будем называть правильным.

Лемма 3. *Класс присоединенной группы косой ZD-алгебры совпадает с классом этой алгебры.*

Пусть A — косая ZD-алгебра, $\mathfrak{G}$ — ее присоединенная группа. Обозначим через $\mathfrak{G}^\alpha$, как обычно, α-й член нижнего центрального

ряда группы $\mathfrak{G}$. Покажем, что *все элементы правильной базы A, содержащиеся в A^α, входят и в $\mathfrak{G}^\alpha$*. При $\alpha = 1$ это очевидно, так как всякий элемент e правильной базы удовлетворяет соотношению $e^2 = 0$ (условие b)), и, значит, имеет присоединенно обратный $-e$. Допустим, что наше утверждение справедливо для всех α, меньших β. Если β — предельное, то утверждение будет, очевидно, верным и для $\mathfrak{G}^\beta$. Поэтому предположим, что $\beta = \alpha + 1$. Выберем произвольный элемент правильной базы $e_{\alpha+1}$ из $A^{\alpha+1}$. Согласно определению алгебры $A^{\alpha+1}$, ее базис состоит из произведений вида $e_\lambda e_\alpha$ и $e_\alpha e_\lambda$, $e_\alpha \in A^\alpha$, $e_\lambda \in A$. Пусть $e_{\alpha+1} = e_\lambda e_\alpha$ и, значит, $e_\alpha e_\lambda = 0$. Так как $e_\alpha^2 = 0$, то присоединенно обратным для e_α будет $-e_\alpha$, откуда $e_\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha$. Мы имеем: $(e_\lambda, e_\alpha) \in \mathfrak{G}^{\alpha+1}$. Но

$$(e_\lambda, e_\alpha) = (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha) \circ e_\lambda \circ e_\alpha = (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha + e_\lambda - e_\alpha e_\lambda) \circ e_\alpha =$$
$$= (-e_\lambda) \circ (-e_\alpha + e_\lambda) \circ e_\alpha = e_{\alpha+1} - e_\lambda e_{\alpha+1} = e_{\alpha+1},$$

т. е. $e_{\alpha+1} \in \mathfrak{G}^{\alpha+1}$. Лемма доказана.

Введем еще одно понятие. Пусть над некоторым полем P заданы алгебры A и B с базисами e_{α_i} и ε_{β_i} $(i = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим алгебру C с базисом, составленным из элементов e_α, ε_β, $e_\alpha \varepsilon_\beta$, и таблицей умножения:

$$\varepsilon_\beta \cdot e_\alpha = 0, \qquad e_\alpha \varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\gamma = 0, \qquad e_\alpha \varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\gamma = e_\alpha (\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma),$$

$$e_\alpha \cdot e_\beta \varepsilon_\gamma = (e_\alpha e_\beta) \varepsilon_\gamma, \qquad \varepsilon_\gamma \cdot e_\alpha \varepsilon_\beta = 0, \qquad e_\alpha \varepsilon_\beta \cdot e_\gamma \varepsilon_\delta = 0.$$

Алгебра C, как легко видеть, ассоциативна. Мы назовем ее **косым произведением** A на B. Если A и B — косые с правильными базисами e_α, ε_β, то косое произведение A на B будет косой алгеброй с правильным базисом e_α, ε_β, $e_\alpha \varepsilon_\beta$.

Лемма 4. *Косое произведение C алгебры A класса $\alpha + 1$ на алгебру B класса β имеет класс, не меньший $\alpha + \beta$.*

В самом деле, базис C^α заведомо содержит все элементы вида $e_i \varepsilon_j$, где $e_i \in A^\alpha$, $\varepsilon_j \in B$. Отсюда видно, что базис $C^{\alpha+\lambda}$ $(\lambda < \beta)$ содержит все элементы $e_i \varepsilon_j$, где $e_i \in A^\alpha$, $\varepsilon_j \in B^\lambda$. Следовательно, $C^{\alpha+\lambda} \neq 0$ при $\lambda < \beta$, что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии доказать общую теорему существования.

Теорема 5. *Для каждого трансфинитного числа α существуют косые ZD-алгебры класса α.*

Если α конечно, то в качестве искомой алгебры можно взять алгебру треугольных матриц степени α с нулевой главной диагональю. Правильный базис этой алгебры дают матричные единицы e_{ij}, $i < j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \alpha)$. Далее применяем индукцию. Пусть доказано, что косые алгебры классов, меньших α, существуют. Если α — предельное, то прямая сумма косых алгебр классов, стремящихся к α, даст косую алгебру класса α. Допустим, что $\alpha = \alpha' + 1$ и $\alpha' = \beta + 1$. Тогда косая сумма двух косых алгебр класса $\beta + 1$ даст, в силу леммы 4, косую алгебру класса $\beta + \beta \geqslant \alpha$. Остается случай, когда $\alpha = \alpha' + 1$ и α' — предельное. Лемма 4 здесь непосредственно не применима. Поэтому рассуждаем сле-

дующим образом. Пусть $\alpha_\lambda < \alpha'$, $\lim \alpha_\lambda = \alpha'$. Для каждого λ строим правильную алгебру A_λ класса $\alpha_\lambda + 1$. Мы можем считать, кроме того, что размерности $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$ при всех λ одинаковы. Отобразим все $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$ изоморфно на $A_1^{\alpha_1}$. Теперь составим прямую сумму A алгебр A_λ и в этой сумме отождествим соответственные элементы подалгебр $A_\lambda^{\alpha_\lambda}$. Очевидно, в новой алгебре $\overline{A}$ все степени вида $\overline{A}^{\alpha_\lambda}$ содержат $\overline{A}_1^{\alpha_1}$, и, таким образом, $\overline{A}^{\alpha'}$ также содержит $\overline{A}_1^{\alpha_1}$. Отсюда видно, что класс $\overline{A}$ равен требуемому числу $\alpha' + 1$. Беря присоединенные группы косых ZD-алгебр, мы получим ZD-группы произвольных классов.

12. Группы с трансфинитным рядом коммутантов. N-группы и группы с трансфинитным убывающим центральным рядом в некотором смысле примыкают к нильпотентным группам. Аналогичным образом обобщается и понятие разрешимой группы. Цепочка подгрупп

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}' \supset \mathfrak{G}'' \supset \ldots \supset \mathfrak{G}^{(\omega)} \supset \mathfrak{G}^{(\omega+1)} \supset \ldots$$

называется (трансфинитной) цепочкой последовательных коммутантов, если $\mathfrak{G}^{(\alpha+1)}$ есть коммутант группы $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$, а для предельного α $\mathfrak{G}^{(\alpha)}$ есть пересечение предыдущих коммутантов. Группа $\mathfrak{G}$ называется RK-группой класса α, если $\mathfrak{G}^{(\alpha)} = 1$, $\mathfrak{G}^{(\beta)} \neq 1$, $\beta < \alpha$.

Естественно возникает вопрос о существовании RK-групп произвольных классов. В частности, этот вопрос сформулирован в упомянутом обзоре Куроша-Черникова (проблема XII), откуда заимствовано и название RK-группы. Покажем, что этот вопрос решается положительно.

Пусть A — алгебра с базой $e_{\alpha\beta}$, где α, β пробегают некоторое множество трансфинитных чисел $1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \alpha < \beta$, и обычной матричной таблицей умножения:

$$e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} = e_{\alpha\gamma}, \qquad e_{\alpha\beta} e_{\beta_1\delta} = 0 \qquad (\beta \neq \beta_1).$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ присоединенную группу алгебры A. Введем функцию $\varphi(\alpha)$ посредством соотношений:

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(\alpha+1) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha), \qquad \varphi(\alpha) = \lim_{\lambda < \beta} \varphi(\lambda),$$

где β — предельное. Утверждается, что $\mathfrak{G}^\lambda$ содержит все элементы $e_{\alpha\beta}$, у которых $\beta \geqslant \alpha + \varphi(\lambda)$. В самом деле, для $\lambda = 0$ это тривиально, так как, по определению, $\mathfrak{G}^{(0)} = \mathfrak{G}$. Допустим, что утверждение верно для всех значений λ, меньших некоторого σ. Если σ — предельное, то утверждение будет, очевидно, справедливо и для σ. Остается рассмотреть случай, когда $\sigma = \rho + 1$. Возьмем некоторый элемент $e_{\alpha\beta}$, $\beta \geqslant \alpha + \varphi(\sigma)$. Этот элемент можно представить в виде $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta}$, $\gamma = \alpha + \varphi(\rho)$, $\beta \geqslant \gamma + \varphi(\rho)$. По условию, $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\gamma\beta}$ содержатся в $\mathfrak{G}^{(\rho)}$, следовательно, коммутатор $(e_{\alpha\gamma}, e_{\gamma\beta})$ входит в $\mathfrak{G}^{(\rho+1)}$. Но

$$(e_{\alpha\gamma}, e_{\gamma\beta}) = (-e_{\alpha\gamma}) \circ (-e_{\gamma\beta}) \circ e_{\alpha\gamma} \circ e_{\gamma\beta} = e_{\alpha\beta},$$

т. е. $e_{\alpha\beta} \in \mathfrak{G}^\sigma$, что и требовалось доказать. Таким образом, выбирая

достаточно высокие значения для ρ, мы получим RK-группы произвольно высокого класса *.

В предыдущих пунктах нас интересовал вопрос, при каких условиях свободное произведение N-групп будет N-группой. Для RK-групп один из аналогичных вопросов решается тривиально: *свободное произведение* RK-*групп класса не выше* α *есть* RK-*группа класса не выше* $\alpha+\omega$.

Действительно, пусть $\{\mathfrak{G}_\nu\}$ — заданные RK-группы класса не выше α. Обозначим через $\mathfrak{N}$ нормальный делитель их свободного произведения $\mathfrak{G}$, порожденный коммутаторами (g_λ, g_μ), $\lambda \neq \mu$, $g_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda$, $g_\mu \in \mathfrak{G}_\mu$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ изоморфна прямому произведению групп $\mathfrak{G}_\nu$ и, следовательно, есть RK группа класса не выше α. С каждым из сомножителей $\mathfrak{G}_\nu$ нормальный делитель $\mathfrak{N}$ общих, отличных от единицы элементов не имеет. Теорема А. Г. Куроша о подгруппах свободного произведения показывает, что $\mathfrak{N}$ — свободная группа. Согласно упомянутой во введении теореме Магнуса, всякая некоммутативная свободная группа есть RK-группа класса ω. Поэтому $\mathfrak{G}$ есть RK-группа класса не выше $\alpha+\omega$.

(Поступило в редакцию 29/X 1947 г.)

Литература

1. И. Д. Адо, О нильпотентных алгебрах и p-группах, ДАН, **40** (1943), 339—342.
2. В. Андрунакиевич, Полурадикальные кольца, Изв. АН СССР, серия матем., **12** (1948), 129—178.
3. R. Baer, The higher commutator subgroups of a group, Bull. Am. Math. Soc., **50** (1944), 143—160.
4. G. Birkhoff, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. of Math., **38** (1937), 526—532.
5. A. Foster, The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra, Duke Math. J., **12** (1945), 143—152.
6. O. J. Fouxe-Rabinowitch, On the determinators of an operator of the free group, Мат. сб., **7** (**49**) (1940), 200—206.
7. А. Г. Курош, Теория групп, М.— Л., 1944.
8. А. Г. Курош, Силовские подгруппы нульмерных топологических групп, Изв. АН СССР, серия матем., **9** (**51**) (1945), 66—78.
9. А. Г. Курош и С. Н. Черников, Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи мат. наук, т. **II**, в. **3** (**19**), 18—58.
10. W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann., **111** (1935), 259—280.
11. А. И. Мальцев, О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры, ДАН, **36** (1942), 46—50.
12. А. И. Мальцев, Нильпотентные группы без кручения, Изв. АН СССР, серия мат., **13**, № **3** (1949), 201—212.
13. S. Perlis, A characterisation of the radical of an algebra, Bull. Am. Math. Soc., **48** (1942), 128—132.

---

* Легко видеть из п. 11, что RK-группы класса ω могут быть ZD-группами произвольных классов.