И. В. Павлов, Системы Хаара и некоторые результаты о базисах в пространстве мартингалов со смешанной нормой, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 623–626

DOI: 10.4213/tvp2005

Поскольку $K_t(0, Y)/x^t$ может входить в (1) в любой степени, мы вправе предположить, что K_t^γ, $\gamma < 1$, появляется в оценке для $|\mathbf{P}\{S_n < Bx\} - \Phi(x)|$ только для $x < 1/B$, т.е. скорее при малых, чем при больших уклонениях.

Между прочим, неравенство (23) позволяет объяснить, почему K_3 входит в равномерную оценку для $\Delta(x)$ именно в степени $\frac{1}{4}$ (см. [6] и более ранние работы на эту тему).

В самом деле, полагая в (23) $G = \Phi$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $b = x$, имеем при $\sigma = 1$

$$\Phi(x) - \mathbf{P}\{X < x\} < \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{K_3}{x^3} < \frac{xe^{-x^2/8}}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{K_3}{x^3} \equiv r(x).$$

Если $x = K_3^{1/4}$, то $r(x) < (1 + 1/\sqrt{2e\pi})\, K_3^{1/4}$. Как показывают примеры (см. [6]), полученная оценка в смысле зависимости от K_3 является точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фук Д. X., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 4, с. 660–675.
2. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. *Эбралидзе Ш. С.* Неравенства для вероятностей больших уклонений в терминах псевдомоментов. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 4, с. 760–765.
4. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
5. *Шоргин С. Я.* Неклассические оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, учитывающие большие уклонения. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 2, с. 308–318.
6. *Нагаев С. В., Ротарь В. И.* Об усилении оценок типа Ляпунова (случай близости распределений слагаемых к нормальному). — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. XVIII, в. 1, с. 109–121.

Поступила в редакцию
12.V.1996

 ПАВЛОВ И. В.*

СИСТЕМЫ ХААРА И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ МАРТИНГАЛОВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ[1)]

Для пространств мартингалов со смешанной нормой, определенных относительно диадического потока σ-алгебр, найдено условие на показатели суммируемости, влекущее за собой отсутствие безусловного базиса в этих пространствах

*Ростовская-на-Дону государственная академия строительства, кафедра высшей математики, ул. Социалистическая, 162, 344022 Ростов-на-Дону, Россия.

[1)]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 94-01-01051-а.

(обобщение классического результата А. Пелчинского, доказанного им для пространств L_1). В этих пространствах (при других условиях на показатели) рассмотрены обобщенные системы Хаара, получен критерий существования безусловного базиса в терминах функции Пэли и доказана теорема о сходимости при почти всех выборах знаков.

Ключевые слова и фразы: **мартингал, смешанная норма, диадический поток, система Хаара, безусловный базис.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \mathbf{P})_{n=0}^{\infty}$ — стохастический базис, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F} = \vee_n \mathcal{F}_n$. Отождествляя случайные величины (с.в.) $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с равномерно интегрируемыми мартингалами $(f_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$, где $f_n = \mathbf{E}[f \mid \mathcal{F}_n]$, рассмотрим мартингальное пространство $L_{\overline{p}} = L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, состоящее из таких f, что

$$\|f\|_{\overline{p}} = \sup_n \|\cdots\| \|f_n\|_{p_n, \mathcal{F}_{n-1}}\|_{p_{n-1}, \mathcal{F}_{n-2}} \cdots \|_{p_1, \mathcal{F}_0} < \infty,$$

причем для с.в. g и σ-подалгебры $\mathcal{G}$ норма $\|g\|_{q,\mathcal{G}} = (\mathbf{E}[|g|^q \mid \mathcal{G}])^{1/q}$ при $1 \leqslant q < \infty$ и $\|g\|_{\infty,\mathcal{G}} = \lim_{q\to\infty} \uparrow \|g\|_{q,\mathcal{G}}$.

Различные свойства сходимости в такого рода пространствах детально рассмотрены в статьях [1]–[4]. На них мы опираемся в настоящей работе при изучении вопросов, связанных с базисами в пространстве $L_{\overline{p}}$.

Сначала проясним два обстоятельства, которые затрудняют изучение вопросов базисности в пространствах $L_{\overline{p}}$ (по сравнению, например, с обычными пространствами L_p-суммируемых случайных величин). Во-первых, норма пространства $L_{\overline{p}}$ существенно зависит от потока $(\mathcal{F}_n)$, и поэтому в настоящей работе мы будем, в основном, иметь дело с несколькими специальными потоками. Во-вторых, если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, то оператор условного математического ожидания $\mathbf{E}[\cdot \mid \mathcal{G}]$, вообще говоря, неограничен в $L_{\overline{p}}$ (см. [4]), что, как известно, затрудняет в общем случае процедуру построения базисов.

Приведем два предложения, связанные с данным кругом вопросов. Заметим, что у нас $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ — бесконечномерный вектор показателей суммируемости, $1 \leqslant p_n \leqslant \infty$, $n = 1, 2, \ldots$.

Предложение 1. *Пусть возрастающий поток σ-алгебр $(\mathcal{G}_n)_{n=0}^{\infty}$ таков, что $\mathcal{G}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$, $\vee_n \mathcal{G}_n = \mathcal{F}$. Если последовательность (p_n) монотонно убывает (соответственно, монотонно возрастает), то $L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{G}_n, \mathbf{P}) \subset L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$ (соответственно, $L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}) \subset L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{G}_n, \mathbf{P})$), и для любой случайной величины f выполняется неравенство $\|f\|_{L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)} \leqslant \|f\|_{L_{\overline{p}}(\mathcal{G}_n)}$ (соответственно, $\|f\|_{L_{\overline{p}}(\mathcal{G}_n)} \leqslant \|f\|_{L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)}$).*

Предложение доказывается с помощью неравенства Йенсена и аргументов двойственности. Простые примеры показывают, что предложение 1 в общем случае неулучшаемо.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — произвольная σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$. Через $L_{\overline{p}}^{\mathcal{G}}$ обозначим совокупность $\mathcal{G}$-измеримых с.в., принадлежащих $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$.

Предложение 2. *Пусть $(\mathcal{G}_n)_{n=0}^{\infty}$ — произвольный возрастающий поток σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_\infty = \vee_n \mathcal{G}_n$. Если $\sup_k p_k < \infty$, то $L_{\overline{p}}^{\mathcal{G}_\infty}$ совпадает с замыканием в $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ множества $\cup_n L_{\overline{p}}^{\mathcal{G}_n}$.*

Это предложение обобщает предложение 10 из работы [4], полученное там в случае, когда пространство $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ имеет структуру счетного декартова произведения (см. также [1]). Доказательство переносится из [4] без существенных изменений.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда все σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ конечно порожденные. Если $\mathcal{F}_{n-1} = \mathcal{F}_n$ для какого-либо $n \geqslant 1$, то эту $\mathcal{F}_n$ выбрасываем из потока, координату p_n выбрасываем из состава координат вектора $\overline{p}$, а после такой чистки занумеровываем подряд оставшиеся σ-алгебры и оставшиеся координаты вектора $\overline{p}$.

Пространство $L_{\overline{p}}$, построенное по исходным $(\mathcal{F}_n)$ и $\overline{p}$, очевидно, совпадает с пространством $L_{\overline{p}}$, полученным по «очищенному» потоку и вектору показателей. Эти последние объекты мы снова обозначаем $(\mathcal{F}_n)$ и $\overline{p}$ и получаем, что $\mathcal{F}_{n-1} \neq \mathcal{F}_n$ для любого $n \geqslant 1$. Очевидно, что на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ существует поток σ-алгебр $(\mathcal{G}_k)_{k=0}^{\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел (k_n) такие, что каждая $\mathcal{G}_k$ порождена разбиением Ω ровно на $k+1$ атом (такие потоки называют потоками Хаара, см. [5, с. 51]) и $\mathcal{G}_{k_n} = \mathcal{F}_n$, $\forall\, n \geqslant 0$. Пусть $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ — бесконечномерный вектор показателей, устроенный следующим образом: $q_i = p_n$ при $k_{n-1} < i \leqslant k_n$ $(n \geqslant 1)$. Легко видеть, что тогда

$$L_{\overline{q}}(\Omega, \mathcal{G}_k, \mathbf{P}) = L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}).$$

Следуя [5], с потоком Хаара $(\mathcal{G}_k)$ свяжем систему с.в. Хаара $(\chi_k)_{k \geqslant 0}$ следующим образом: $\chi_0(\omega) = 1$ на Ω,

$$\chi_{k+1}(\omega) = \begin{cases} a, & \omega \in B_1^{(k+1)}, \\ b, & \omega \in B_2^{(k+1)}, \\ 0, & \omega \in \Omega \backslash (B_1^{(k+1)} \cup B_2^{(k+1)}), \end{cases}$$

где $B_1^{(k+1)}$ и $B_2^{(k+1)}$ — те два атома из $\mathcal{G}_{k+1}$, которые получились в результате дробления атома из $\mathcal{G}_k$ (при переходе от k к $k+1$ ровно один атом дробится на две части), а числа a и b выбраны таким образом, что

$$\mathbf{E}(\chi_{k+1}) = 0, \quad \mathbf{E}(\chi_{k+1}^2) = 1.$$

Теорема 1. *Если все $\mathcal{F}_n$ конечно порождены и $\sup_k p_k < \infty$, то система Хаара $(\chi_k)_{k \geqslant 0}$ является базисом в пространстве $L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$.*

В доказательстве этой теоремы существенным образом используется теорема о сходимости мартингалов в смешанной норме (см. [2], [3]). Однако ввиду того, что основные мартингальные неравенства в смешанной норме остаются недоказанными, следующее утверждение можно рассматривать только лишь в виде гипотезы: если в дополнение к условиям теоремы 1 выполняется условие $\underline{\lim}_{k \to \infty} p_k > 1$, то система Хаара $(\chi_k)_{k \geqslant 0}$ является безусловным базисом в пространстве $L_{\overline{p}}(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbf{P})$.

В дальнейшем мы будем работать на структуре, важной с точки зрения приложений к анализу. Пусть $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств, $\mathbf{P}$ — мера Лебега на $[0, 1)$, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная разбиением $[0, 1)$ на атомы $[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)]$, $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k < 2^n$. Полученный поток назовем диадическим. Он обладает рядом замечательных свойств. Среди них выделяется тот факт, что этот поток изоморфен цилиндрическому потоку на счетном произведении двуточечных вероятностных пространств $\{0, 1\}$, где атомы $\{0\}$ и $\{1\}$ равновероятны. Учитывая это обстоятельство, можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\underline{\lim}_{k \to \infty} p_k = 1$. Тогда $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ не вкладывается изоморфно ни в одно банахово пространство с безусловным базисом.*

Заметим, что теорема 2 является обобщением классического результата Пелчинского [6] для пространства $L_1(0, 1)$.

Теорема 3. *Пусть $\overline{\lim}_{k \to \infty} p_k < \infty$. Для того чтобы полная и минимальная в $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ система функций $(\varphi(x))_{n=0}^{\infty}$ являлась безусловным базисом в $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $f \in L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ функция Пэли*

$$\mathcal{P}(f, x) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\langle f, \psi_n \rangle \varphi_n(x) \right]^2 \right\}^{1/2},$$

где $(\psi_n(x))_{n=0}^{\infty}$ — биортогональная система для $(\varphi_n(x))_{n=0}^{\infty}$, была почти всюду конечна и выполнялось неравенство

$$B\|f\|_{\overline{p}} \leqslant \|\mathcal{P}(f)\|_{\overline{p}} \leqslant A\|f\|_{\overline{p}} \tag{1}$$

(постоянные A и B не зависят от f).

Отметим, что если в теореме 3 $(\varphi_n(x))$ — классическая система Хаара на $[0,1)$, то $\mathcal{P}(f)$ превращается в мартингальную квадратическую функцию, а неравенство (1) есть аналог в смешанной норме неравенства Буркхольдера–Ганди. Учитывая теорему 2, получаем в этом случае, что при условии $\underline{\lim}_{k\to\infty} p_k = 1$ неравенство Буркхольдера–Ганди не выполняется.

В заключение сформулируем результат, касающийся сходимости в $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ при почти всех выборах знаков. Напомним, что если $f_n \in L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ называется сходящимся при почти всех выборах знаков, если для почти всех $t \in [0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\, f_n$, (где $r_n(t)$ — функции Радемахера) сходится по норме пространства $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$.

Теорема 4. *Пусть $\overline{\lim}_{k\to\infty} p_k < \infty$. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходился в $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ при почти всех выборах знаков, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right\}^{1/2} \in L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n).$$

Теоремы 3 и 4 являются обобщениями на $L_{\overline{p}}(\mathcal{F}_n)$ известных утверждений для пространств $L_p(0,1)$ (см., например, [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиков А. Д., Павлов И. В.* Пространства $L_{\overline{p}}$ со смешанной нормой на бесконечном декартовом произведении вероятностных пространств. — Anal. Math., 1987, v. 13, № 3, p. 231–250.
2. *Павлов И. В.* Пространство мартингалов со смешанной нормой относительно произвольной возрастающей последовательности σ-алгебр. — В сб.: Специальные вопросы математического анализа, теории вероятностей и гидромеханики. Ростов-на-Дону: РГАС, 1993. Деп. в ВИНИТИ 12.01.94 № 107, 5В45.
3. *Pavlov I. V.* Some properties of martingale spaces H_p BMO, VMO and with mixed norm. — In: Statistics and Control of Stochastic Processes. V. Ed. by A. A. Novikov, Moscow: TVP, 1997.
4. *Bendikov A. D., Pavlov I. V.* Some operators on martingale spaces with mixed norm. — In: Statistics and Control of Stochastic Processes (Steklov Seminar, 1985–86). Ed. by A. N. Shiryayev et al. New York: Optimization Software, 1989, p. 17–30.
5. *Neveu J.* Discrete-parameter martingales. Amsterdam: North-Holland, 1975, 236 p.
6. *Pelczynski A.* Projections in certain Banach spaces. — Studia Math., 1967, v. 19, p. 209–228.
7. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984, 496 с.

Поступила в редакцию
11.VIII.1995